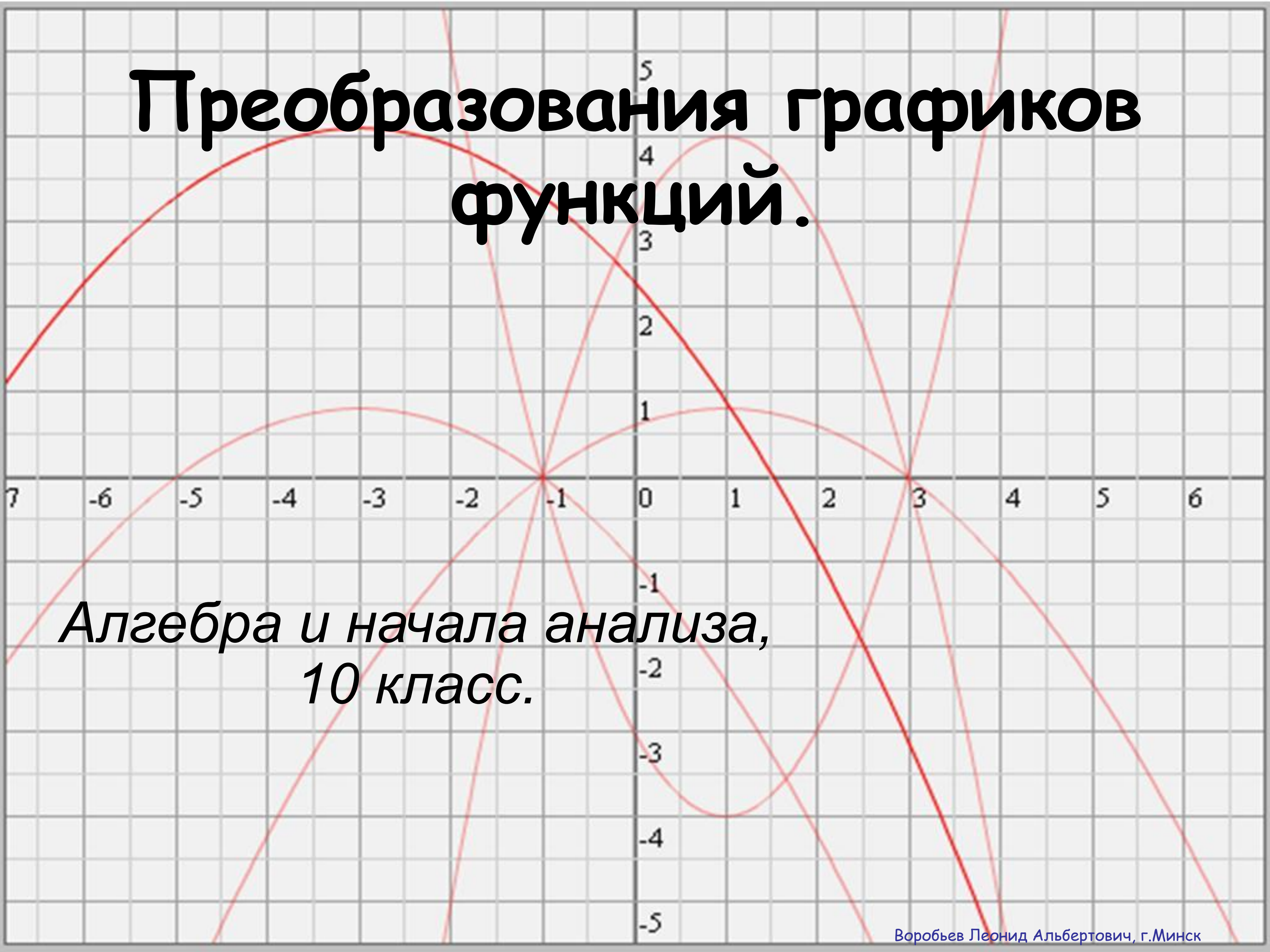
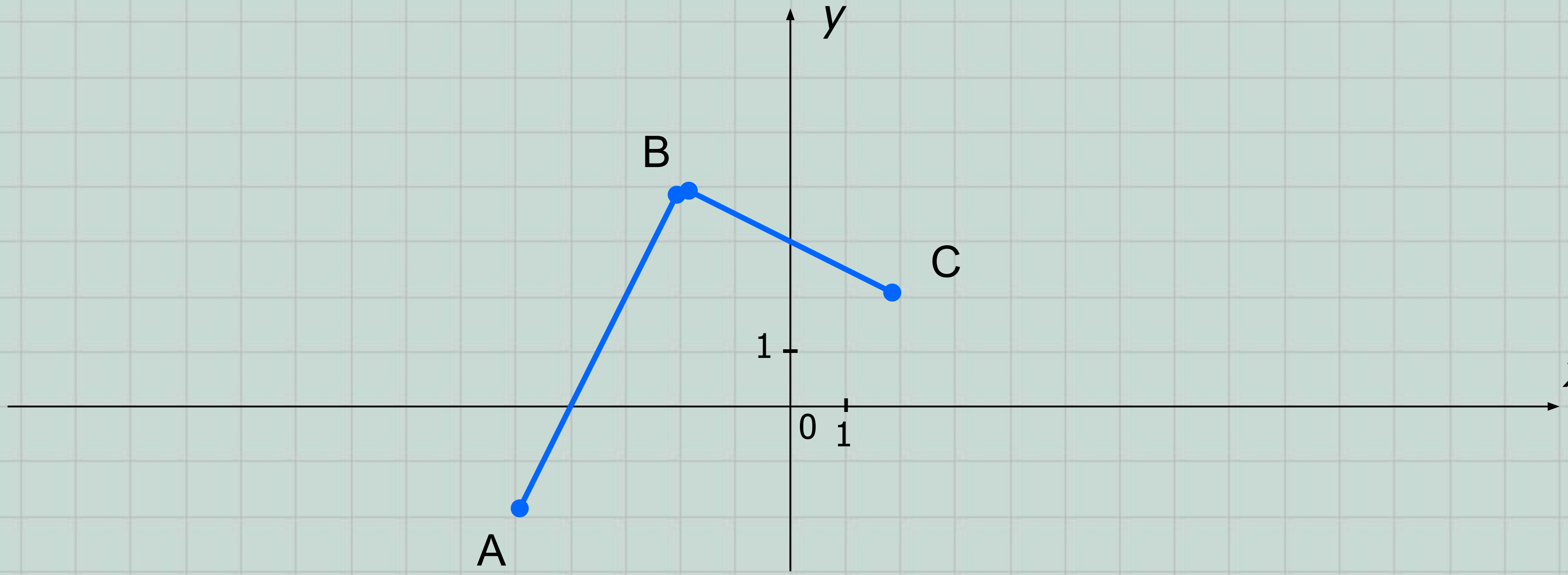


Преобразования графиков функций.

Алгебра и начала анализа, 10 класс.

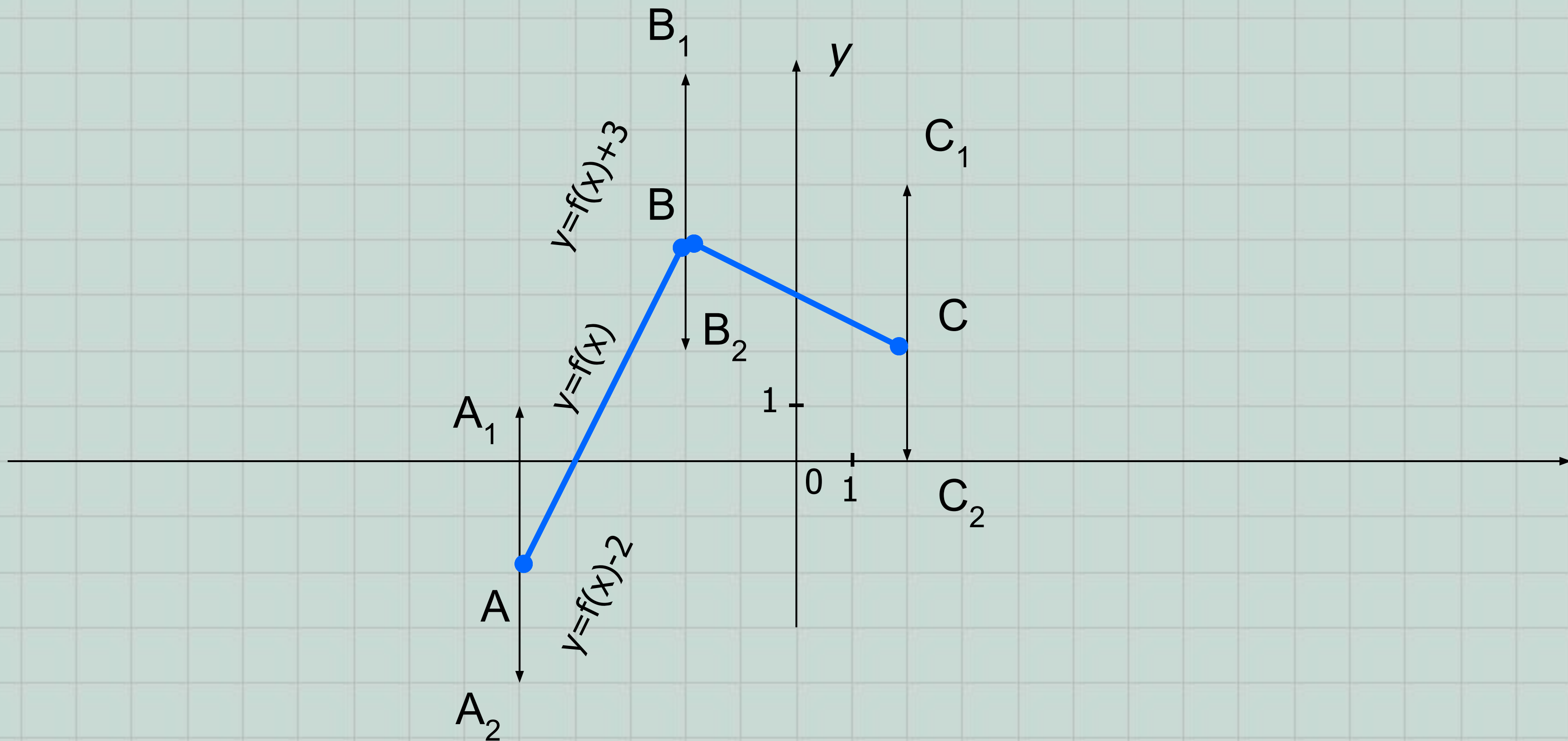
Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

В качестве исходного графика функции y=f(x) выберем ломанную, состоящую из двух звеньев, заданных точками A(-5;-2), B(-2;4) и C(2;2).



Рассмотрим случаи преобразования данного графика, связанные с изменениями формулы, задающей эту функцию.

I. y=f(x)+a, где a∈□.



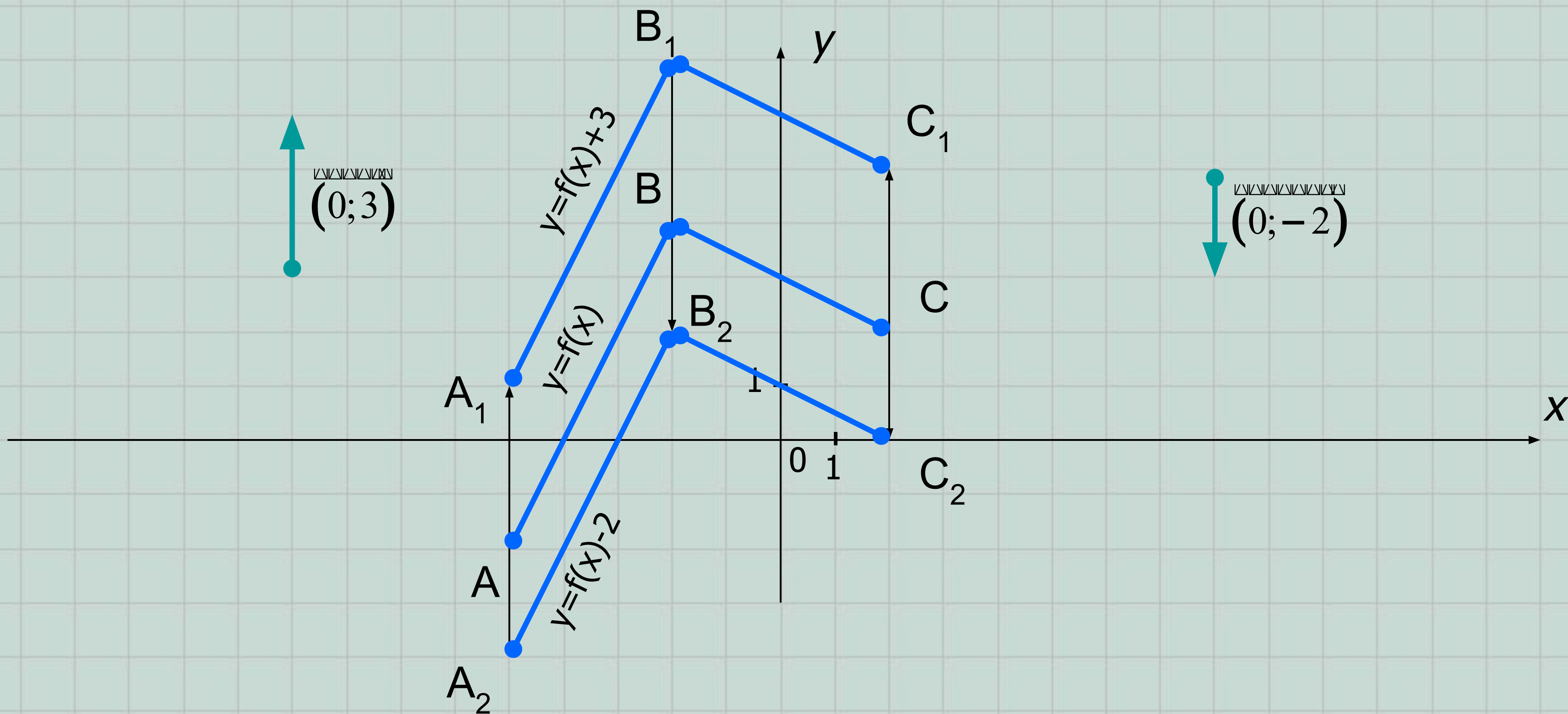
В новой формуле значения функции (ординаты точек графика) изменяются на число a, по сравнению со «старым» значением функции. Это приводит к параллельному переносу графика функции вдоль оси Оу:

1) вверх на a ед.отр., если a>0 или

2) вниз на a ед.отр., если a<0.

Например: 1) y=f(x)+3; или 2) y=f(x)–2.

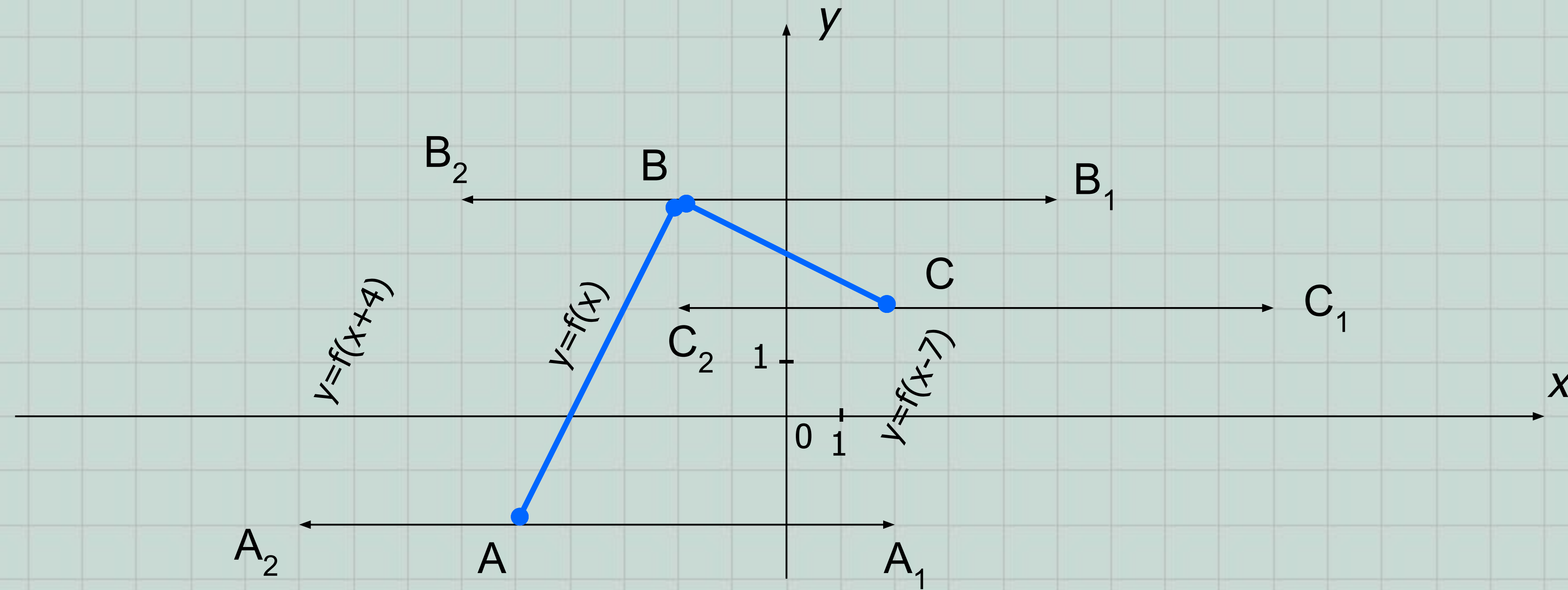
I. $y=f(x)+a$, где $a \in \square$.



Понятие «параллельного переноса вдоль оси Оу вверх…, вниз…» можно заменить на «параллельный перенос на вектор с координатами $\overrightarrow{(0;a)}$».

Задание. Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

II. y=f(x–a), где a∈□.

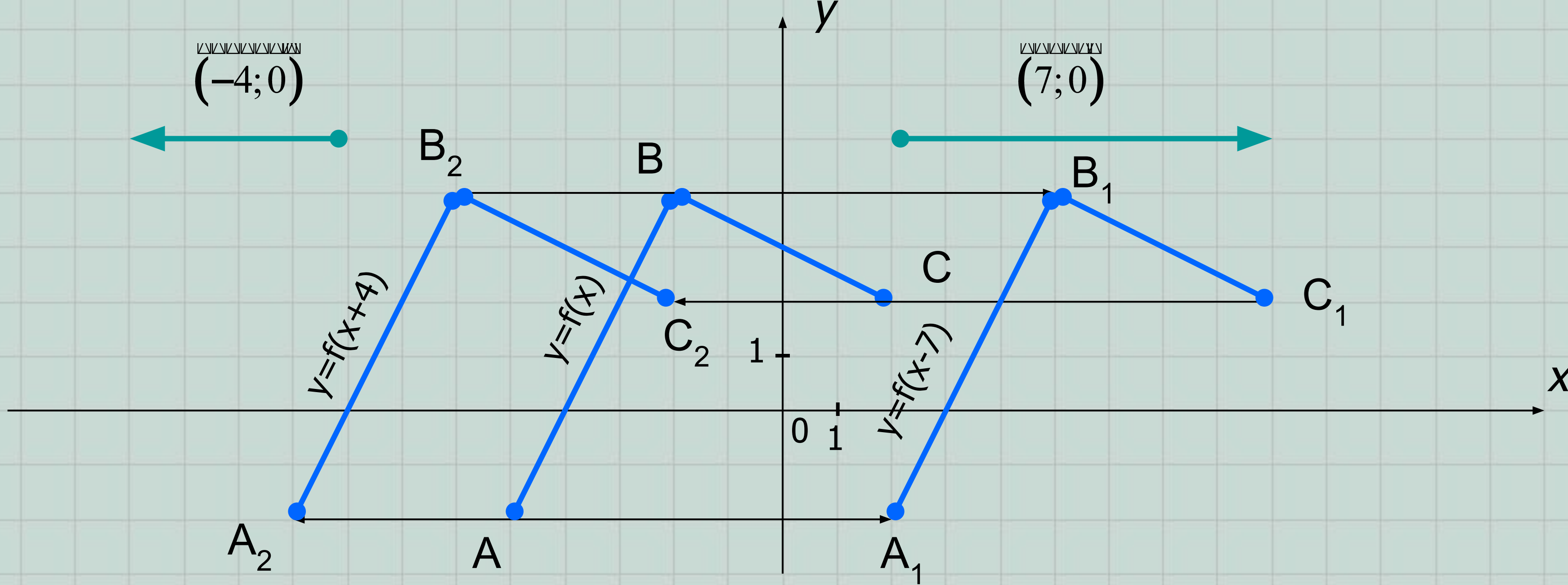


В новой формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) изменяются на число a, по сравнению со «старым» значением аргумента. Это приводит к параллельному переносу графика функции вдоль оси Ox:

1) вправо на a ед.отр., если a>0 или
2) влево на a ед.отр., если a<0.

Например: 1) y=f(x–7) или 2) y=f(x–(–4))=f(x+4).

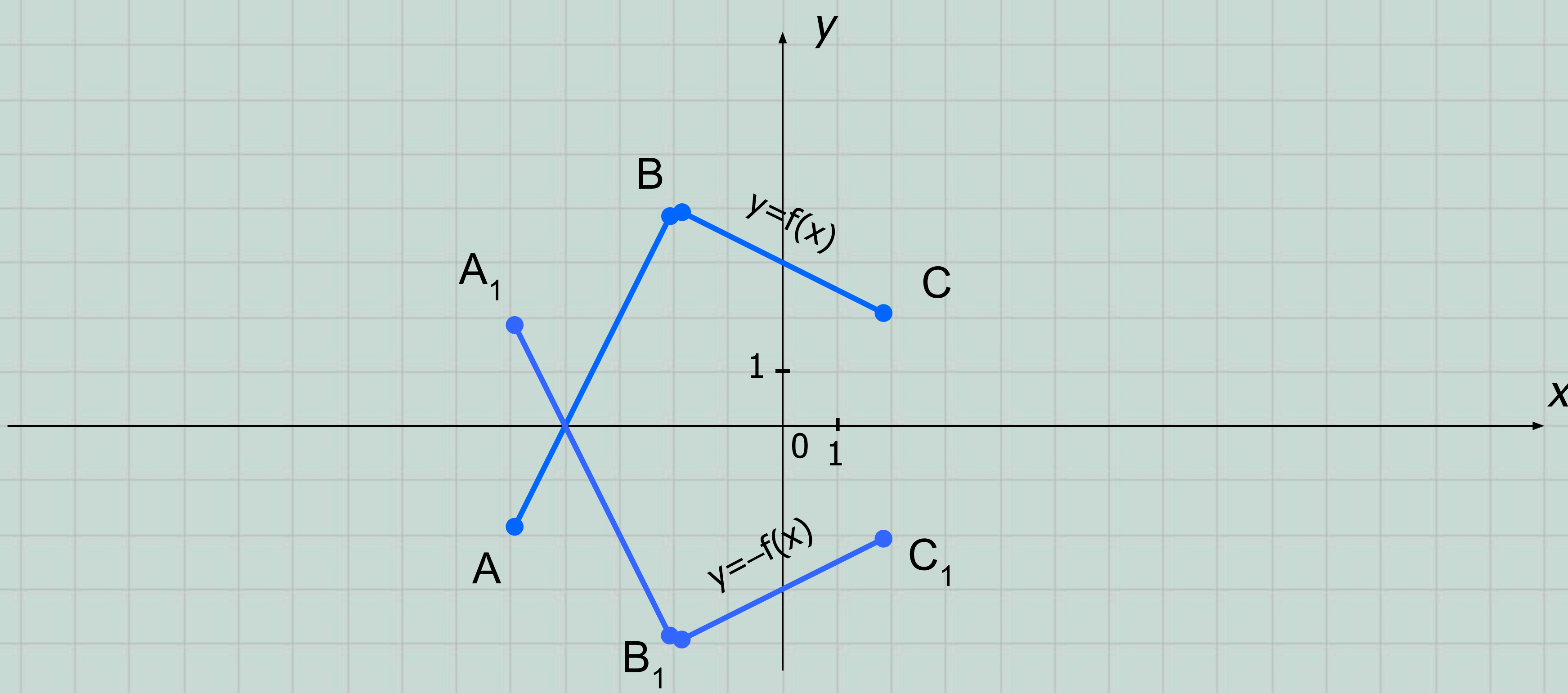
II. $y=f(x-a)$, где $a\in$□.



Вместо понятия «параллельный перенос вдоль оси Ох вправо…, влево…» можно использовать понятие «параллельного переноса на вектор с координатами $\overline{(a;0)}$.»

Задание. Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

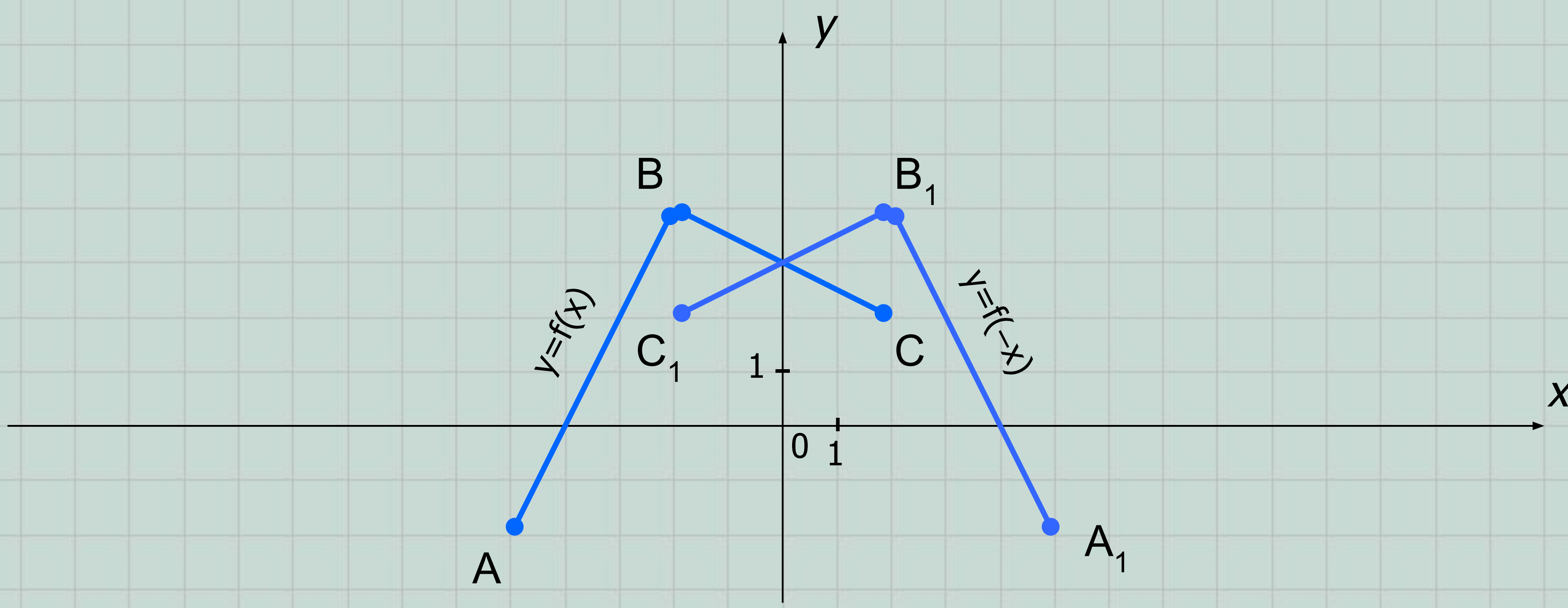
III. y=–f(x).



В данной формуле значения функции (ординаты точек графика) изменяются на противоположные. Это изменение приводит к симметричному отображению исходного графика функции относительно оси Ox.

Задание. Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

IV. y=f(–x).

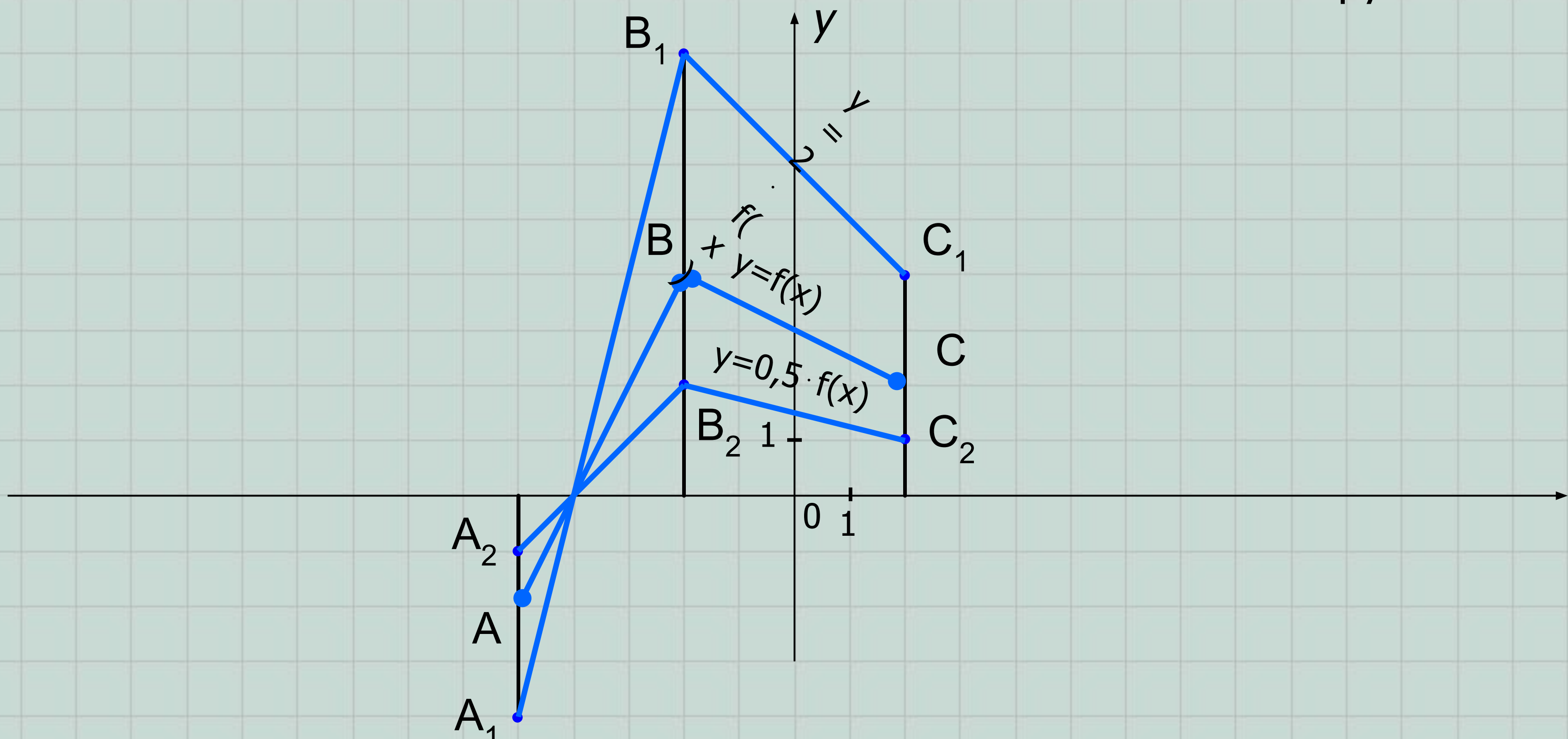


В данной формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) изменяются на противоположные. Это изменение приводит к симметричному отображению исходного графика функции относительно оси Oy.

Задание. Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

V. $y=k \cdot f(x)$, $k>0$.

Если $k<0$, то данный случай комбинируют с III.



В новой формуле значения функции (ординаты точек графика) изменяются в k раз, по сравнению со «старым» значением функции. Это приводит к :

1) «растяжению» графика функции от оси Ох в k раз, если $k>1$ или

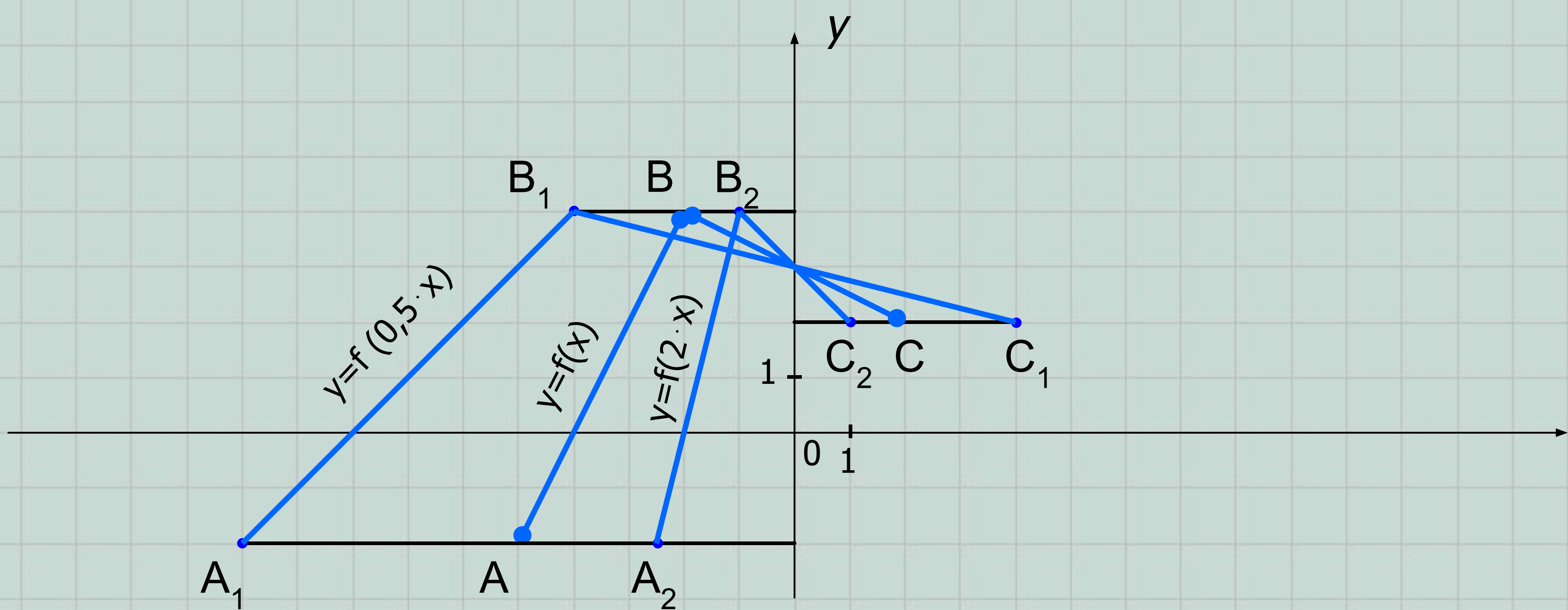
2) «сжатию» графика функции к оси Ох в $\frac{1}{k}$ раз, если $k<1$.

Например: 1) $y=2 \cdot f(x)$; или 2) $y=0{,}5 \cdot f(x)$.

Задание. Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

VI. $y=f(k \cdot x)$, $k>0$.

Если $k<0$, то данный случай комбинируют с IV.



В новой формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) изменяются в k раз, по сравнению со «старым» значением аргумента. Это приводит к :

1) «растяжению» графика функции от оси Оу в $\frac{1}{k}$ раз, если $k<1$ или

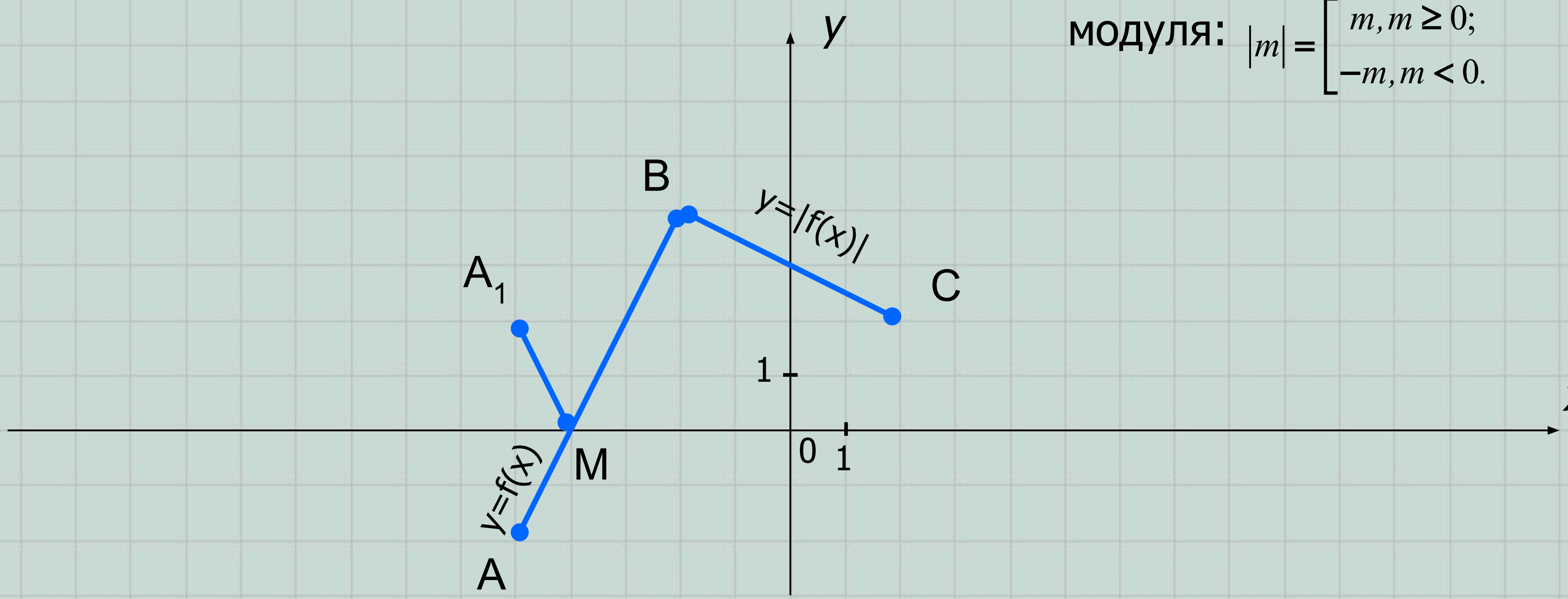
2) «сжатию» графика функции к оси Оу в k раз, если $k>1$.

Например: 1) $y=f(0{,}5 \cdot x)$; или 2) $y=f(2 \cdot x)$.

Задание. Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

VII. y=|f(x)|.

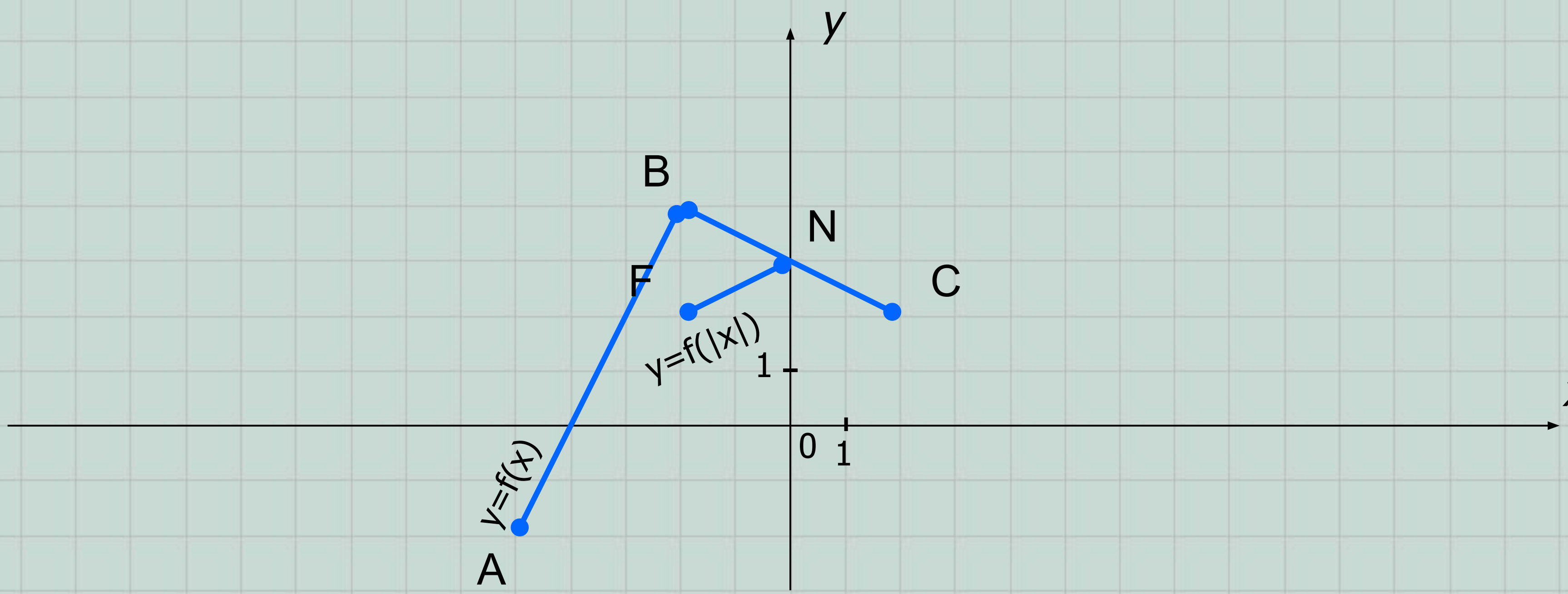
Вспомните определение модуля: $|m| = \left[\begin{array}{l} m, m \geq 0; \\ -m, m < 0. \end{array}\right.$



В новой формуле значения функции (ординаты точек графика) находятся под знаком модуля. Это приводит к исчезновению частей графика исходной функции с отрицательными ординатами (т.е. находящихся в нижней полуплоскости относительно оси Ох) и симметричному отображению этих частей относительно оси Ох.

Задание. Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

VIII. y=f(|x|).



В новой формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) находятся под знаком модуля. Это приводит к исчезновению частей графика исходной функции с отрицательными абсциссами (т.е. находящихся в левой полуплоскости относительно оси Оу) и замещению их частями исходного графика, симметричными относительно оси Оу.

Задание. Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

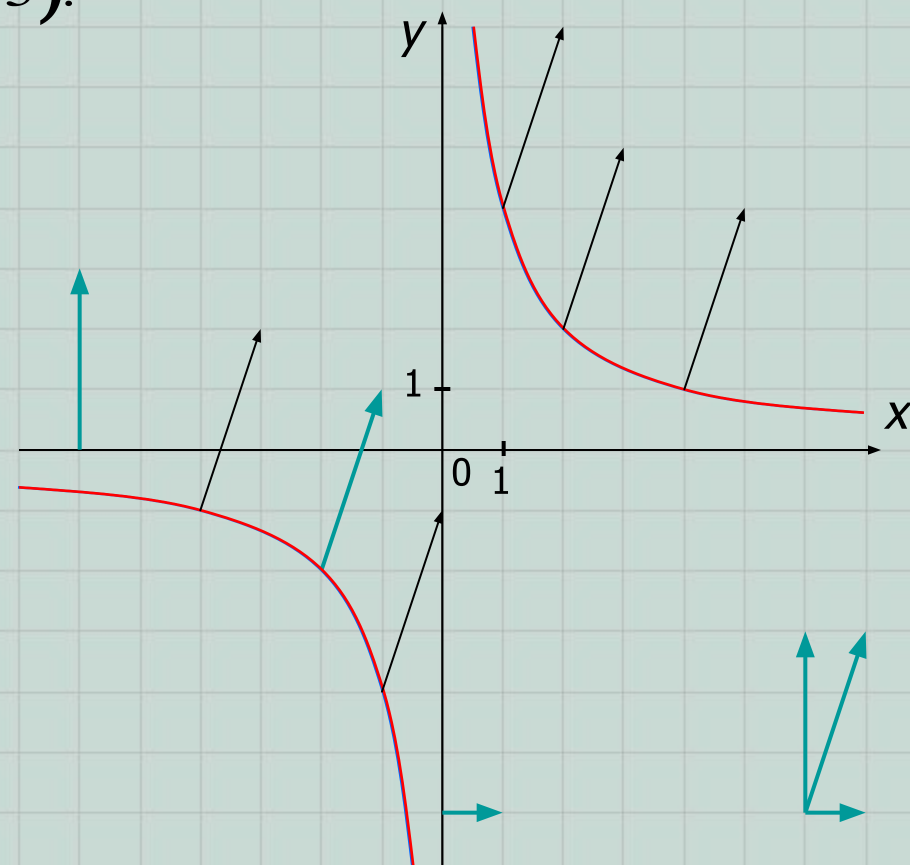
Рассмотрим несколько примеров применения вышеизложенной теории.

<u>*ПРИМЕР 1*</u>. Построить график функции, заданной формулой $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

Решение. Преобразуем данную формулу: $y = \dfrac{3x+1}{x-1} = \dfrac{3(x-1)+4}{x-1} = \dfrac{4}{x-1} + 3.$

1) Построим график функции $y = \dfrac{4}{x}$.

2) Выполним параллельный перенос построенного графика на вектор $(1; 3)$.

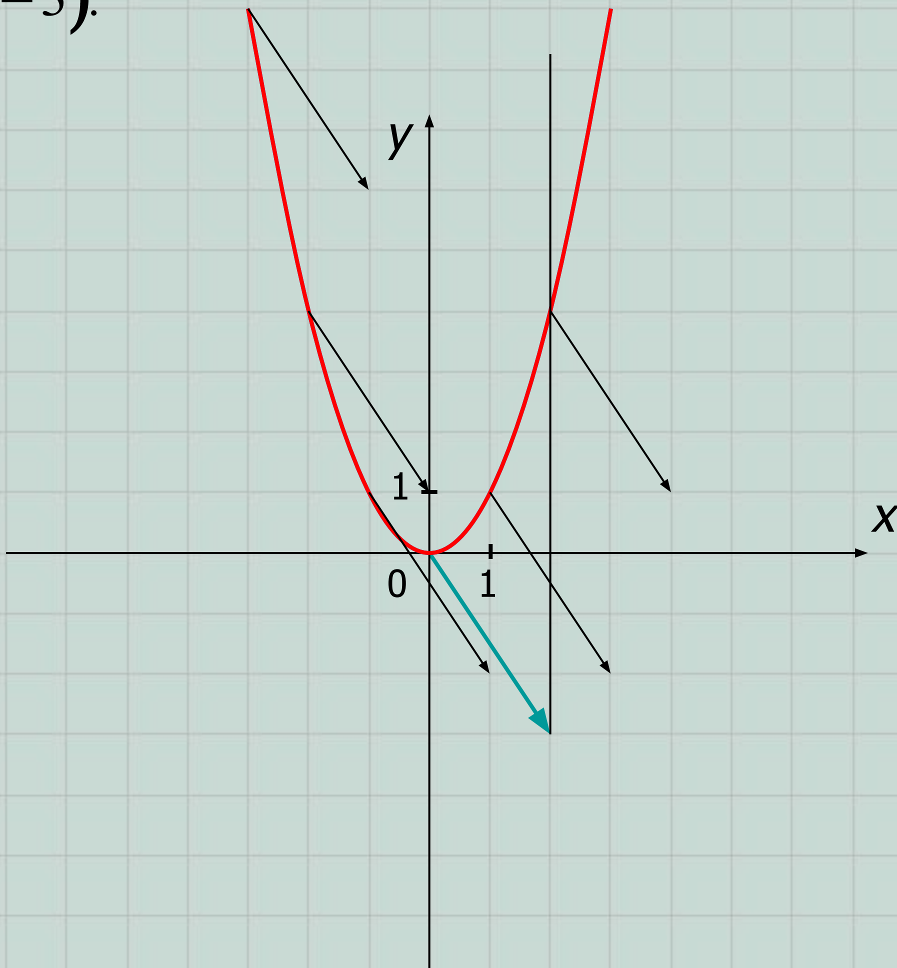


ПРИМЕР 2. Построить график функции, заданной формулой $y = x^2 - 4x + 1.$

Решение. Преобразуем данную формулу, выделив в данном квадратном трехчлене квадрат двучлена: $y = x^2 - 4x + 1 = \left(x^2 - 2\cdot x\cdot 2 + 2^2\right) - 4 + 1 = \left(x - 2\right)^2 - 3.$

1) Построим график функции $y = x^2.$

2) Выполним параллельный перенос построенного графика на вектор $\left(2; -3\right).$



ПРИМЕР 3. Построить график функции, заданной формулой $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1.$

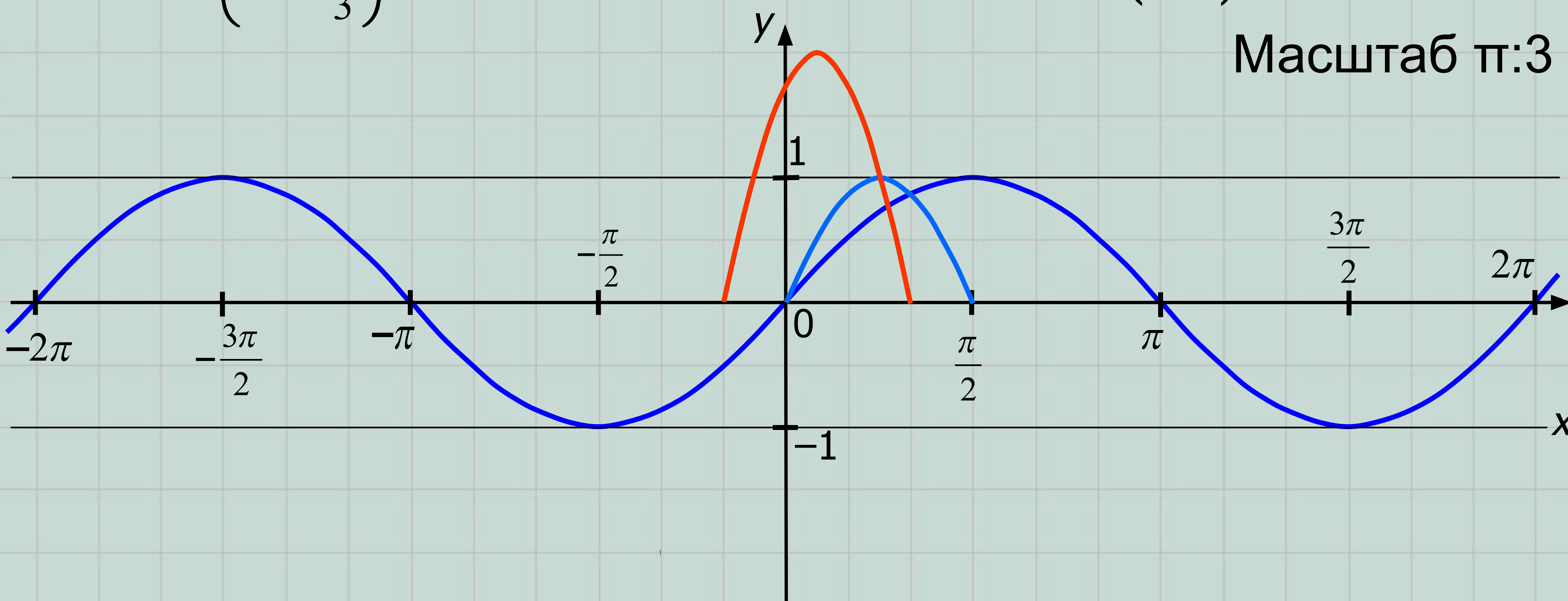
Решение. 1) $y=\sin x$; 2) $y=\sin(2x)$ – «сжатие» к оси *Oy* в два раза;

3) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(2\left(x - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$ – параллельный перенос вдоль оси *Ox* влево на $\frac{\pi}{6}$ ед.отр.;

4) $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ – «растяжение» от оси *Ox* в два раза;

5) $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ – параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{(0;-1)}$.

Масштаб π:3



Остается воспользоваться свойством периодичности любой тригонометрической функции (определите наименьший положительный период самостоятельно) и достроить полученную часть до полного графика на всей числовой оси:

Масштаб π:3