



# *Математическая логика Формы мышления*

# *Связь логики и вычислительной техники*

**Логика является теоретической основой современных ЭВМ и сложных управляющих систем. Используя методы и средства логической науки, ученые разрабатывают эффективные языки программирования.**

**Особое значение логическая наука стала приобретать в вопросах, касающихся проблемы *искусственного интеллекта*. Именно здесь разработчикам пришлось создать новую область логических исследований – *логический анализ*.**

# *Связь логики и вычислительной техники*

**Внутри машины все числа (а так же информация другого рода: буквы, знаки и др.) представлена в виде двоичных кодов. При выполнении программы арифметическо-логическое устройство (АЛУ) производит различные операции над двоичными числами, выдавая результаты также в виде двоичных чисел. Поэтому АЛУ можно рассматривать как сложный функциональный преобразователь, на вход которого поступают исходные двоичные числа, а на выходе выдаётся новое двоичное число, являющееся той или иной функцией от входных чисел.**

# *Логика.*

**Запишите определение логики:**

- **Опр: Логика – (*logos* (др. гр.) – слово, мысль, понятие, закон, рассуждение) – наука о законах и формах мышления.**

**Основоположник – Аристотель (384-322гг до н.э). Рассмотрел мышление со стороны строения, структуры, т.е. с формальной стороны. Так возникла формальная логика.**

# Логика.

Формальная логика – наука, пытавшаяся найти ответ на вопрос, как мы рассуждаем, изучающая логические операции и правила мышления.

Основоположник математической логики – нем. математик, философ Вильгельм Лейбниц (XVII в.). Первый пытался построить логические исчисления: арифметические и буквенно-алгебраические; высказал мысль о возможности применения двоичной СС в вычислительной математике.

Дальнейшее развитие его идеи получили лишь в XIX в. В трудах математика Джорджа Буля, отца писательницы Э. Войнич. Он вывел для логических построений особую алгебру – алгебру логики.

- **Опр:** Раздел математики, занимающийся исследованием логических функций, называется **алгеброй логики**.

# Вильгельм Готфрид Лейбниц

- **Вильгельм Готфрид Лейбниц** родился в 1646 году в семье философа, профессора университета в городе Лейпциге. Став взрослым и получив университетское образование, Лейбниц поступил на дипломатическую службу. Поездки в Париж и Лондон дали ему возможность ознакомиться с идеями великих математиков Франции и Англии. В 1676 году Лейбниц завязал переписку с Ньютоном. К сожалению, она продолжалась только год и не привела к объединению усилий.

- Научное соперничество и взаимная неприязнь Ньютона и Лейбница породили вопрос, который много лет волновал историков и политиков: кто же все-таки был первооткрывателем? Вероятно, Ньютон придумал основные понятия дифференциального и интегрального исчисления чуть раньше - зато Лейбниц первым опубликовал свои результаты, и к тому же применил более удобную, чем у Ньютона, систему обозначений. Эти обозначения математики используют уже более трёхсот лет.



# Аристотель

**АРИСТОТЕЛЬ** (ок. 384–322 до н.э.), древнегреческий философ и педагог, родился в Стагире в 384 или 383 до н.э., умер в Халкиде в 322 до н.э. Почти двадцать лет Аристотель учился в Академии Платона и, по-видимому, какое-то время там преподавал.



Аристотель регулярно читал своим ученикам и помощникам лекции по самым разнообразным предметам.

Труды Аристотеля можно разделить по следующим группам:

Во-первых, это труды по логике, обычно собирательно именуемые Органон. Сюда входят Категории; Об истолковании; Первая аналитика и Вторая аналитика; Топика.

Во-вторых, Аристотелю принадлежат естественнонаучные труды. В-третьих, мы располагаем сводом текстов под названием Метафизика, представляющим собой цикл лекций. В-четвертых, имеются труды по этике и политике.

Философия Аристотеля. Аристотель нигде не говорит, что логика является частью собственно философии. Он воспринимает ее скорее в качестве методологического инструмента всех наук и философии, а не самостоятельного философского учения. Понятно, что логика должна предшествовать философии.





# Джордж Буль

Родился в семье рабочего. Первые уроки математики получил у отца. Хотя мальчик посещал местную школу, его можно считать самоучкой. В 12 лет знал латынь, затем овладел греческим, французским, немецким и итальянским языками. В 16 лет уже преподавал в деревенской школе, а в 20 открыл собственную школу в Линкольне.



В 1854 году опубликовал работу «Исследование законов мышления, базирующихся на математической логике и теории вероятностей». Работы 1847 и 1854 годов положили начало алгебре логики, или булевой алгебре. Буль первым показал, что существует аналогия между алгебраическими и логическими действиями, так как и те, и другие предполагают лишь два варианта ответов – истина или ложь, нуль или единица. Он придумал систему обозначений и правил, пользуясь которыми можно было закодировать любые высказывания, а затем манипулировать ими как обычными числами. Булева алгебра располагала тремя основными операциями – И, ИЛИ, НЕ, которые позволяли производить сложение, вычитание, умножение, деление и сравнение символов и чисел. Таким образом, Булю удалось подробно описать двоичную систему счисления. В своей работе «Законы мышления» (1854 г.) Буль окончательно сформулировал основы математической логики. Он также попытался сформулировать общий метод вероятностей, с помощью которого из заданной системы вероятных событий можно было бы определить вероятность последующего события, логически связанного с ними.





## *Логика.*

- Главная задача логики - выявить, какие способы рассуждения правильные, а какие нет; описать и исследовать те способы рассуждений, которые являются правильными.

**Пример неправильного рассуждения ...**

# *Основные понятия логики.*

Логика рассматривает три различные формы мышления, в которых осуществляется мышление: понятие, суждение, умозаключение.

Запишите определение:

Понятие – мысль, в которой обобщаются и выделяются предметы некоторого класса по определенным, общим и в совокупности специфическим для них признакам.

# *Основные понятия логики.*

Каждая мысль выражается словами в предложении, которые представляют собой различные суждения (высказывания):

**Запишите определение:**

Суждением (высказыванием) называется всякое утверждение (или всякое предложение), о котором можно судить, истинно оно или ложно. Истинное высказывание обозначается - 1, ложное - 0

«6 - четное число» - это высказывание, т.к. оно истинное.

«Рим - столица Франции» - это тоже высказывание т.к. оно ложное.

# *Основные понятия логики.*

**Запишите определение:**

- **Умозаключение** – форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (предпосылок, условий) выводится новое суждение (заключение, вывод).

# *Вывод умозаключений*

- Путь вывода умозаключений лежит через ...
- Рассуждение – это цепочка взаимосвязанных суждений, фактов и общих положений по определенным правилам вывода.

# *Основные понятия логики.*

- **Примеры:**

1. Параллелограмм – это 4-х угольник, у которого противоположные стороны параллельны.
2. В параллелограмме противоположные углы равны.
3. Если в 4-х угольнике две стороны параллельны и равны, то этот 4-х угольник – параллелограмм.

Назовите к каким формам мышления относится каждое предложение. В умозаключении назовите условие и заключение. Приведите свои примеры понятия, суждения, умозаключения.



## *Основные понятия логики.*

**Но не всякое предложение является высказыванием. Например предложения «ученик десятого класса» и «информатика - интересный предмет» не являются высказываниями.**

**Первое предложение ничего не утверждает об ученике.**

**Второе использует слишком неопределенное понятие «интересный предмет».**

# *Основные понятия логики.*

**Высказываниями не являются:**

**1. Предложения, содержащие переменные,**

так как нам не известно, какое значение принимает переменная и, соответственно, неизвестно будет истинным это предложение или ложным.

**2. Восклицательные и вопросительные предложения,**

это не повествовательные предложения.

**3. Определения.**

мы не можем судить о том истинно такое предложение или ложно, ведь определение – это мы что-то так назвали и расшифровали, что это такое. Кто-то может сказать, что это не так и придумать своё определение.

# Основные понятия логики.

- Предложения типа «в городе А более миллиона жителей», «у него голубые глаза» не являются высказываниями, так как для выяснения их истинности или ложности нужны дополнительные сведения, о каком конкретно городе или человеке идет речь.
- Такие предложения называются *высказывательными формами*.
- Высказывательная форма - это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

# *Основные понятия логики.*

Рассмотрим **примеры**:

1.  $50 \cdot 4$  (не является высказыванием – нельзя сказать 1 или 0)
2.  $50 = 42 + 8$  (высказывание, 1)
3. Я сижу за компьютером (высказывание, 1)
4. В атаку! (не является высказыванием - восклицательное)
5.  $5x - 6 = 9$  (не является высказыванием – есть переменная)
6.  $9 > 12$  (высказывание, 0)
7.  $x < 43$  (не является высказыванием – есть переменная)
8. Здравствуйте (не является высказыванием – нельзя сказать 1 или 0)
9. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат на одной плоскости и не пересекаются (не является высказыванием, так как определение)

## *Задание 1.*

**Какие из предложений являются суждениями и каково их значение истинности?**

**а) «Сижу и смотрю»**

**б) «Верно ли, что  $\pi = 3,1415926\dots$ ?»**

**в) «математическое доказательство»**

**г) « $z+5=45$ »**

**д) « $20+30+40+10=100$ »**

## *Задание 2:*

**Приведите примеры:**

- а) истинного и ложного высказываний;**
- б) предложения, не являющегося высказыванием;**
- с) высказывательной формы.  
(запишите в тетрадь)**

### *Задание 3.*

- Из представленных суждений получите третье в виде умозаключения:  
А = «Сумма цифр трехзначного числа равна 7»  
В = «Цифры десятков и единиц одинаковы»

# Виды суждений

## *Частные –*

выражают  
конкретные  
(частные) факты.

Например:

«Луна – спутник  
Земли»

« $7 - 2 > 3$ »

## *Общие –*

характеризуют свойства  
группы объектов или  
явлений.

Например:

«В любом прямоугольном  
треугольнике есть прямой  
угол»

« $X^2 \geq 0$ »



# *Виды суждений*

## *Простое суждение*

— никакая его часть  
не является  
суждением  
«Париж — столица  
России» (простое,  
ложное)

## *Сложные суждения —*

Образованы из нескольких  
суждений с помощью  
определенных способов  
соединения суждений.

«Если в 4-х угольнике все  
стороны равны, то этот 4-х  
угольник является ромбом»

# *Примеры*

**Рассмотрим примеры простых и сложных высказываний:**

- 1. На улице хорошая погода (простое)**
- 2. Когда я пойду домой, по дороге куплю хлеб (сложное, состоит из двух простых: «я пойду домой» и «я по дороге куплю хлеб»)**
- 3. Если из двух вычесть пять, то получится восемь (простое: «из двух вычесть пять» и «получится восемь» – сами по себе не являются высказываниями)**
- 4. Если  $2+3=5$  - истина, то  $5=2+3$  – тоже истина (сложное: « $2+3=5$  - истина» и « $5=2+3$  – тоже истина»).**

## *Задание 4.*

- Укажите, какие из суждений являются частными, а какие общими, укажите значение истинности для каждого суждения:
  - а)  $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
  - б) «Любой ромб является параллелограммом»
  - в) « $a^3 = a^2$ , если  $a = 1$ »
  - г)  $3^2 + 2^2 = 5^2$
  - д) «Меркурий – спутник Марса»
  - е) «Джордано Бруно – ученик Галилео Галилея»

## *Задание 5.*

- Из сложных суждений выделите простые и обозначьте их буквами:
  - а) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
  - б) Есть мера вещей и существуют известные границы (афоризм Горация)
  - в) Студент запланировал выполнить следующие дела: подготовиться к зачету, побывать на тренировке, почитать книгу.
  - г) Если завтра будет туман, мы не сможем вылететь на соревнования

## *Домашнее задание.*

- § 3.1
- Конспект урока.
- Примеры:
  - а) определения, суждения, умозаключения;
  - б) предложения, не являющегося суждением;
  - в) частного и общего суждения;
  - г) простого и сложного суждения.



# Алгебра суждений

Е.А. Тулаева МОУ СОШ №18 г.  
Пенза

# Повторение

- Что такое логика, ее главная задача.
- Что такое понятие, суждение, умозаключение, рассуждение?
- Какие значения могут принимать суждения?
- Какие суждения называют частными и общими?
- Что такое простое и сложное высказывание?

**Приведите примеры.**

Рассмотрим следующие **примеры** сложных высказываний и связь между простыми высказываниями:

1. Если 12 делится на 6, то делится и на 3 (простые высказывания: «12 делится на 6» и «12 делится на 3»; связь «если, то»).
2. На улице льёт дождь или светит солнце (простые высказывания: «на улице льёт дождь» и «на улице светит солнце»; связь «или»)
3. Дома отключили свет и воду (простые высказывания: «дома отключили свет» и «дома отключили воду»; связь «и»)
4. Два числа равны тогда и только тогда, когда их разность не равна нулю (простые высказывания: «два числа равны» и «разность двух чисел не равна



Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания «не», «и», «или», «если ..., то», «тогда и только тогда» и другие позволяют из уже заданных высказываний строить сложные высказывания. Такие слова и словосочетания называются логическими связками.

Иначе они называются ...

# Основные логические операции

- I. Инверсия.**
- II. Конъюнкция.**
- III. Дизъюнкция.**
- IV. Строгая дизъюнкция.**
- V. Импликация**
- VI. Эквивалентность.**

# ИНВЕРСИЯ

Логическое отрицание

1) *НЕ*

2) *НЕВЕРНО, ЧТО*

Таблица истинности

| A | $\bar{A}$ |
|---|-----------|
| 0 | 1         |
| 1 | 0         |

Обозначение:  $\bar{A}$ , not A.

Пример:

A - Дождя не будет

$\bar{A}$  - Неверно, что  
дождя не будет

## Задание 2:

*Приведите пример высказывания и его отрицания.*

*Определите истинность каждого.*

# КОНЪЮНКЦИЯ

Логическое умножение

**И**

Таблица истинности:

| A | B | A&B |
|---|---|-----|
| 0 | 0 | 0   |
| 0 | 1 | 0   |
| 1 | 0 | 0   |
| 1 | 1 | 1   |

Обозначения: &, and,  
Λ, •.

Пример:

**A - Дождя не будет.**

**B - Небо голубое.**

**A&B - Дождя не  
будет и небо  
голубое.**

## Задание 3:

- а) Приведите примеры двух высказываний и получите составное высказывание используя логическую связку «И».***
- б) Определите истинность или ложность каждого из трех высказываний***

# ДИЗЪЮНКЦИЯ

Логическое сложение

## ИЛИ

Обозначения: OR, V, +

Таблица истинности:

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0          |
| 0 | 1 | 1          |
| 1 | 0 | 1          |
| 1 | 1 | 1          |

Пример:

A - Дождя не будет.

B - Небо голубое.

$A \vee B$  - Дождя не будет или небо голубое.

## Задание 4:

- а) Приведите примеры двух высказываний и получите составное высказывание используя связку «ИЛИ».***
- б) Определите истинность или ложность каждого из трех высказываний.***



# Порядок выполнения логических операций:

1. НЕ.
2. И
3. ИЛИ
4. Если есть скобки, то сначала выполняются действия в скобках

Пример. Составьте таблицу истинности.

- $X = (A \& \bar{B}) \vee (\bar{A} \& B)$

| A | B | $\bar{A}$ | $\bar{B}$ | $A \& \bar{B}$ | $\bar{A} \& B$ | X |
|---|---|-----------|-----------|----------------|----------------|---|
| 0 | 0 | 1         |           |                |                |   |
| 0 | 1 | 1         |           |                |                |   |
| 1 | 0 | 0         |           |                |                |   |
| 1 | 1 | 0         |           |                |                |   |

Пример. Составьте таблицу истинности.

●  $X = (A \& B \vee C) \vee (A \& \overline{C})$

| A | B | C |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|--|--|--|--|--|--|
| 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 1 |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 1 | 0 |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 0 |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 1 |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  |

# Самостоятельно.

- **Составьте свое выражение, состоящее из 2 или 3 высказываний, с использованием всех рассмотренных логических операций.**

# Итог:

- **Вы познакомились с основными понятиями алгебры логики.**
- **Рассмотрели элементарные логические операции.**
- **Разобрали для каждой логической операции таблицу истинности.**

# Домашнее задание

- § 3.2
- № 3.1.



# Алгебра суждений

**Продолжение (2 урок)**

# СТРОГАЯ ДИЗЪЮНКЦИЯ

## ЛИБО, ЛИБО

Обозначения: XOR

Таблица истинности:

| A | B | $A_{xor}B$ |
|---|---|------------|
| 0 | 0 | 1          |
| 0 | 1 | 0          |
| 1 | 0 | 0          |
| 1 | 1 | 1          |

Пример:

A - Дождя не будет.

B - Небо голубое.

A xor B - Либо  
дождя не будет,  
либо небо  
голубое.



## Задание 5:

- а) Приведите примеры двух высказываний и получите составное высказывание используя связку «ЛИБО, ЛИБО».***
- б) Определите истинность или ложность каждого из трех высказываний***

# ИМПЛИКАЦИЯ

Условная связь

**ЕСЛИ, ТО**

Обозначения:  $\rightarrow$

Таблица истинности:

| A | B | $A \rightarrow B$ |
|---|---|-------------------|
| 0 | 0 | 1                 |
| 0 | 1 | 1                 |
| 1 | 0 | 0                 |
| 1 | 1 | 1                 |

Пример:

**A - Дождя не будет.**

**B - Небо голубое.**

**$A \rightarrow B$  - Если дождя не будет, то небо голубое.**

## Задание 6:

- а) Приведите примеры двух высказываний и получите составное высказывание используя связку «ЕСЛИ, ТО...».***
- б) Определите истинность или ложность каждого из трех высказываний***

# ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

- 1) Если и только если
- 2) Тогда и только тогда, когда

Таблица истинности:

| A | B | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|-----------------------|
| 0 | 0 | 1                     |
| 0 | 1 | 0                     |
| 1 | 0 | 0                     |
| 1 | 1 | 1                     |

Обозначения:  $\leftrightarrow$

Пример:

A - Дождя не будет.

B - Небо голубое.

$A \leftrightarrow B$  - Дождя не будет тогда и только тогда, когда небо голубое.

## Задание 7:

- а) Приведите примеры двух высказываний и получите составное высказывание используя связку.***
- б) Определите истинность или ложность каждого из трех высказываний***