

Рациональные уравнения

Вишняков А.Ю.



2008год

В данной презентации достаточно полно изложена теория решения различных видов рациональных уравнений, за исключением линейных и квадратных уравнений, а также общей теории решения уравнений 3-й и 4-й степеней.

Нет здесь и примеров, решаемых с помощью теоремы Безу.

Каждый вид уравнения сопровождается решением соответствующего примера.

Данные материалы могут быть использованы частично на уроках алгебры в обычных классах, но в большей мере пригодятся для изучения этой темы в классах с углубленным изучением математики.

Рациональные уравнения

Целые

Дробные

Способ подстановки

возвратные

распадающиеся

биквадратные

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$$

симметричные
3-го 3-го и 4-го порядка

Однородное 2-го порядка

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$$



end

Рациональные уравнения

Целые

Дробные

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

Сумма двух и более дробей

$$a \frac{P(x)}{Q(x)} + b \frac{Q(x)}{P(x)} + c = 0$$

$$\frac{px}{ax^2 + bx + c} + \frac{qx}{ax^2 + dx + c} = r, (r \neq 0)$$



end

Способ подстановки



- При решении некоторых целых рациональных уравнений есть смысл ввести новую переменную величину, обозначив некоторое рациональное выражение новой буквой.
- Например, в уравнении $a \cdot P^2(x) + b \cdot P(x) + c = 0$ где $P(x)$ – многочлен, удобно ввести новую переменную $y = P(x)$, решить полученное квадратное уравнение $ay^2 + by + c = 0$ относительно y и, наконец, решить уравнение $P(x) = y_0$, где y_0 – корень уравнения $ay^2 + by + c = 0$



Обратно
в меню



Пример

Пример



- Решите уравнение $(x^2 - 5x + 7)^2 - 2(x^2 - 5x + 6) = 1$.
- Решение. Введем новую переменную. Пусть

$$x^2 - 5x + 7 = y$$

Тогда получим уравнение

$$y^2 - 2(y - 1) = 1.$$

Находим корень $y = 1$ и делаем обратную подстановку.

$$x^2 - 5x + 7 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: 2; 3.



Обратно
в меню

Распадающееся уравнение



- Рациональное уравнение называется распадающимся, если его можно привести к виду $P(x) \cdot Q(x) = 0$, где $P(x), Q(x)$ – рациональные выражения с переменной x .
- Для решения воспользуемся равносильным переходом

$$P(x) \cdot Q(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) = 0. \end{cases}$$

- Применяемые приемы разложения на множители:
 - вынесение общего множителя за скобки;
 - способ группировки;
 - формулы сокращенного умножения.



Обратно
в меню



Пример

Пример



- Решите уравнение $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = 0$.
- Решение. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$(x^4 - x^3) - (4x^2 - 4x) = 0, \Leftrightarrow x^3(x-1) - 4x(x-1) = 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2 - 4) = 0, \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)(x+2) = 0. \Leftrightarrow$$

Воспользуемся равносильным переходом:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x - 1 = 0, \\ x - 2 = 0, \\ x + 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1, \\ x = 2, \\ x = -2. \end{cases}$$

Ответ: -2; 0; 1; 2.



Однородное уравнение 2-го порядка



$$aP^2(x) + bP(x)Q(x) + cQ^2(x) = 0$$

- При решении уравнения надо проверить две ситуации:

1) $\begin{cases} P(x) = 0, \text{ т.е. корнями заданного уравнения} \\ Q(x) = 0. \end{cases}$ являются решения этой системы.

2) Если $Q(x) \neq 0$, то после деления заданного уравнения на $Q^2(x)$ получим уравнение

$$a\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^2 + b\frac{P(x)}{Q(x)} + c = 0,$$

которое подстановкой $\frac{P(x)}{Q(x)} = t$ сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$

В ответ включают числа, полученные при рассмотрении обеих ситуаций.



Пример



- Решить уравнение

$$(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x)(x^2 - x - 2) - 2(x^2 - x - 2)^2 = 0.$$

- Решение. Возможны две ситуации.

- Рассмотрим первую:

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2, \\ x = -1, \\ x = 2, \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

Найден первый корень уравнения $x=2$.



Обратно
в меню



Продолжение решения



- Рассмотрим вторую ситуацию: разделим почленно заданное уравнение на $(x^2 - x - 2)^2$ при условии, что $x \neq -1$ и $x \neq 2$.

Уравнение принимает вид

$$\left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} \right)^2 - \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} - 2 = 0.$$

Обозначим $t = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} = \frac{x}{x+1}$ и решим квадратное уравнение $t^2 - t - 2 = 0$. Получаем $t_1 = -1$, $t_2 = 2$.

Обратная подстановка дает уравнения

$$\frac{x}{x+1} = -1, \frac{x}{x+1} = 2, \text{ откуда } x = -0,5 \text{ и } x = -2.$$

С учетом обеих ситуаций получаем

ОТВЕТ: - 0,5; -2; 2.



Обратно
в меню

Биквадратное уравнение



- Уравнение имеет вид

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

- Сделаем подстановку $x^2 = t$. Значит, $x^4 = t^2$.

Получаем квадратное уравнение

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Находим значения t и, сделав обратную подстановку, находим корни исходного уравнения.

Замечание.

При решении биквадратного уравнения можно получить от 1 до 4-х корней или же это уравнение может совсем не иметь корней.



Обратно
в меню

Пример

Пример



- Решите уравнение $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

- Решение.

Сделаем подстановку $x^2 = t$. Получаем квадратное уравнение

$$t^2 - 3t - 4 = 0,$$

корни которого $t = -1$ и $t = 4$.

Обратная замена дает два уравнения $x^2 = -1$ и $x^2 = 4$, из которых первое уравнение не имеет корней, а корни второго уравнения -2 и 2 .

Ответ: $-2; 2$.



Обратно
в меню

Симметричное уравнение 3-го порядка



- Уравнение имеет вид

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

- Сгруппируем слагаемые: $a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0.$

Применим формулу суммы кубов

$$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0$$

и выполним разложение на множители

$$(x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0.$$

Получили распадающееся уравнение. Значит,

$$x + 1 = 0 \text{ или } ax^2 + (b - a)x + a = 0.$$

Решив эти два уравнения, найдем корни
исходного уравнения.



Обратно
в меню

Пример

Пример



- Решите уравнение $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$.
- Решение. Сгруппируем слагаемые парами и в каждой паре вынесем общий множитель за скобки:

$$2(x^3 + 1) - 3x(x + 1) = 0.$$

Применим формулу суммы кубов и вынесем общий множитель $(x+1)$:

$$\begin{aligned} 2(x+1)(x^2 - x + 1) - 3x(x+1) &= 0, \\ (x+1)(2x^2 - 5x + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Решив эти два уравнения, найдем корни исходного уравнения: $-1; 0,5; 2$.

Ответ: $-1; 0,5; 2$.



Симметричное уравнение 4-го порядка



- Уравнение имеет вид

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

- Сгруппируем слагаемые и разделим обе части уравнения на x^2 . Получаем

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Сделаем подстановку $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Получаем квадратное уравнение

$$a(t^2 - 2) + bt + c = 0.$$

Находим значения t и делаем обратную подстановку.



Обратно
в меню

Пример

Пример



- Решите уравнение $2x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 3x + 2 = 0$.
- **Решение.** Разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$ и, удобно группируя, получим равносильное уравнение:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 0.$$

Сделаем подстановку $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Получаем квадратное уравнение $2t^2 + 3t - 14 = 0$, корни которого 2 и -3,5.

Обратная подстановка дает два рациональных уравнения $x + \frac{1}{x} = 2$ и $x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{2}$, откуда и находим корни исходного уравнения.

Ответ: $1; \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}$.



Возвратное уравнение

- Уравнение вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$



где $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$,

называется возвратным уравнением четвертого порядка.

Это уравнение сводится к квадратному с помощью подстановки

$$t = x + \frac{d}{bx}$$



Обратно
в меню



Пример

Пример



- Решить уравнение

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 2x + 4 = 0.$$

- **Решение.** Заметим, что $\left(\frac{4}{1}\right) = \left(\frac{-2}{1}\right)^2$ и, следовательно, данное уравнение есть возвратное уравнение четвертого порядка.

Так как $x = 0$ не является решением уравнения, разделим на x^2 и получим равносильное уравнение

$$x^2 + \frac{4}{x^2} + x - \frac{2}{x} - 6 = 0.$$

Обозначим $t = x - \frac{2}{x}$, тогда $x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4$,

и уравнение примет вид $t^2 + t - 2 = 0$, корни которого $t_1 = -2$ и $t_2 = 1$.

Делаем обратную замену и после умножения на $x \neq 0$

получаем два квадратных уравнения

$$x^2 + 2x - 2 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0,$$

откуда и получим корни исходного уравнения.

Ответ:

$$-1 \pm \sqrt{3}; -1; 2.$$



Уравнения вида

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$$



- Если $a + b = c + d$, то это уравнение сводится к квадратному уравнению. Действительно,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x + c)(x + d) = x^2 + (c + d)x + cd = \\ = x^2 + (a + b)x + cd$$

- Обозначив $x^2 + (a + b)x = t$, получим квадратное уравнение

$$(t + ab)(t + cd) = m$$

Из этого уравнения найдем значения t и, сделав обратную подстановку, закончим решение исходного уравнения.



Обратно
в меню



Пример

Пример



- Решить уравнение

$$(x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 19.$$

- **Решение.** Заметим, что $-2 + 7 = 1 + 4$. Удобно группируя, получим

$$[(x - 2)(x + 7)] \cdot [(x + 1)(x + 4)] = 19$$

или

$$(x^2 + 5x - 14)(x^2 + 5x + 4) = 19.$$

Обозначим $t = x^2 + 5x - 14$, тогда $x^2 + 5x + 4 = t + 18$.

Уравнение примет вид

$$t(t + 18) = 19 \quad \text{или} \quad t^2 + 18t - 19 = 0,$$

откуда $t = -19$ и $t = 1$.

Сделав обратную подстановку, получим

$$x^2 + 5x - 14 = -19 \quad \text{и} \quad x^2 + 5x - 14 = 1.$$

Окончательный ответ: $\frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{-5 \pm \sqrt{85}}{2}$.



Уравнение вида

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$$



- Используя подстановку $t = x + \frac{a+b}{2}$, уравнение можно свести к биквадратному уравнению относительно t .

Действительно, подставив в уравнение $x = t - \frac{a+b}{2}$, получим

$$\left(t + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{a-b}{2}\right)^4 = c. \text{ Обозначим } \frac{a-b}{2} = m \text{ и возведем}$$

каждое слагаемое в 4-ю степень. После приведения подобных получим биквадратное уравнение

$$2t^4 + 12m^2t^2 + (2m^4 - c) = 0.$$



Обратно
в меню

Пример

Пример



- Решить уравнение

$$(x + 3)^4 + (x - 1)^4 = 82.$$

- Решение. Сделаем подстановку $t = x + \frac{3 + (-1)}{2} = x + 1$

Получим следующее уравнение относительно t :

$$(t + 2)^4 + (t - 2)^4 = 82$$

или

$$t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t + 16 + t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 - 82 = 0.$$

Откуда получим биквадратное уравнение

$$t^4 + 24t^2 - 25 = 0,$$

корни которого $t = \pm 1$.

Следовательно, $x + 1 = \pm 1$.

Значит, корни исходного уравнения

$$x = -2 \text{ и } x = 0.$$

Ответ: -2;0.



Обратно
в меню

Уравнение вида $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$



- Решить уравнение $P(x) = 0$.
- Для каждого корня уравнения $P(x) = 0$ сделать проверку: удовлетворяет ли он условию $Q(x) \neq 0$ или нет. Если да, то это — корень заданного уравнения, а если нет, то этот корень является посторонний для заданного уравнения и в ответ его включать не следует.



Пример



- Решите уравнение $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x} = 0$.

- Решение.

Приравняем числитель дроби к нулю и решим полученное уравнение:

$$x^2 - 6x + 8 = 0, \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 4. \end{cases}$$

Значение $x = 2$ не удовлетворяет условию $x^2 - 2x \neq 0$.

Следовательно, уравнение имеет один корень $x = 4$.

Ответ: 4.



Обратно
в меню

Уравнение вида $a \frac{P(x)}{Q(x)} + b \frac{Q(x)}{P(x)} + c = 0$



- Подстановкой $\frac{P(x)}{Q(x)} = t$ это уравнение сводится к виду

$$at + b \frac{1}{t} + c = 0$$

- Умножим на $t \neq 0$ и решим полученное квадратное уравнение относительно t .

Остается сделать обратную подстановку $\frac{P(x)}{Q(x)} = t_0$, где t_0 - корень квадратного уравнения,

и решить полученное уравнение относительно x .



Уравнение вида $a \frac{P(x)}{Q(x)} + b \frac{Q(x)}{P(x)} + c = 0$



- Подстановкой $\frac{P(x)}{Q(x)} = t$ это уравнение сводится к виду

$$at + b \frac{1}{t} + c = 0$$

- Умножим на $t \neq 0$ и решим полученное квадратное уравнение относительно t .

Остается сделать обратную подстановку $\frac{P(x)}{Q(x)} = t_0$, где t_0 - корень квадратного уравнения,

и решить полученное уравнение относительно x .





Пример

- Решите уравнение $\frac{x}{2x+1} + \frac{2x+1}{x} = 2$.

- Решение.**

Сделаем подстановку $\frac{x}{2x+1} = t$ и решим полученное уравнение относительно t :

$$t + \frac{1}{t} = 2, \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0, \Rightarrow t = 1.$$

Обратная подстановка приводит к уравнению

$$\frac{x}{2x+1} = 1, \text{ корень которого } x = -1.$$

Ответ: -1.



Обратно
в меню

Уравнения, состоящие из суммы двух и более дробей



1-й способ

- Перенести все члены уравнения в одну часть.
- Привести уравнение к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ и найти корни полученного уравнения.

2-й способ

- Определить О.Д.З. уравнения.
- Умножить обе части уравнения на общий знаменатель дробей и получить целое уравнение.
- Найти корни полученного уравнения и проверить их соответствие О.Д.З.



Обратно
в меню



Пример

Пример



- Решите уравнение

$$\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x(2-x)}$$

- **Решение.** Найдём О.Д.З. Знаменатели дробей не могут обращаться в нуль. Значит, О.Д.З. уравнения: $x \neq 2$ и $x \neq 0$. Перенесём члены из правой части уравнения в левую и приведём к общему знаменателю.

$$\frac{2 \cdot 2x + x(2-x) - 4 \cdot 2}{2x(2-x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 6x - 8}{2x(2-x)} = 0.$$

Приравняем числитель дроби к нулю: $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Находим корни квадратного уравнения: $x = 4$ и $x = 2$.

Значение $x = 2$ не удовлетворяет О.Д.З.

Следовательно, уравнение имеет один корень $x = 4$.

Ответ: 4.



Обратно
в меню

Уравнения вида

$$\frac{px}{ax^2 + bx + c} + \frac{qx}{ax^2 + dx + c} = r, (r \neq 0)$$



Данное уравнение сводится к квадратному уравнению заменой переменной

$$t = ax + \frac{c}{x}$$



Обратно
в меню



Пример

Пример



- Решить уравнение
$$\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6.$$
- **Решение.** О.Д.З. уравнения есть множество $R \setminus \left\{1; 1\frac{1}{2}\right\}.$

Поскольку $x = 0$ не является решением данного уравнения, перепишем уравнение в виде

$$\frac{2}{2x - 5 + \frac{3}{x}} + \frac{13}{2x + 1 + \frac{3}{x}} = 6$$

(разделим числитель и знаменатель каждой дроби на x).

Обозначим

$$t = 2x + \frac{3}{x} \text{ и уравнение примет вид}$$

$$\frac{2}{t - 5} + \frac{13}{t + 1} = 6.$$



Обратно
в меню



Продолжение решения



О.Д.З. полученного уравнения $t \neq 5$ и $t \neq -1$.

Решая это уравнение, приходим к квадратному уравнению

$$2t^2 - 13t + 11 = 0,$$

корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 11/2$ удовлетворяют О.Д.З..

Делаем обратную подстановку и получаем два рациональных уравнения

$$2x + \frac{3}{x} = 1, \quad 2x + \frac{3}{x} = \frac{11}{2},$$

решив которые находим корни заданного уравнения.

Ответ: $\frac{3}{4}; 2.$



Обратно
в меню

Литература

- Алгебра и математический анализ, 10 Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд
- Алгебра и начала анализа. 8 – 11 кл. Пособие для школ и классов с углубл. изучением математики (серия «Дидактические материалы») Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В.