Нестандартно мыслим.

Применение теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом при доказательстве неравенств.

Применение теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом при доказательстве неравенств.

Цели и задачи:

- Научиться доказывать неравенства различными (рациональными) способами.

Свойства числовых неравенств:

1) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;

2) если $a > b$, a, c – любые числа, то $a + c > b + c$;

если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$, а если $c < 0$, то $ac < bc$

№ 3.13 (4 балла).

Сравнить значение выражений:

$\sqrt{101} + \sqrt{102}$ и $\sqrt{99} + \sqrt{104}$.

Так как обе суммы положительны, то сравним квадраты этих сумм

$(\sqrt{101} + \sqrt{102})^2$ и $(\sqrt{99} + \sqrt{104})^2$

$101 + 2\sqrt{101 \cdot 102} + 102$ и $99 + 2\sqrt{99 \cdot 104} + 104$

$203 + 2\sqrt{101 \cdot 102}$ и $2\sqrt{99 \cdot 104} + 203$

$203 + 2\sqrt{(100+1) \cdot 102}$ и $2\sqrt{(100-1) \cdot 104} + 203$

$\sqrt{10200 + 102}$ и $\sqrt{10400 - 104}$

$\sqrt{10302} > \sqrt{10296}$, значит

$203 + 2\sqrt{10302} > 203 + 2\sqrt{10296}$, следовательно

$\sqrt{101} + \sqrt{102} > \sqrt{99} + \sqrt{104}$.

Ответ: $\sqrt{101} + \sqrt{102} > \sqrt{99} + \sqrt{104}$.

Доказать, что если $ab > 0$, $ac > 0$, то имеет место неравенство:

$$\frac{2a^2 + 4b^2 + c^2}{4ab + 2ac} \geq 1.$$

Так как $ab > 0$, $ac > 0$, то $4ab + 2ac > 0$, тогда данное неравенство примет вид:

$$2a^2 + 4b^2 + c^2 \geq 4ab + 2ac,$$

$$2a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ac - 2ac \geq 0,$$

$$(a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) \geq 0,$$

$$(a - 2b)^2 + (a - c)^2 \geq 0,$$

что очевидно, так как $(a - 2b)^2 \geq 0$ и $(a - c)^2 \geq 0$, значит

$$\frac{2a^2 + 4b^2 + c^2}{4ab + 2ac} \geq 1$$

Равенство достигается при $a = c = 2b$.

Неравенство доказано.

Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

№ 4 из § 24

Продавец взвешивает яблоки на рычажных весах. Покупатель купил 1 кг яблок, а затем купил еще 1 кг яблок, попросив продавца поменять местами при втором взвешивании гирю и яблоки. Кто понес убытки, если весы не отрегулированы?

Решение:

Пусть плечи весов равны a и b. При первом взвешивании покупатель приобрел x килограммов яблок. Из курса физики известно, что $x \cdot b = 1 \cdot a$, откуда $x = \frac{a}{b}$. При втором взвешивании покупатель приобрел y килограммов яблок. Из условия равновесия $y \cdot a = 1 \cdot b$ находим $y = \frac{b}{a}$.

Итак, было куплено $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ килограммов яблок. Используя неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$,

получаем $\dfrac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}}$,

откуда $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Ответ: убыток понес продавец.

- Готовясь с учащимися к олимпиаде, я решала с ними множество задач, среди которых были задачи на доказательство неравенств. Одни из них мы решали традиционным методом оценки разности левой и правой частей неравенства, другие таким способом нам не удавалось решать, и тогда на помощь приходила теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Приведу примеры некоторых из них:

Доказать, что при $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ имеют место следующие неравенства:

1) $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\geq 2;$

2) $\sqrt{ab}\geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}};$

3) $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geq \sqrt{a}+\sqrt{b};$

4) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4;$

5) $(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8abc;$

6) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3;$

7) $a^4+b^4+c^4+d^4\geq 4abcd;$

8) $\frac{(a+b+c)^2}{3}\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}.$

Что касается доказательства первых четырех неравенств, то они доказываются элементарно: находим разность левой и правой части, преобразовываем ее так, что становится очевидной ее положительность

$a^2 + b^2 \geq 2ab$, так как $(a-b)^2 \geq 0$,

$a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ac)$, так как $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$.

Например, докажем неравенство $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

$$(a+b)\frac{a+b}{ab} - 4 = \frac{(a+b)^2}{ab} - 4 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{ab} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$$

при $a > 0$, $b > 0$, значит данное неравенство $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$. Доказано.

Для доказательства неравенств 5-8 приходится применять теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом положительных чисел. Докажем, например, неравенство:

$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$ при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

На основании теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом для положительных чисел a и b, b и c, a и c запишем неравенства:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab};$$
$$b+c \geq 2\sqrt{bc};$$
$$a+c \geq 2\sqrt{ac}.$$

Так как левые и правые части этих неравенств положительны, то эти неравенства можно почленно перемножить, в результате чего получим:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ac};$$
$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8\sqrt{a^2 b^2 c^2};$$
$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc.$$

Доказано.

Доказем также неравенство:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3.$$

Запишем на основании указанной теоремы неравенства для пар чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$; $\frac{c}{a}$ и 1:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}=2\sqrt{\frac{a}{c}};$$

$$\frac{c}{a}+1\geq 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot 1}=2\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Сложив неравенства почленно, получим

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{a}}=2\left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right).$$

Запишем теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел $\sqrt{\frac{a}{c}}$ и $\sqrt{\frac{c}{a}}$:

$$\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}}=2.$$

Тогда неравенство может быть записано в следующем виде:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\geq 4.$$

В итоге $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3.$

Доказано.

Заключение:

- В своей работе я привела лишь несколько примеров, иллюстрирующих возможности теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух или более положительных чисел. С ее помощью можно не только легко доказывать сложные, на первый взгляд, неравенства, но и решать геометрические задачи, а также алгебраические уравнения.

ЛИТЕРАТУРА.

- Алимов Ш. А., Колягин Ю. М. и др. Алгебра 8. М.: Просвещение, 2007.
- Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика. М.: Педагогика, 1985.
- Далингер В.А. «Как сделать теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом средством познания» Ж. «Математика в школе» № 9, 2003.
- Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова и др. Алгебра: Сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе. – 2 – е издание. – М.: Просвещение, 2007.
- Сивашинский И. Х. «Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям». М.: Наука, 1971.