

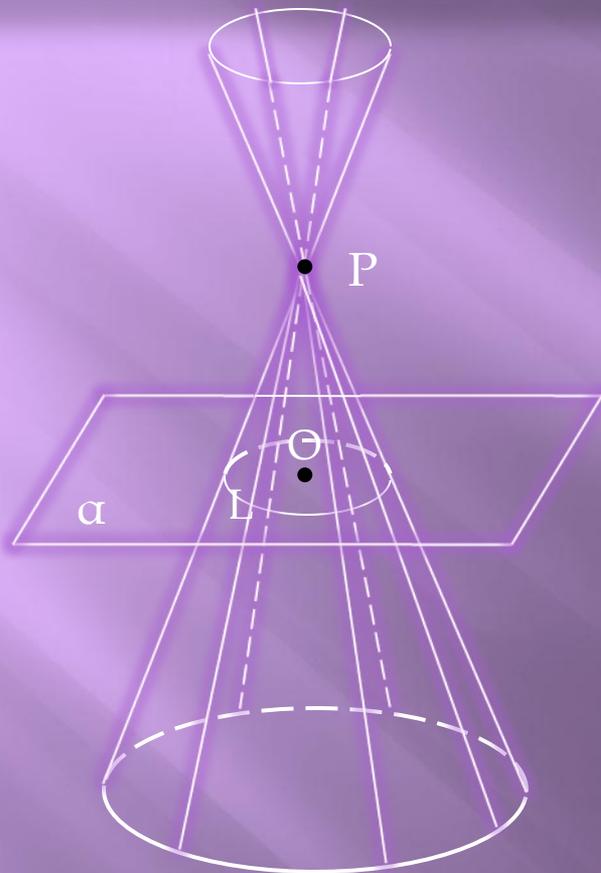


КОНУС

КОНУС

Понятие конуса.
Площадь поверхности
конуса. Усеченный
конус.

Понятие конуса



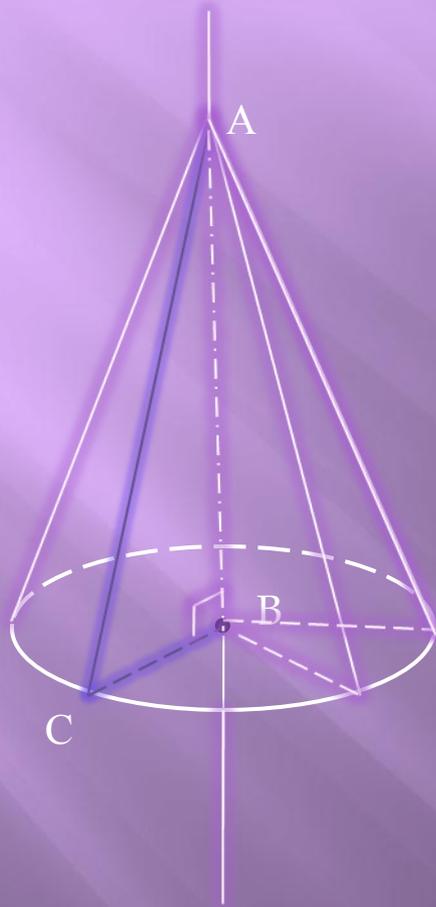
Рассмотрим окружность L с центром в точке O и прямую OP , перпендикулярную к плоскости α этой окружности. Через точку P и каждую точку окружности проведем прямую. Поверхность, образованная этими прямыми, называется конической поверхностью, а сами прямые – образующими конической поверхности. Точка P называется вершиной, а прямая OP – осью конической поверхности.

Понятие конуса



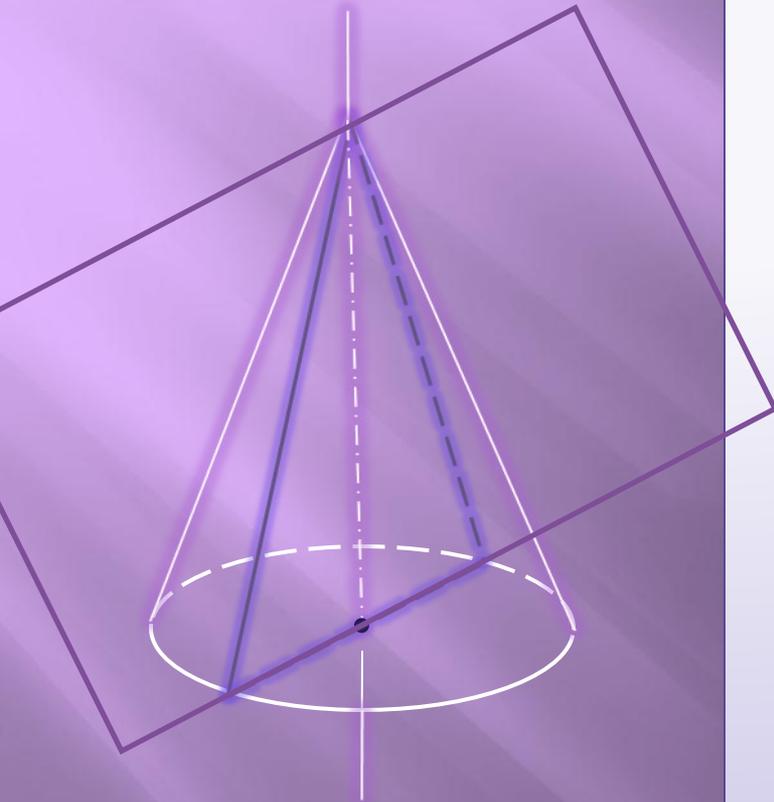
Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L , называется **конусом**. Круг называется **основанием конуса**, вершина конической поверхности — **вершиной конуса**, отрезки образующих, заключенные между вершиной и основанием, — **образующими конуса**, а образованная ими часть конической поверхности — **боковой поверхностью конуса**. Ось конической поверхности называется **осью конуса**, а ее отрезок, заключенный между вершиной и основанием, — **высотой конуса**. Отметим, что все образующие конуса равны друг другу (объясните почему).

Конус – фигура вращения



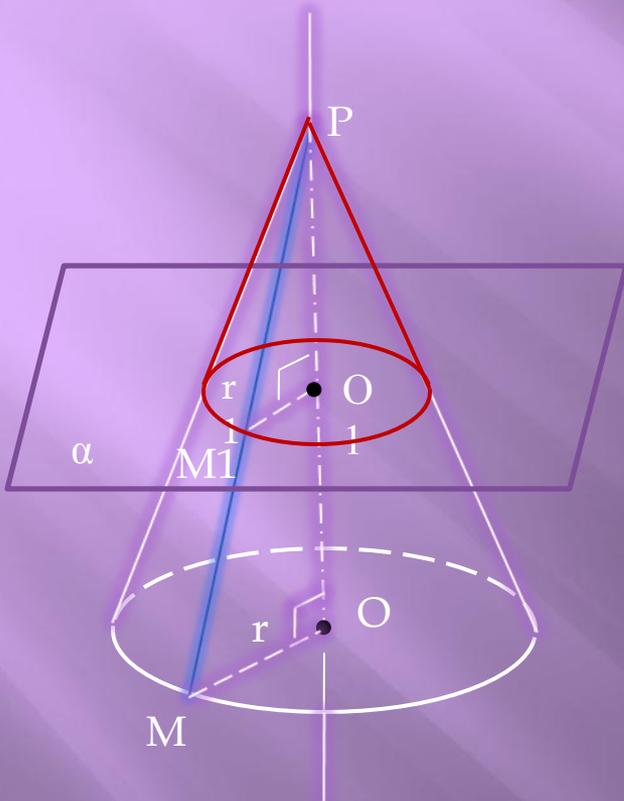
Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. На рисунке изображен конус, полученный вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB . При этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы AC , а основание — вращением катета BC .

Осевое сечение



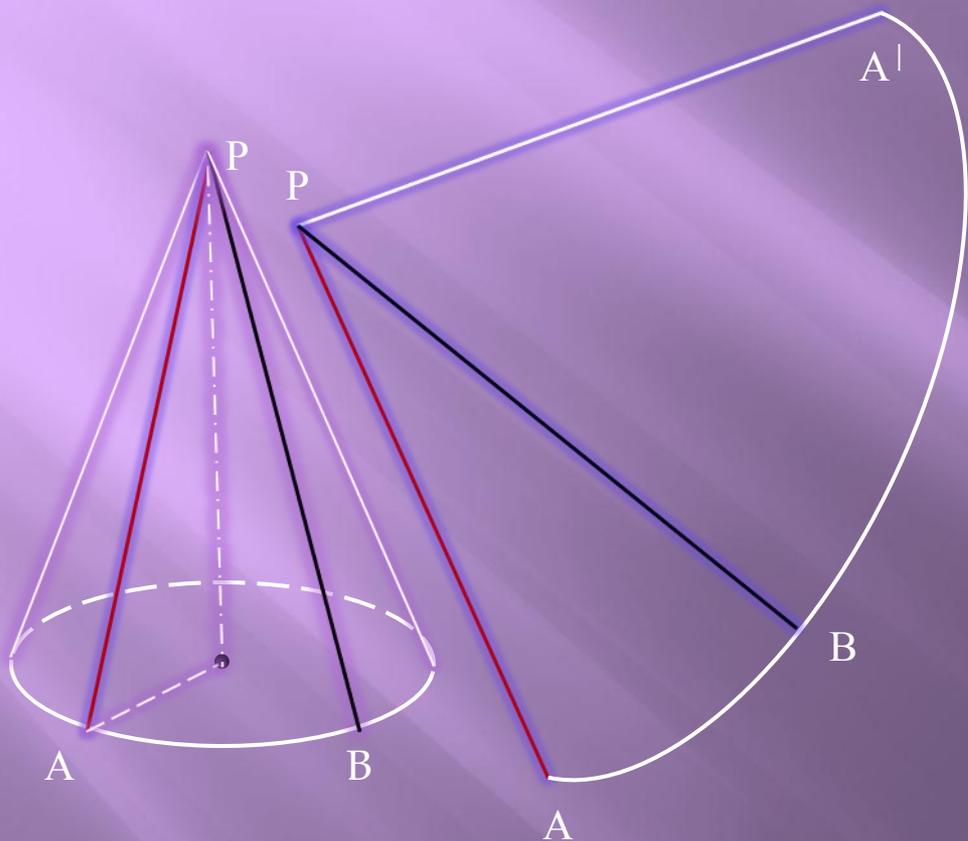
Рассмотрим сечение конуса различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого — диаметр основания конуса, а боковые стороны — образующие конуса. Это сечение называется

Осевое сечение



Если секущая плоскость перпендикулярна к оси OP конуса, то сечение конуса представляет собой круг с центром O и расположенным на оси, конуса. Радиус r_1 этого круга равен $(OP/PO_1) * r$, где r - радиус основания конуса, что легко усмотреть из подобия прямоугольных треугольников POM и PO_1M_1 .

Площадь поверхности конуса



Боковую поверхность конуса, как и боковую поверхность цилиндра, можно развернуть на плоскость, разрезав ее по одной из образующих. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса.

Площадь поверхности конуса

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь ее развертки. Выразим площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса через его образующую l и радиус основания r .

Площадь кругового сектора — развертки боковой поверхности конуса равна

$$\frac{\pi l^2 \alpha}{360}$$

Где α — градусная мера дуги ABA^l , поэтому

Площадь поверхности конуса

$$S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360} \quad (1)$$

Площадь поверхности конуса

Выразим a через l и r . Так как длина дуги ABA' равна $2\pi r$ (длине окружности основания конуса), то $2\pi r = (\pi l/180) \cdot a$, откуда

$$\alpha = \frac{360 r}{l}$$

Площадь поверхности конуса

Подставив это выражение в формулу (1), получим

$$S_{\text{бок}} = \pi r l \quad (2)$$

Площадь поверхности конуса

Таким образом, площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания. Для вычисления площади $S_{\text{кон}}$ полной поверхности конуса получается формула

Площадь поверхности конуса

$$S_{\text{бок}} = \pi r(l + r)$$

Усеченный конус

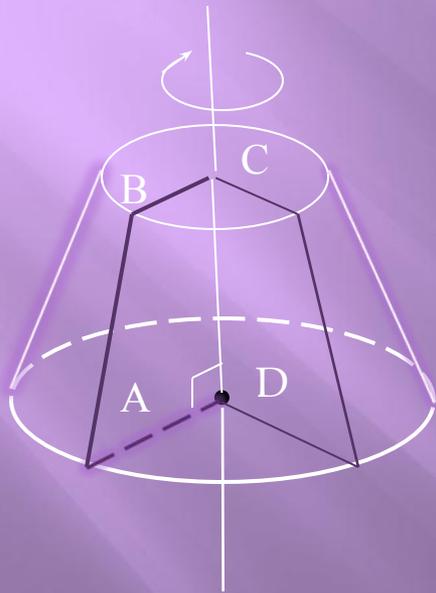


Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется **усеченным конусом**. Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются **основаниями** усеченного конуса, а отрезок, соединяющий их центры, — **высотой** усеченного конуса.

Усеченный конус

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки образующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются **образующими** усеченного конуса. Все образующие усеченного конуса равны друг другу.

Усеченный конус



Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям. На рисунке изображен усеченный конус, полученный вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг стороны CD , перпендикулярной к основаниям AD и BC . При этом боковая поверхность образуется вращением боковой стороны AB , а основания усеченного конуса — вращением оснований CB и DA трапеции.

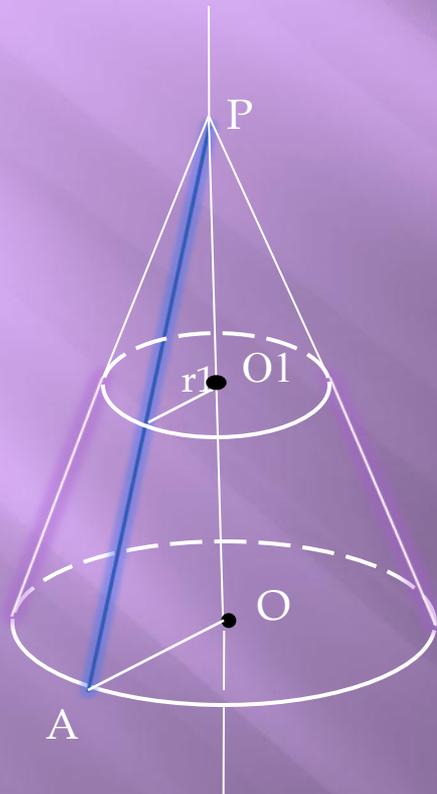
Усеченный конус

Докажем, что площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую, т. е.

$$S_{\text{бок}} = \pi (r + r_1) l$$

Где r и r_1 – радиусы оснований, l – образующая усеченного конуса.

Усеченный конус



▼ Пусть P — вершина конуса, из которого получен усеченный конус, AA_1 — одна из образующих усеченного конуса, $r > r_1$ точки O и O_1 — центры оснований. Используя формулу (2), получаем

$$\begin{aligned}
 S_{\text{бок}} &= \pi r * PA \\
 &- \pi r_1 * PA = \\
 &\pi r (PA_1 + AA_1) \\
 &- \pi r_1 * PA_1
 \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $AA_1 = l$, находим

$$S_{\text{бок}} = \pi r l + \pi(r - r_1) PA_1 \quad (3)$$

Выразим PA_1 через l , r и r_1 . Прямоугольные треугольники PO_1A_1 и POA подобны, так как имеют общий острый угол P , поэтому

$$\frac{PA_1}{PA} = \frac{r_1}{r}$$

или

$$\frac{PA_1}{PA_1 + l} = \frac{r_1}{r}$$

Отсюда получаем

$$PA_1 = \frac{l r_1}{r - r_1}$$

Подставив это выражение в формулу (3), приходим к формуле

$$S_{\text{бок}} = \pi(r + r_1)l$$

