

## Решение простейших тригонометрических неравенств.

Алгебра и начала анализа, 10 класс.

Под простейшими тригонометрическими неравенствами понимают неравенства вида:

$$\sin t \leq a$$

$$\cos t \leq a$$

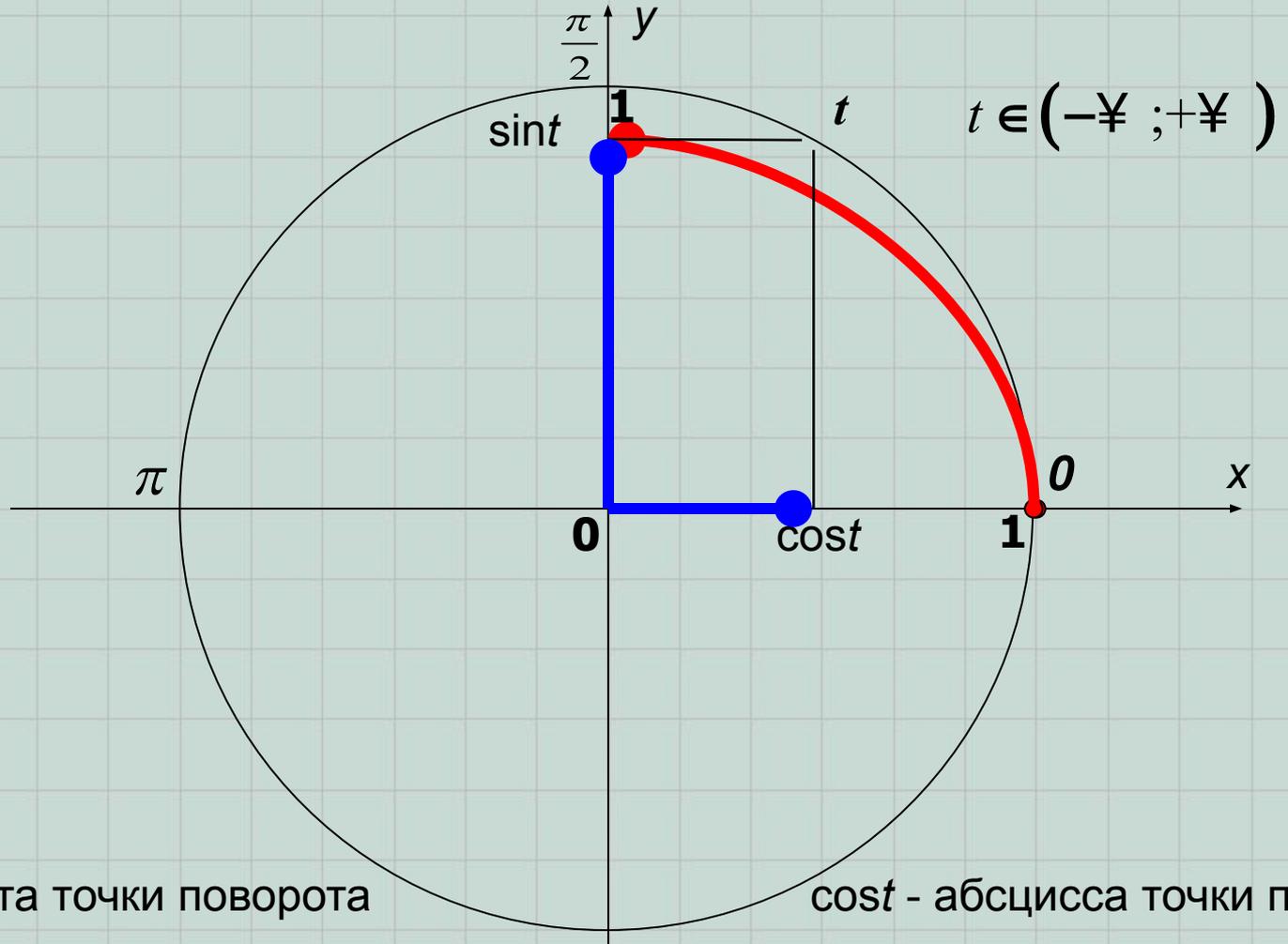
$$\operatorname{tg} t \leq a$$

$$\operatorname{ctg} t \leq a$$

,где  $t$  –  
выражение с  
переменной,  
 $a \in \mathbb{R}$ .

Под знаком “ $\square$ ” следует понимать любой из четырёх знаков неравенств:  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ .

Для решения тригонометрических неравенств необходимо уметь работать с тригонометрическим кругом:



$\sin t$  - ордината точки поворота

$\cos t$  - абсцисса точки поворота

(под «точкой поворота» следует понимать – «точку единичной тригонометрической окружности, полученной при повороте на  $t$  радиан от начала отсчета»)

Неравенство  $\sin t > a$ , при  $a \leq 1$   
не имеет решений.

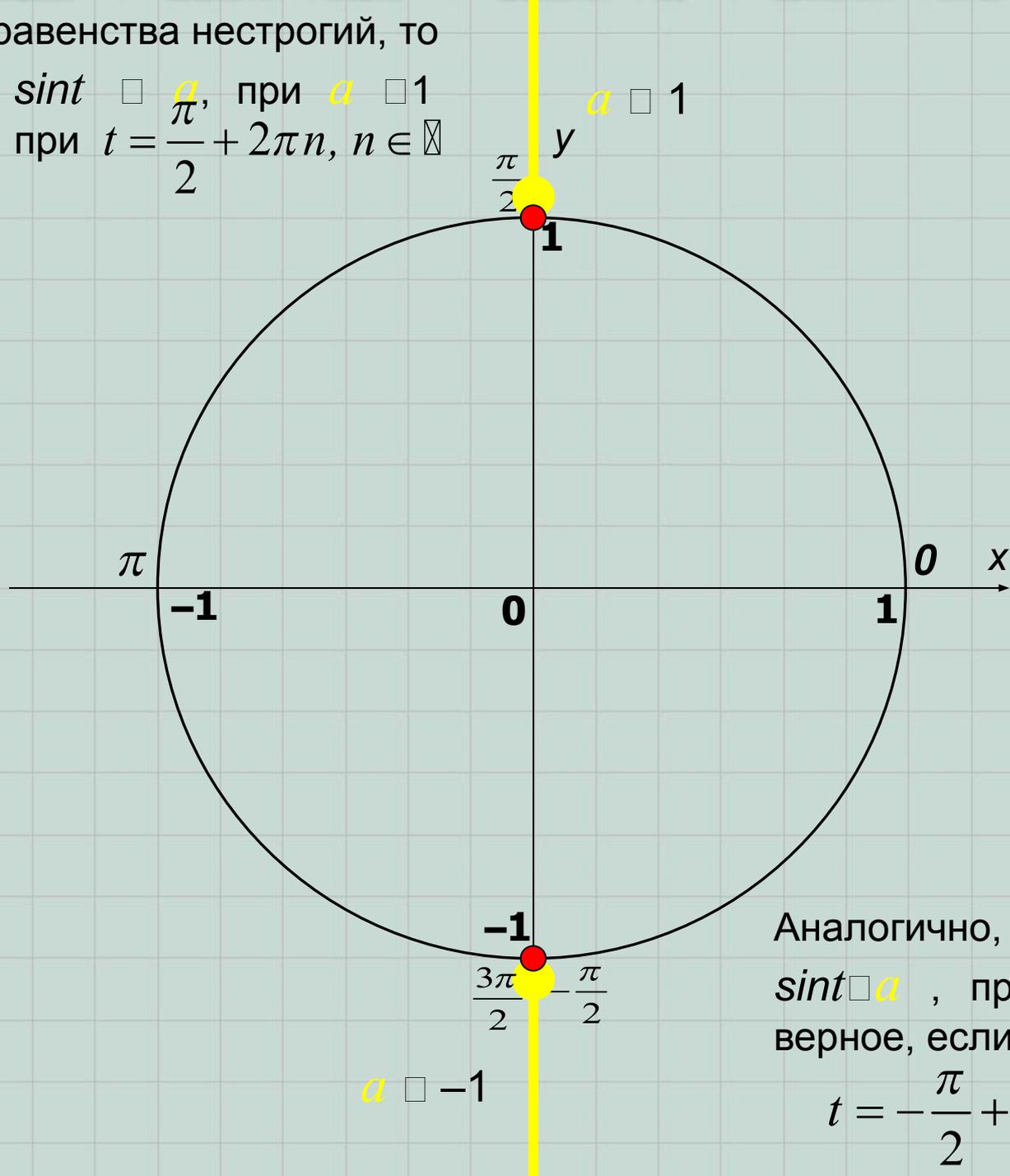
На окружности не  
существует точек поворота,  
ординаты которых больше  
единицы.



Аналогично, неравенство  
 $\sin t < a$ , при  $a \geq -1$  также не  
имеет решений.

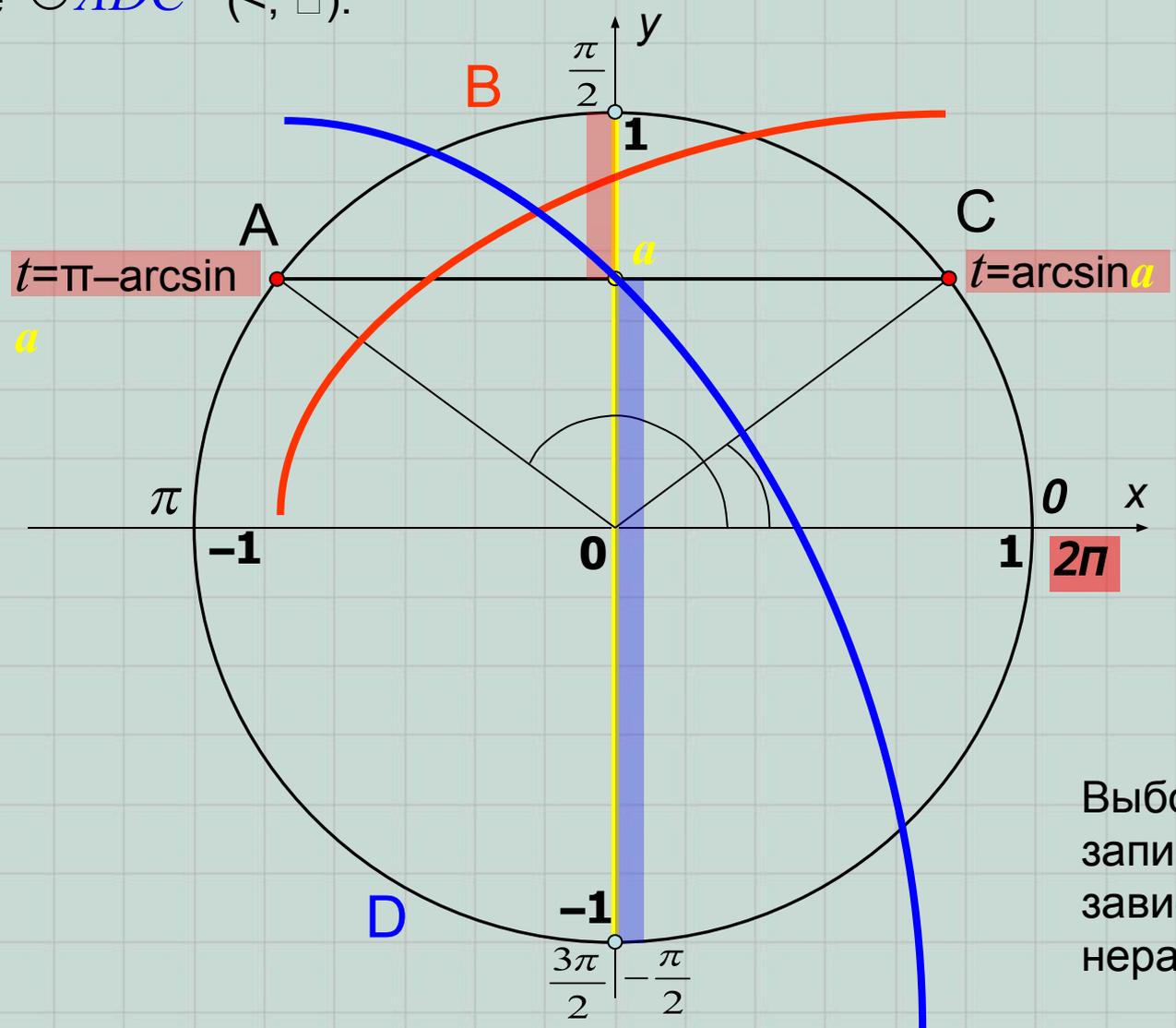
На окружности не  
существует точек поворота,  
ординаты которых меньше  
минус единицы.

Если знак неравенства нестрогий, то  
 неравенство  $\sin t \leq a$ , при  $a \leq 1$   
 выполняется, при  $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



Аналогично, неравенство  
 $\sin t \leq a$ , при  $a \leq -1$  будет  
 верное, если  
 $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Если  $a \in (-1; 1)$ , то неравенство  $\sin t \square a$  выполняется либо на дуге  $\cup CBA$  ( $>$ ,  $\square$ ), либо на дуге  $\cup ADC$  ( $<$ ,  $\square$ ).

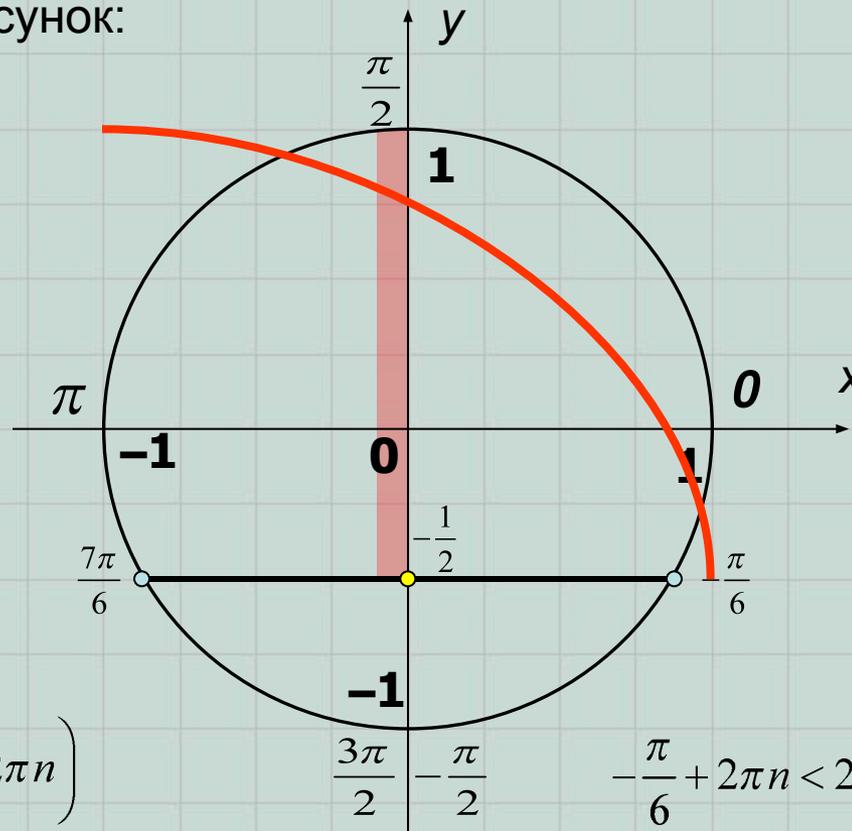


Выбор скобок в записи ответа зависит от знака неравенства

Дугу  $\cup CBA$  можно записать в виде промежутка  $[(\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n)]$ ,  
 а дугу  $\cup ADC$  – в виде промежутка  $[(\pi - \arcsin a + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi + 2\pi k)]$ ,  $k \in \square$ ,

**Пример.** Решите неравенство  $\sin(2x-3) > -0,5$ .

**Решение.** Выполняем рисунок:



$$(2x-3) \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$$

$$2x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n + 3; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n + 3\right)$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{3}{2} + \pi n; \frac{7\pi}{12} + \frac{3}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2}$$

или

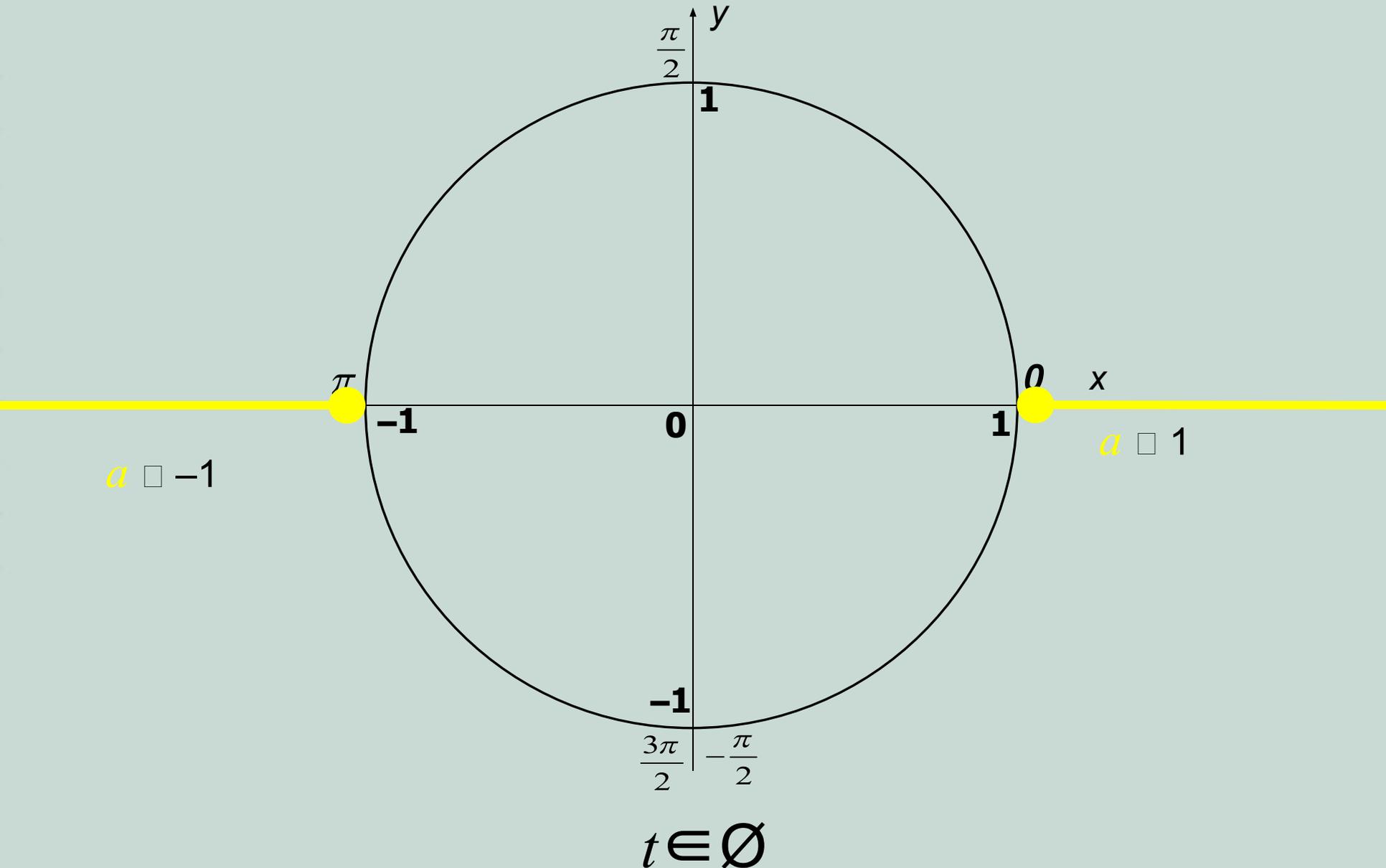
$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 2x-3 < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$$

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n + 3 < 2x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n + 3$$

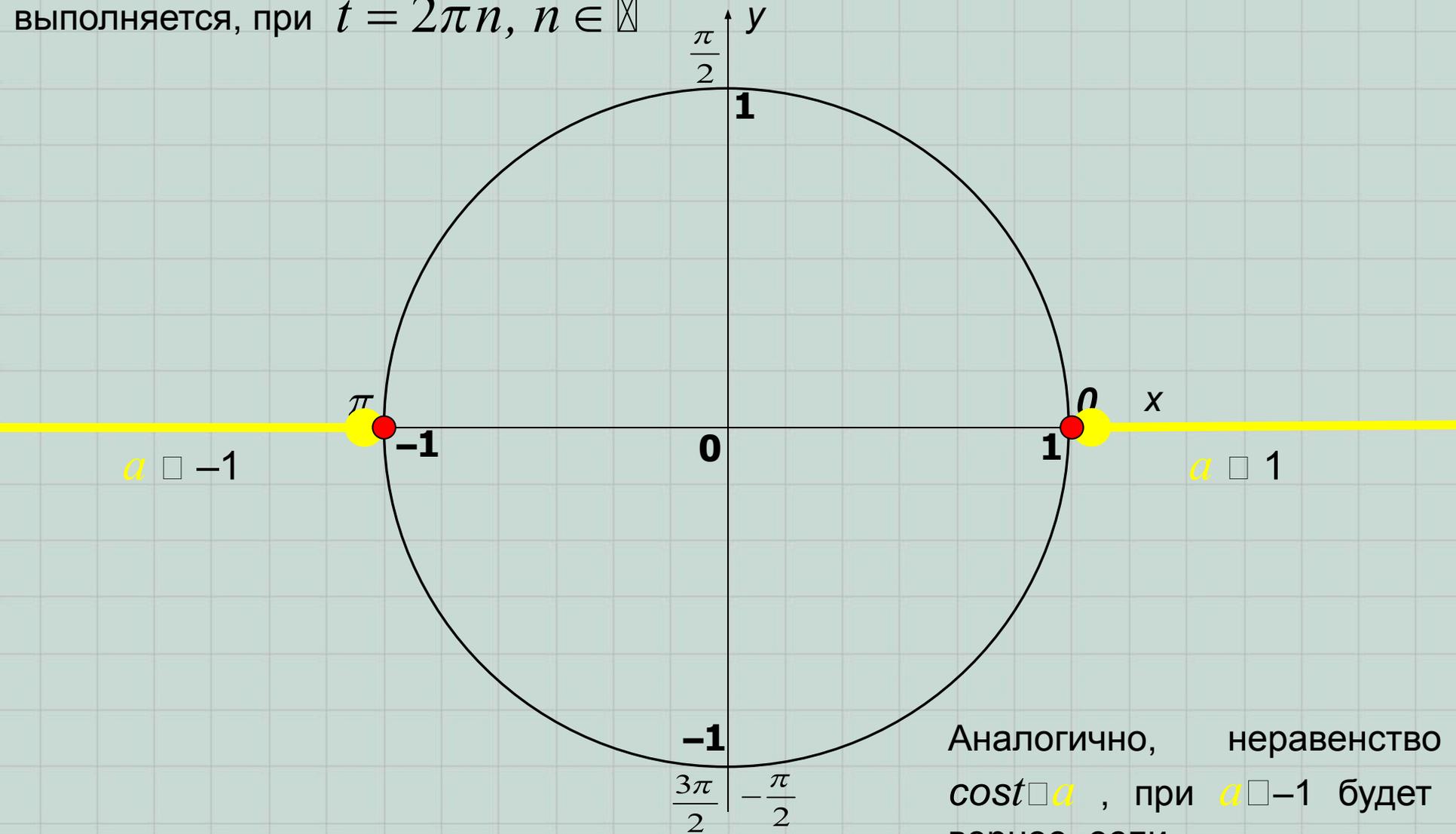
$$-\frac{\pi}{12} + \frac{3}{2} + \pi n < x < \frac{7\pi}{12} + \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x \in \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{3}{2} + \pi n; \frac{7\pi}{12} + \frac{3}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

Для неравенство  $\cos t > a$ , при  $a \leq 1$  и  $\cos t < a$ , при  $a \geq -1$  проведите рассуждения самостоятельно (под руководством учителя).



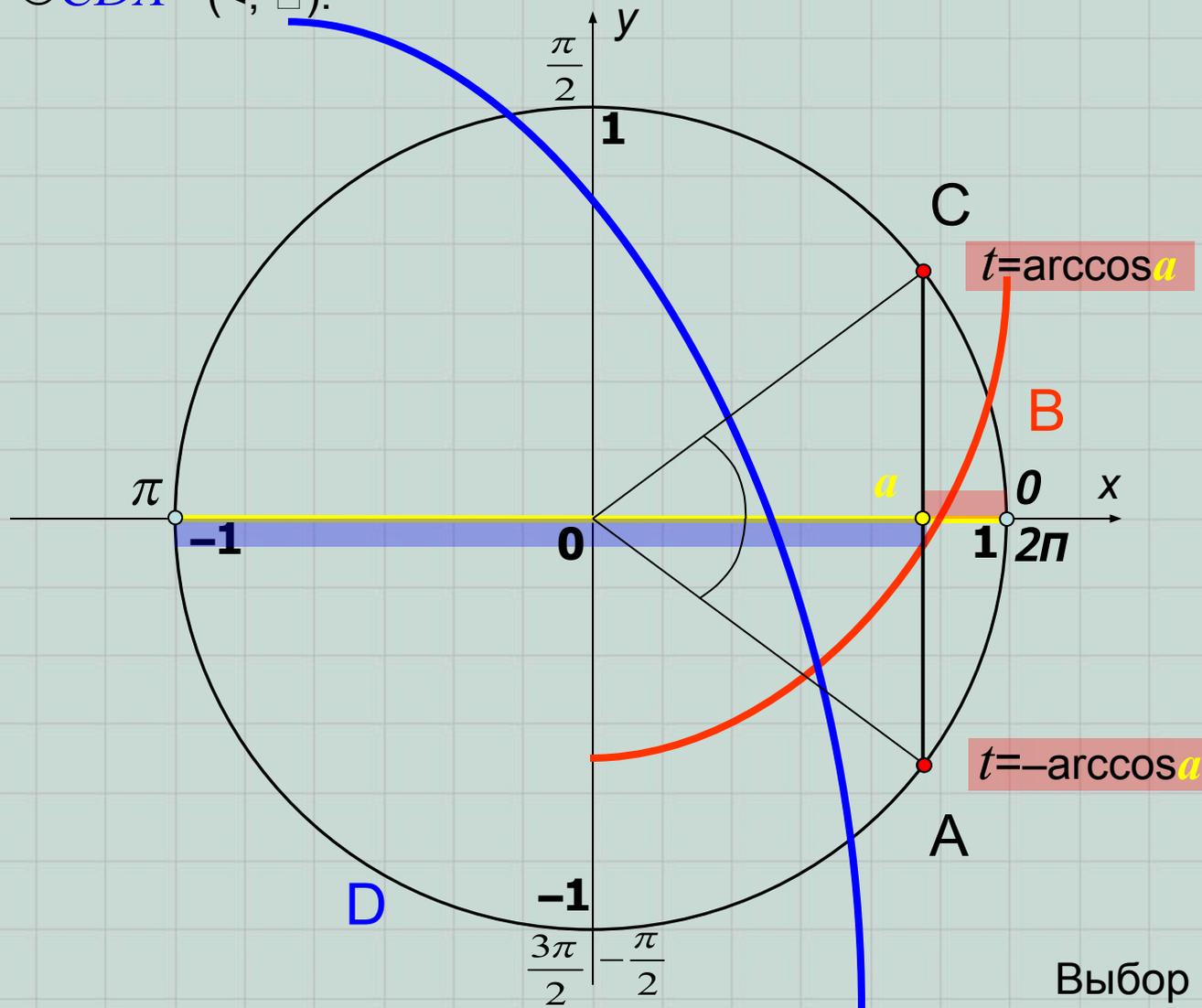
Если знак неравенства нестрогий, то  
неравенство  $\cos t \geq a$ , при  $a \leq 1$   
выполняется, при  $t = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



Аналогично, неравенство  
 $\cos t \leq a$ , при  $a \geq -1$  будет  
верное, если

$$t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Если  $a \in (-1; 1)$ , то неравенство  $\cos t \square a$  выполняется либо на дуге  $\cup ABC$  ( $>$ ,  $\square$ ),  
либо на дуге  $\cup CDA$  ( $<$ ,  $\square$ ).



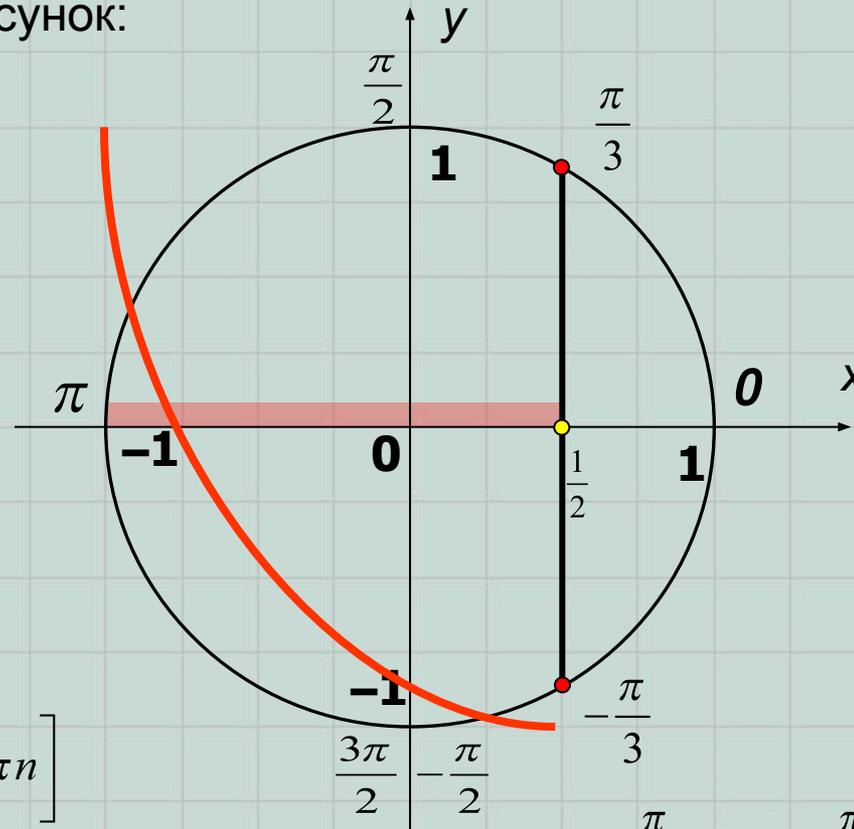
В первом случае  $t \in \left( [-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n] \right), n \in \mathbb{Z}$

Во втором,  $t \in \left( [\arccos a + 2\pi k; 2\pi - \arccos a + 2\pi k] \right), k \in \mathbb{Z}$

Выбор скобок в записи ответа зависит от знака неравенства

**Пример.** Решите неравенство  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$ .

**Решение.** Выполняем рисунок:



$$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$$

$$-\frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$$

$$x \in \left[-\frac{17\pi}{6} + 4\pi n; -\frac{\pi}{6} + 4\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$$

или

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n - \frac{\pi}{4} \leq -\frac{x}{2} \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n - \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{17\pi}{6} + 4\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x \in \left[-\frac{17\pi}{6} + 4\pi n; -\frac{\pi}{6} + 4\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$ .

Так как  $E(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$ , то неравенство  $\operatorname{tg} t \leq a$  всегда имеет решение.

Значению  $\operatorname{tg} t = a$  соответствуют числа  $t$  (величины углов поворота в радианной мере), попадающие в две точки тригонометрического круга.

Для неравенств  $\operatorname{tg} t > a$  или  $\operatorname{tg} t \leq a$  получаем две дуги.

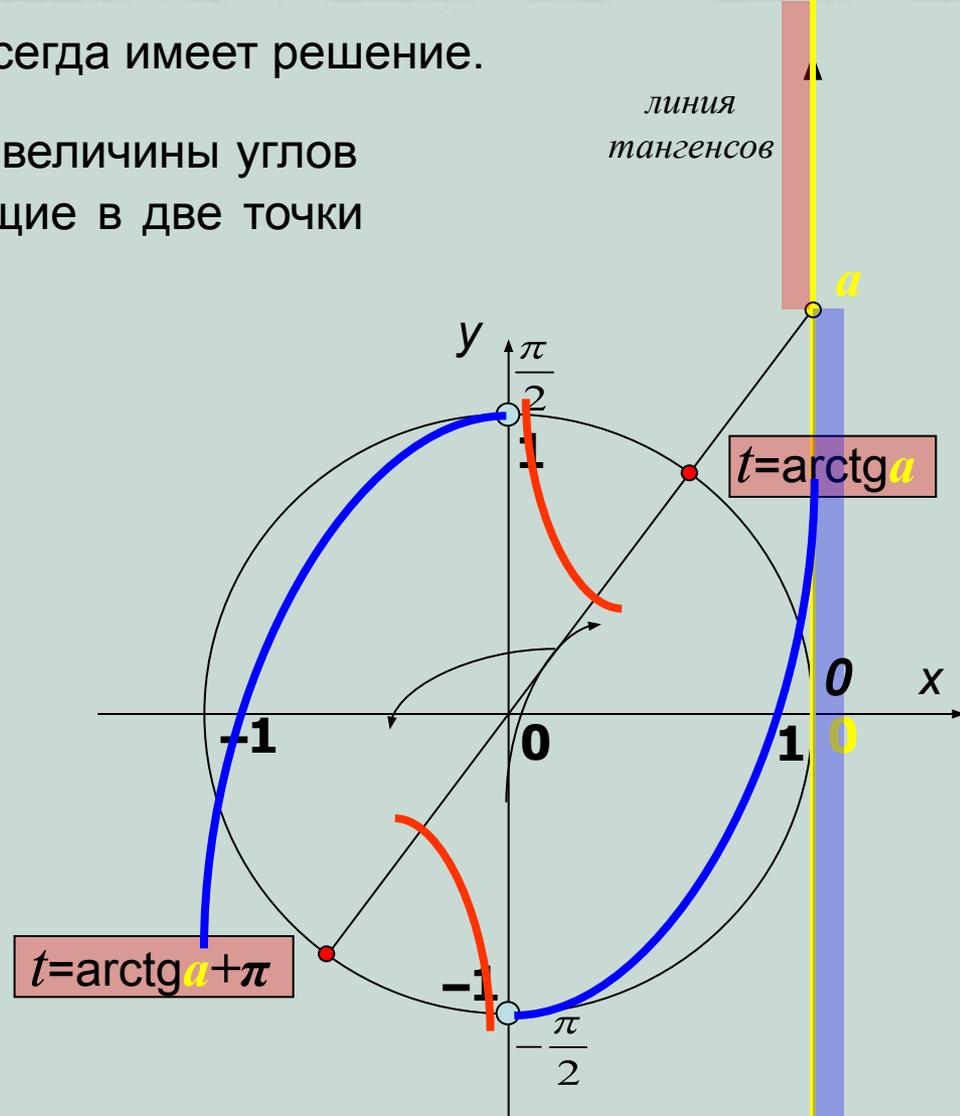
Обе они могут быть записаны в виде промежутка:

$$t \in \left[ \left( \operatorname{arctg} a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right) \right), n \in \mathbb{Z}$$

Для неравенств  $\operatorname{tg} t < a$  или  $\operatorname{tg} t \leq a$  получаем две дуги.

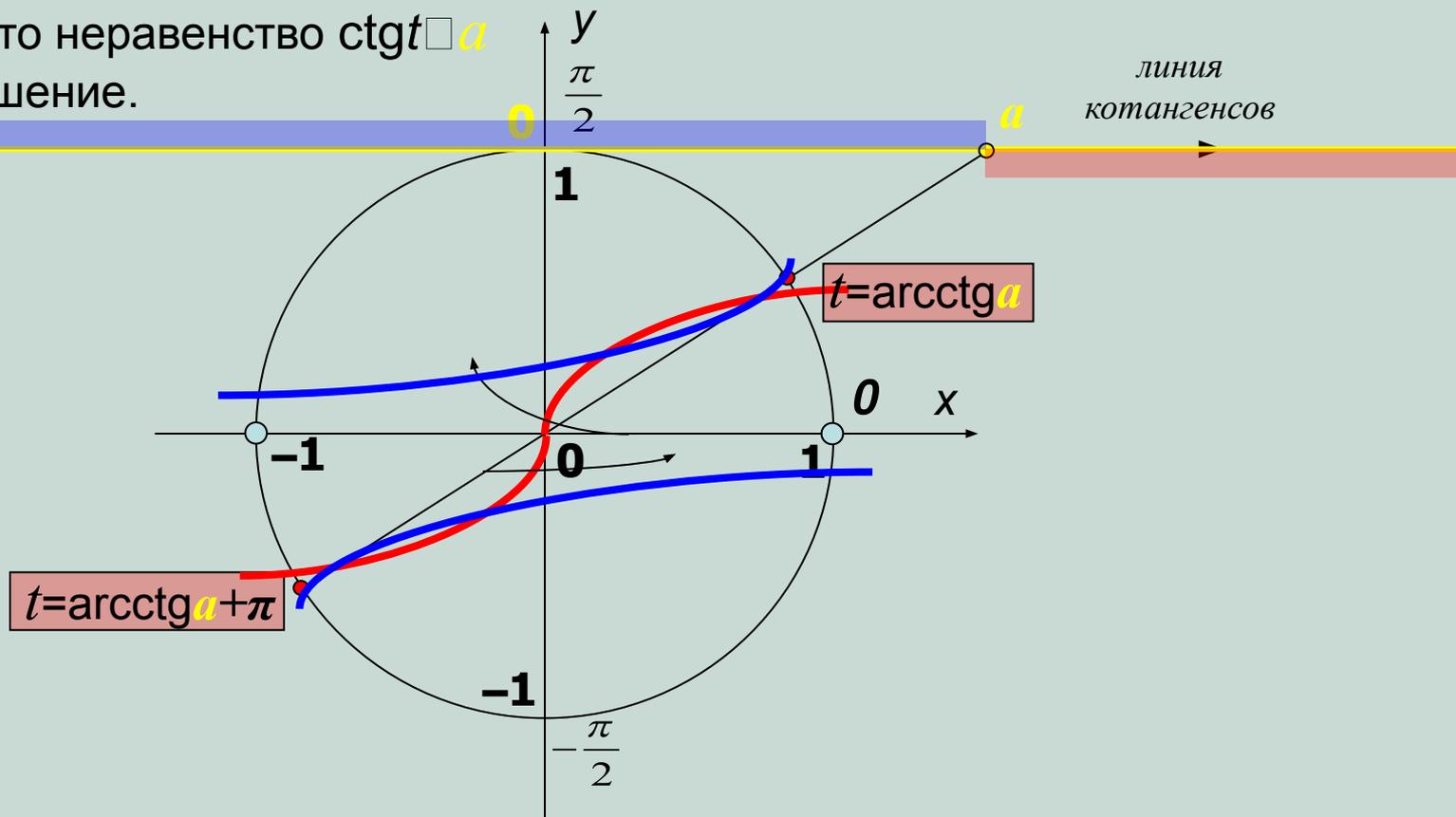
Обе они могут быть записаны в виде промежутка:

$$t \in \left( \left( -\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} a + \pi k \right) \right], k \in \mathbb{Z}$$



Выбор скобок в записи ответа зависит от знака неравенства

Так как  $E(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R}$ , то неравенство  $\operatorname{ctg} t \leq a$  всегда имеет решение.



Проследите за ходом решения и выведите общие формулы для неравенств:

$$\operatorname{ctg} t > a$$

$$t \in (\pi n; \operatorname{arcctg} a + \pi n), n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} t \leq a$$

$$t \in (\pi n; \operatorname{arcctg} a + \pi n], n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} t < a$$

$$t \in (\operatorname{arcctg} a + \pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} t \geq a$$

$$t \in [\operatorname{arcctg} a + \pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$$

**Пример.** Решите неравенство  $\frac{\operatorname{tg}(2x) - \operatorname{tg}3}{1 + \operatorname{tg}(2x) \cdot \operatorname{tg}3} \dots \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

линия  
тангенсов

**Решение.** Применив к левой части неравенства формулу тангенса разности, получим равносильное неравенство:

$$\operatorname{tg}(2x - 3) \dots \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

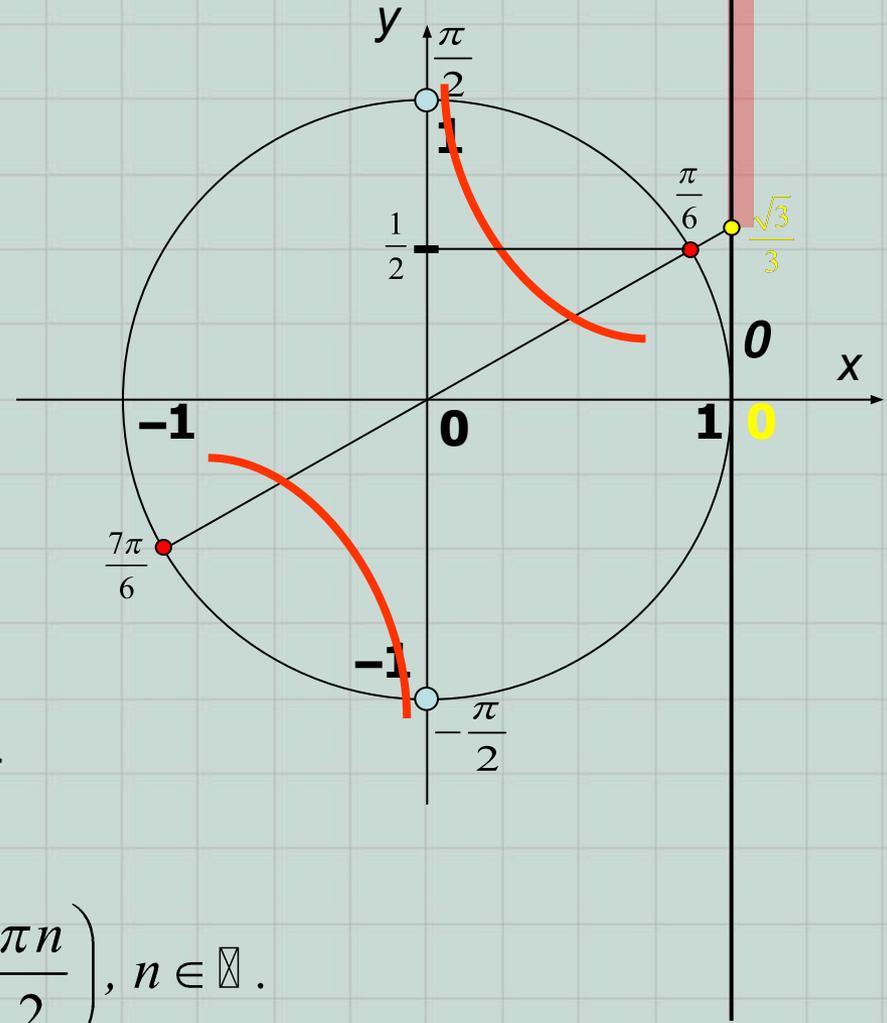
Выполняем рисунок.

Получаем:

$$\frac{\pi}{6} + \pi n \text{ „ } 2x - 3 < \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi n + 3 \text{ „ } 2x < \frac{\pi}{2} + \pi n + 3;$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2} \text{ „ } x < \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$



Ответ:  $x \in \left[ \frac{\pi}{12} + \frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbb{Z}.$