

Оглавление

- Квадратное уравнение и его корни.
- Неполные квадратные уравнения.
- Приведенное квадратное уравнение.
- Теорема Виета.
- Уравнения, сводящиеся к квадратным.
- Решение задач с помощью квадратных уравнений.
- Задания для самостоятельной работы.



Квадратным уравнением называется уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c – заданные числа, $a \neq 0$, x – неизвестное.

Коэффициенты a, b, c квадратного уравнения обычно называют так: a – первым или старшим коэффициентом, b – вторым коэффициентом, c – свободным членом.

Например, в уравнении $3x^2-x+2=0$ старший (первый) коэффициент $a=3$, второй коэффициент $b=-1$, а свободный член $c=2$.

Решение многих задач математики, физики, техники сводится к решению квадратных уравнений:

$2x^2+x-1=0$, $x^2-25=0$, $4x^2=0$, $5t^2-10t+3=0$.

При решении многих задач получаются уравнения, которые с помощью алгебраических преобразований сводятся к квадратным.

Например, уравнение $2x^2+3x=x^2+2x+2$ после перенесения всех его членов в левую часть и приведения подобных членов сводится к квадратному уравнению $x^2+x-2=0$.



Рассмотрим уравнение общего вида: $ax^2+bx+c=0$,
где $a \neq 0$.

Корни уравнения находят по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$

называют *дискриминантом* квадратного уравнения.

Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней; если $D = 0$, то уравнение имеет один действительный корень; если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня.

В случае, когда $D = 0$, иногда говорят, что квадратное уравнение имеет два одинаковых корня.





Неполные квадратные уравнения.

Если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ второй коэффициент b или свободный член c равны нулю, то квадратное уравнение называется **НЕПОЛНЫМ**.

Неполное квадратное уравнение может иметь один из следующих видов:

$$\begin{aligned} ax^2 &= 0 \\ ax^2 + c &= 0, c \neq 0 \\ ax^2 + bx &= 0, b \neq 0. \end{aligned}$$

Неполные уравнения выделяют потому, что для отыскания их корней можно не пользоваться формулой корней квадратного уравнения - проще решить уравнение методом разложения его левой части на множители.



Квадратное уравнение вида $x^2+px+q=0$ называется приведенным. В этом уравнении старший коэффициент равен единице: $a=1$.



Корни приведенного квадратного уравнения находятся по формуле:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Этой формулой удобно пользоваться, когда p – четное число.

Пример: Решить уравнение $x^2-14x-15=0$. По формуле находим:

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm 8$$

Ответ: $x_1=15$, $x_2=-1$.



Франсуа Виет?



Теорема Виета.

Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q , то есть $x_1+x_2=-p$, $x_1 x_2 = q$ (сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).

Исследование связи между корнями и коэффициентами квадратного уравнения.

уравнение	a	p	q	x_1	x_2	x_1+x_2	x_1x_2
$x^2-x-6=0$	1	-1	-6	3	-2	1	-6
$x^2+6x+5=0$	1	6	5	-1	-5	-6	5
$x^2-6x+8=0$	1	-6	8	4	2	6	8
$x^2+4x-12=0$	1	4	-12	2	-6	-4	-12





Утверждение №1:

Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения
 $x^2+px+q=0$.

Тогда числа x_1 , x_2 , p , q связаны равенствами:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q$$

Утверждение № 2:

Пусть числа x_1 , x_2 , p , q связаны равенствами $x_1+x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

Тогда x_1 и x_2 – корни уравнения
 $x^2+px+q=0$

Следствие: $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$.

Ситуации, в которых может использоваться *теорема Виета*.

- Проверка правильности найденных корней.
- Определение знаков корней квадратного уравнения.
- Устное нахождение целых корней приведенного квадратного уравнения.
- Составление квадратных уравнений с заданными корнями.
- Разложение квадратного трехчлена на множители.



Биквадратные уравнения

Биквадратным называется уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$. Биквадратное уравнение решается методом введения новой переменной: положив $x^2 = t$, получим квадратное уравнение

$$at^2 + bt + c = 0$$

Пример: Решить уравнение

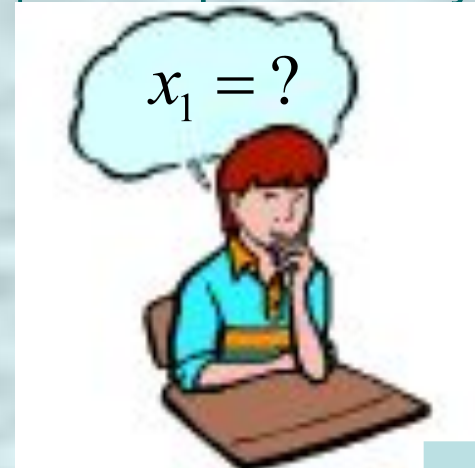
$$x^4 + 4x^2 - 21 = 0$$

Положив $x^2 = t$, получим квадратное уравнение $t^2 + 4t - 21 = 0$, откуда находим $t_1 = -7$, $t_2 = 3$. Теперь задача сводится к решению уравнений $x^2 = -7$, $x^2 = 3$.

Первое уравнение не имеет действительных корней, из второго находим:

$$x_1 = -\sqrt{3}; x_2 = \sqrt{3}$$

которые являются корнями заданного биквадратного уравнения.



Решение задач с помощью квадратных уравнений

Задача 1:

Автобус отправился от автовокзала в аэропорт, находящийся на расстоянии 40 км. Через 10 минут вслед за автобусом выехал пассажир на такси. Скорость такси на 20 км/ч больше скорости автобуса. Найти скорость такси и автобуса, если в аэропорт они прибыли одновременно.

	Скорость V (км/ч)	Время t (ч)	Путь S (км)
Автобус	x	$\frac{40}{x}$	40
Такси	$x+20$	$\frac{40}{x+20}$	40

На 10 мин

$$10 \text{ мин} = \frac{1}{6} \text{ ч}$$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+20} = \frac{1}{6}$$



Умножим обе части уравнения на $6x(x+20)$, получим:

$$40 \cdot 6 \cdot (x + 20) - 40 \cdot 6x = x(x + 20)$$

$$240x + 4800 - 240x = x^2 + 20x$$

$$x^2 + 20x - 4800 = 0$$



Корни этого уравнения: $x_1 = 60, x_2 = -80$.

При этих значениях x знаменатели дробей, входящих в уравнение, не равны 0, поэтому $x_1 = 60, x_2 = -80$ являются корнями уравнения. Так как скорость автобуса положительна, то условию задачи удовлетворяет только один корень: $x=60$. Поэтому скорость такси 80 км/ч.



Ответ: Скорость автобуса 60 км/ч, скорость такси 80 км/ч.



Задача 2:

На перепечатку рукописи первая машинистка тратит на 3 ч меньше, чем вторая. Работая одновременно, они закончили перепечатку всей рукописи за 6ч 40 мин. Сколько времени потребовалось бы каждой из них на перепечатку всей рукописи?

	<i>Количество работы в час</i>	<i>Время t (ч)</i>	<i>Объем работы</i>
Первая машинистка	$\frac{1}{x}$	x	1
Вторая машинистка	$\frac{1}{x+3}$	$x+3$	1

Вместе
за 6ч 40мин

$$6 \text{ ч } 40 \text{ мин} = 6 \frac{2}{3} \text{ ч}$$

Составим и решим уравнение:

$$6 \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} \right) = 1$$



Это уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20}$$

Умножая обе части уравнения на $20x(x+3)$, получаем:

$$20(x+3) + 20x = 3x(x+3)$$

$$40x + 60 = 3x^2 + 9x$$

$$3x^2 - 31x - 60 = 0$$

Корни этого уравнения: $x_1 = 12, x_2 = -\frac{5}{3}$.

При этих значениях x знаменатели дробей, входящих в уравнение, не равны 0, поэтому $x_1 = 12, x_2 = -\frac{5}{3}$ - корни уравнения. Так как время положительно, то $x=12$ ч. Следовательно



Первая машинистка затрачивает на работу 12 ч, вторая – $12 \text{ ч} + 3 \text{ ч} = 15 \text{ ч}$

Ответ: 12 ч и 15 ч.



Задания для самостоятельной работы:

1. $2x^2 + 3x + 1 = 0$ 4. $x^2 - 7x + 12 = 0$

2. $4x^2 - 11x + 6 = 0$ 5. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

3. $x^2 + 2x - 15 = 0$ 6. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$



7. Найти два последовательных натуральных числа, произведение которых равно 210.





Желаем удачи!!!



Франсуа Виет

Франсуа Виет родился в 1540 году во Франции. Отец Виета был прокурором. Сын выбрал профессию отца и стал юристом, окончив университет в Пуату. В 1563 году он оставляет юриспруденцию и становится учителем в знатной семье. Именно преподавание побудило в молодом юристе интерес к математике.



Виет переезжает в Париж, где легче узнать о достижениях ведущих математиков Европы. С 1571 года Виет занимает важные государственные посты, но в 1584 году он был отстранен и выслан из Парижа. Теперь он имел возможность всерьез заняться математикой.

В 1591 году он издает трактат «Введение в аналитическое искусство», где показал, что, оперируя с символами, можно получить результат, применимый к любым соответствующим величинам. Знаменитая теорема была обнародована в том же году.

Громкую славу получил при Генрихе III во время Франко-Испанской войны. В течение двух недель, просидев за работой дни и ночи, он нашел ключ к Испанскому шифру. Умер в Париже в 1603 году, есть подозрения, что он был убит.

