

ВВЕДЕНИЕ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНУЮ МАТЕМАТИКУ

Лекция 3

22 сентября 2009

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ
АЛГЕБРА

2. Вычислительная линейная алгебра

Основные результаты

Методы решения СЛАУ

Прямые

Итерационные

2. Вычислительная линейная алгебра

Теорема Пусть наряду с СЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ рассматривается возмущенная система

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}.$$

Если возмущения коэффициентов и число обусловленности матрицы СЛАУ таковы, что $\mu \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \ll 1$, то

$$\mu \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

2. Вычислительная линейная алгебра

То относительная погрешность решения, полученного прямым методом, удовлетворяет оценке

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \frac{\mu}{1 - \mu \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}} \left(\frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} + \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right).$$

2. Вычислительная линейная алгебра

При вычислениях на
идеальном
компьютере

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \mu \frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}.$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Важный частный случай – СЛАУ с трехдиагональной матрицей

$$-b_0 u_0 + c_0 u_1 = d_0,$$

$$a_n u_{n-1} - b_n u_n + c_n u_{n+1} = d_n,$$

$$n = 1, \dots, N-1,$$

$$a_N u_{N-1} - b_N u_N = d_N,$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Система с трехдиагональной матрицей

$$\mathbf{A}'\mathbf{u} = \mathbf{d},$$
$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -b_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & -b_1 & c_1 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_N)^T, \quad \mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_N)$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Модификация алгоритма Гаусса – метод
ПРОГОНКИ
(Thomas algorithm)

2. Вычислительная линейная алгебра

Прогоночное соотношение

$$u_{n-1} = p_n u_n + q_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

Из первого уравнения

$$-b_0 u_0 + c_0 u_1 = d_0, \quad u_0 = \frac{c_0}{d_0} u_1 - \frac{d_0}{b_0},$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

$$p_1 = c_0 / b_0, \quad q_1 = -d_0 / b_0$$

Рекуррентная формула

Подставим $u_{n-1} = p_n u_n + q_n$

в уравнение $a_n u_{n-1} - b_n u_n + c_n u_{n+1} = d_n,$

$$a_n (p_n u_n + q_n) - b_n u_n + c_n u_{n+1} = d_n,$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

$$u_n = \frac{c_n}{b_n - a_n p_n} u_{n+1} + \frac{a_n q_n - d_n}{b_n - a_n p_n}. \quad u_n = p_{n+1} u_{n+1} + q_{n+1}$$

$$p_{n+1} = \frac{c_n}{b_n - a_n p_n}, \quad q_{n+1} = \frac{a_n q_n - d_n}{b_n - a_n p_n}.$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

Обратный ход

$$u_N = q_N$$

$$u_{k-1} = p_k u_k + q_k$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

Устойчивость

Диагональное преобладание
($i = 1, \dots, n$).

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n |a_{ij}|, \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n |a_{ij}|,$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки – устойчивость

Теорема. Если выполнены условия диагонального преобладания

$$|b_n| \geq |a_n| + |c_n|$$

и хотя бы для одной строки матрицы системы имеет место строгое диагональное преобладание. Пусть, кроме того, $0 < p_1 \leq 1$. Тогда алгоритм прогонки устойчив.

2. Вычислительная линейная алгебра

Доказательство теоремы

$$|p_{n+1}| = \left| \frac{c_n}{b_n - a_n p_n} \right| \leq \frac{|c_n|}{|b_n - a_n p_n|} \leq \frac{|c_n|}{\left| |b_n| - |a_n| \right|} \leq 1$$

$$P_n^M = p_n + \delta_n$$

$$P_{n+1}^M = p_{n+1} + \delta_{n+1} = \frac{c_n}{b_n - a_n (p_n + \delta_n)} + \varepsilon_n$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки. Устойчивость

Доказательство теоремы (продолжение)

$$p_{n+1} + \delta_{n+1} = \frac{c_n}{b_n - a_n p_n} + \frac{c_n}{(b_n - a_n p_n)^2} \delta_n + \varepsilon_n$$

$$\delta_{n+1} = \frac{a_n}{c_n} p_{n+1}^2 \delta_n + \varepsilon_n$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

$$q_{n+1} = \frac{a_n q_n - d_n}{b_n - a_n p_n}.$$

$$Q_n^M = q_n + \delta q_n$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

$$Q_{n+1}^M = q_{n+1} + \delta q_{n+1} = \frac{a_n(q_n + \delta q_n) - d_n}{b_n - a_n(p_n + \delta_n)} + \varepsilon q_n$$

$$\delta q_{n+1} = \frac{a_n}{b_n - a_n p_n} \delta q_n + \frac{q_n p_n}{c_n} \delta_n + \varepsilon q_n$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки
(обратный ход)

$$u_{k-1} = p_k u_k + q_k$$

$$\delta u_{k-1} = u_k \delta_k + p_k \delta u_k + \delta q_k + u_{k-1} \varepsilon_{k-1}$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод простой итерации

$$\tau Au = \tau f,$$

$$u - u + \tau Au = \tau f,$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод простой итерации

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} - \tau \mathbf{A} \mathbf{u} + \tau \mathbf{f},$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = (\mathbf{E} - \tau \mathbf{A}) \mathbf{u}^k + \tau \mathbf{f},$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод простой итерации – каноническая форма записи

$$\frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\tau_{k+1}} + \mathbf{A}\mathbf{u}^k = \mathbf{f}.$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Неявные
итерационные
методы

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{f},$$

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\tau_{k+1}} + \mathbf{A} \mathbf{u}^k = \mathbf{f}.$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Невязка

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}^k$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод простых итераций

$$\mathbf{u}^{k+1} = (\mathbf{E} - \tau \mathbf{A})\mathbf{u}^k + \tau \mathbf{f},$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \tau \mathbf{r}^k,$$

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \tau \mathbf{A} \mathbf{r}^k = (\mathbf{E} - \tau \mathbf{A})\mathbf{r}^k,$$

2. Вычислительная линейная алгебра

- Метод простой итерации

$$\mathbf{r}^{k+1} = (\mathbf{E} - \tau \mathbf{A})\mathbf{r}^k = \mathbf{B}\mathbf{r}^k,$$

$$\|\mathbf{r}^{k+1}\| = \|\mathbf{B}\mathbf{r}^k\| \leq \|\mathbf{B}\| \cdot \|\mathbf{r}^k\|,$$

2. Вычислительная линейная алгебра

- Метод простой итерации
- Теорема (достаточное условие сходимости метода простой итерации).
- Итерационный процесс сходится к решению **U** СЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{F}$
- со скоростью геометрической прогрессии при выполнении условия

$$\|\mathbf{B}\| \leq q < 1.$$

2. Вычислительная линейная алгебра

- Теорема (критерий сходимости метода простой итерации) (без доказательства).
- Пусть СЛАУ имеет единственное решение. Тогда для сходимости метода простых итераций необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы \mathbf{B} по абсолютной величине были меньше единицы.

2. Вычислительная линейная алгебра

- Спасибо за внимание!

2. Вычислительная линейная алгебра

- ⦿ Вопросы?

