

# Оглавление

- Квадратное уравнение и его корни.
- Неполные квадратные уравнения.
- Приведенное квадратное уравнение.
- Теорема Виета.
- Уравнения, сводящиеся к квадратным.
- Решение задач с помощью квадратных уравнений.
- Задания для самостоятельной работы.



**Квадратным уравнением** называется уравнение  $ax^2+bx+c=0$ , где  $a, b, c$  – заданные числа,  $a \neq 0$ ,  $x$  – неизвестное.

Коэффициенты  $a, b, c$  квадратного уравнения обычно называют так:  $a$  – первым или старшим коэффициентом,  $b$  – вторым коэффициентом,  $c$  – свободным членом.

Например, в уравнении  $3x^2-x+2=0$  старший (первый) коэффициент  $a=3$ , второй коэффициент  $b=-1$ , а свободный член  $c=2$ .

Решение многих задач математики, физики, техники сводится к решению квадратных уравнений:

$2x^2+x-1=0$ ,  $x^2-25=0$ ,  $4x^2=0$ ,  $5t^2-10t+3=0$ .

При решении многих задач получаются уравнения, которые с помощью алгебраических преобразований сводятся к квадратным.

Например, уравнение  $2x^2+3x=x^2+2x+2$  после перенесения всех его членов в левую часть и приведения подобных членов сводится к квадратному уравнению  $x^2+x-2=0$ .



Рассмотрим уравнение общего вида:  $ax^2+bx+c=0$ ,  
где  $a \neq 0$ .

Корни уравнения находят по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Выражение  $D = b^2 - 4ac$

называют *дискриминантом* квадратного уравнения.

*Если  $D < 0$ , то уравнение не имеет действительных корней; если  $D = 0$ , то уравнение имеет один действительный корень; если  $D > 0$ , то уравнение имеет два действительных корня.*

В случае, когда  $D = 0$ , иногда говорят, что квадратное уравнение имеет два одинаковых корня.





## Неполные квадратные уравнения.

Если в квадратном уравнении  $ax^2+bx+c=0$  второй коэффициент  $b$  или свободный член  $c$  равны нулю, то квадратное уравнение называется **НЕПОЛНЫМ**.

Неполное квадратное уравнение может иметь один из следующих видов:

$$\begin{aligned} ax^2 &= 0 \\ ax^2 + c &= 0, c \neq 0 \\ ax^2 + bx &= 0, b \neq 0. \end{aligned}$$

Неполные уравнения выделяют потому, что для отыскания их корней можно не пользоваться формулой корней квадратного уравнения - проще решить уравнение методом разложения его левой части на множители.



Квадратное уравнение вида  $x^2+px+q=0$  называется приведенным. В этом уравнении старший коэффициент равен единице:  $a=1$ .



Корни приведенного квадратного уравнения находятся по формуле:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Этой формулой удобно пользоваться, когда  $p$  – четное число.

Пример: Решить уравнение  $x^2-14x-15=0$ . По формуле находим:

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm 8$$

Ответ:  $x_1=15$ ,  $x_2=-1$ .



Франсуа Виет?



## Теорема Виета.

Если приведенное квадратное уравнение  $x^2+px+q=0$  имеет действительные корни, то их сумма равна  $-p$ , а произведение равно  $q$ , то есть  $x_1+x_2=-p$ ,  $x_1 x_2 = q$  (сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).

Исследование связи между корнями и коэффициентами квадратного уравнения.

уравнение	a	p	q	$x_1$	$x_2$	$x_1+x_2$	$x_1x_2$
$x^2-x-6=0$	1	-1	-6	3	-2	1	-6
$x^2+6x+5=0$	1	6	5	-1	-5	-6	5
$x^2-6x+8=0$	1	-6	8	4	2	6	8
$x^2+4x-12=0$	1	4	-12	2	-6	-4	-12





### Утверждение №1:

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения  
 $x^2+px+q=0$ .

Тогда числа  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $p$ ,  $q$  связаны равенствами:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q$$

### Утверждение № 2:

Пусть числа  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $p$ ,  $q$  связаны равенствами  $x_1+x_2 = -p$ ,  $x_1 x_2 = q$ .

Тогда  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения  
 $x^2+px+q=0$

Следствие:  $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$ .

Ситуации, в которых может использоваться *теорема Виета*.

- Проверка правильности найденных корней.
- Определение знаков корней квадратного уравнения.
- Устное нахождение целых корней приведенного квадратного уравнения.
- Составление квадратных уравнений с заданными корнями.
- Разложение квадратного трехчлена на множители.



## Биквадратные уравнения

Биквадратным называется уравнение вида  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , где  $a \neq 0$ . Биквадратное уравнение решается методом введения новой переменной: положив  $x^2 = t$ , получим квадратное уравнение

$$at^2 + bt + c = 0$$

Пример: Решить уравнение

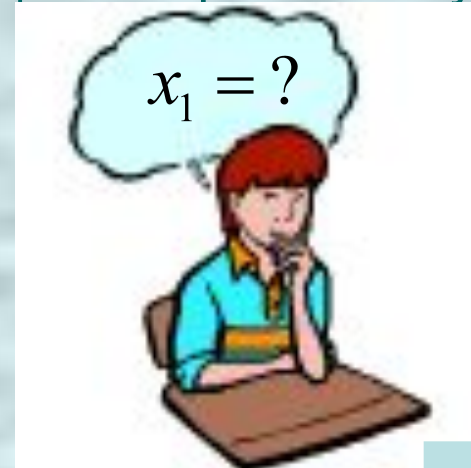
$$x^4 + 4x^2 - 21 = 0$$

Положив  $x^2 = t$ , получим квадратное уравнение  $t^2 + 4t - 21 = 0$ , откуда находим  $t_1 = -7$ ,  $t_2 = 3$ . Теперь задача сводится к решению уравнений  $x^2 = -7$ ,  $x^2 = 3$ .

Первое уравнение не имеет действительных корней, из второго находим:

$$x_1 = -\sqrt{3}; x_2 = \sqrt{3}$$

которые являются корнями заданного биквадратного уравнения.





## Решение задач с помощью квадратных уравнений

### Задача 1:

Автобус отправился от автовокзала в аэропорт, находящийся на расстоянии 40 км. Через 10 минут вслед за автобусом выехал пассажир на такси. Скорость такси на 20 км/ч больше скорости автобуса. Найти скорость такси и автобуса, если в аэропорт они прибыли одновременно.

	<b>Скорость <math>V</math> (км/ч)</b>	<b>Время <math>t</math> (ч)</b>	<b>Путь <math>S</math> (км)</b>
Автобус	$x$	$\frac{40}{x}$	40
Такси	$x+20$	$\frac{40}{x+20}$	40

На 10 мин

$$10 \text{ мин} = \frac{1}{6} \text{ ч}$$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+20} = \frac{1}{6}$$



Умножим обе части уравнения на  $6x(x+20)$ , получим:

$$40 \cdot 6 \cdot (x + 20) - 40 \cdot 6x = x(x + 20)$$

$$240x + 4800 - 240x = x^2 + 20x$$

$$x^2 + 20x - 4800 = 0$$



Корни этого уравнения:  $x_1 = 60, x_2 = -80$ .

При этих значениях  $x$  знаменатели дробей, входящих в уравнение, не равны 0, поэтому  $x_1 = 60, x_2 = -80$  являются корнями уравнения. Так как скорость автобуса положительна, то условию задачи удовлетворяет только один корень:  $x=60$ . Поэтому скорость такси 80 км/ч.



Ответ: Скорость автобуса 60 км/ч, скорость такси 80 км/ч.



## Задача 2:

На перепечатку рукописи первая машинистка тратит на 3 ч меньше, чем вторая. Работая одновременно, они закончили перепечатку всей рукописи за 6ч 40 мин. Сколько времени потребовалось бы каждой из них на перепечатку всей рукописи?

	<i>Количество работы в час</i>	<i>Время t (ч)</i>	<i>Объем работы</i>
Первая машинистка	$\frac{1}{x}$	$x$	1
Вторая машинистка	$\frac{1}{x+3}$	$x+3$	1

Вместе  
за 6ч 40мин

$$6 \text{ ч } 40 \text{ мин} = 6 \frac{2}{3} \text{ ч}$$

Составим и решим уравнение:

$$6 \frac{2}{3} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} \right) = 1$$



Это уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20}$$

Умножая обе части уравнения на  $20x(x+3)$ , получаем:

$$20(x+3) + 20x = 3x(x+3)$$

$$40x + 60 = 3x^2 + 9x$$

$$3x^2 - 31x - 60 = 0$$

Корни этого уравнения:  $x_1 = 12, x_2 = -\frac{5}{3}$ .

При этих значениях  $x$  знаменатели дробей, входящих в уравнение, не равны 0, поэтому  $x_1 = 12, x_2 = -\frac{5}{3}$  - корни уравнения. Так как время положительно, то  $x=12$ ч. Следовательно



Первая машинистка затрачивает на работу 12 ч, вторая –  $12 \text{ ч} + 3 \text{ ч} = 15 \text{ ч}$

Ответ: 12 ч и 15 ч.



Задания для самостоятельной работы:

1.  $2x^2 + 3x + 1 = 0$       4.  $x^2 - 7x + 12 = 0$

2.  $4x^2 - 11x + 6 = 0$       5.  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

3.  $x^2 + 2x - 15 = 0$       6.  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$



7. Найти два последовательных натуральных числа, произведение которых равно 210.





*Желаем удачи!!!*



## Франсуа Виет

Франсуа Виет родился в 1540 году во Франции. Отец Виета был прокурором. Сын выбрал профессию отца и стал юристом, окончив университет в Пуату. В 1563 году он оставляет юриспруденцию и становится учителем в знатной семье. Именно преподавание побудило в молодом юристе интерес к математике.



Виет переезжает в Париж, где легче узнать о достижениях ведущих математиков Европы. С 1571 года Виет занимает важные государственные посты, но в 1584 году он был отстранен и выслан из Парижа. Теперь он имел возможность всерьез заняться математикой.

В 1591 году он издает трактат «Введение в аналитическое искусство», где показал, что, оперируя с символами, можно получить результат, применимый к любым соответствующим величинам. Знаменитая теорема была обнародована в том же году.

Громкую славу получил при Генрихе III во время Франко-Испанской войны. В течение двух недель, просидев за работой дни и ночи, он нашел ключ к Испанскому шифру. Умер в Париже в 1603 году, есть подозрения, что он был убит.

