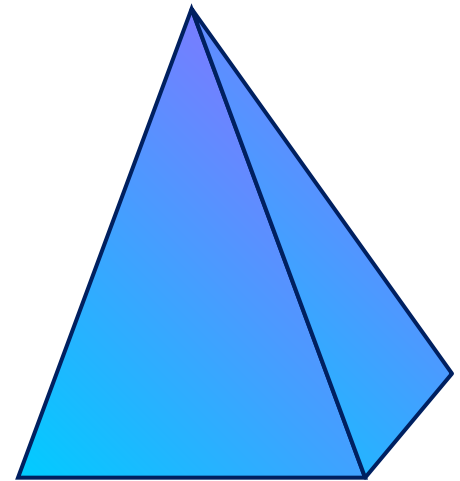
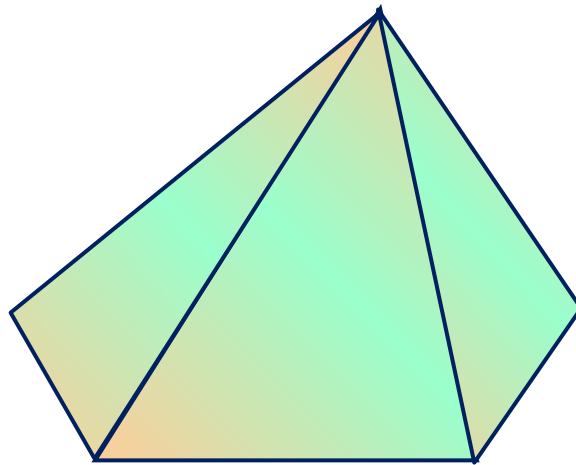
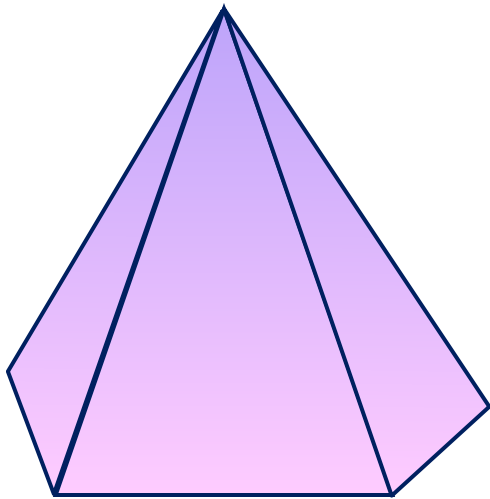


---

# ПИРАМИДА



# Содержание

- История появления
- Определение пирамиды
- Виды пирамид
- Площадь пирамиды
- Правильная пирамида
- Свойство пирамиды
- Апофема
- Теорема о площади боковой поверхности правильной пирамиды
- Усеченная пирамида
- Правильная усеченная пирамида
- Теорема о площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды



# История появления

---

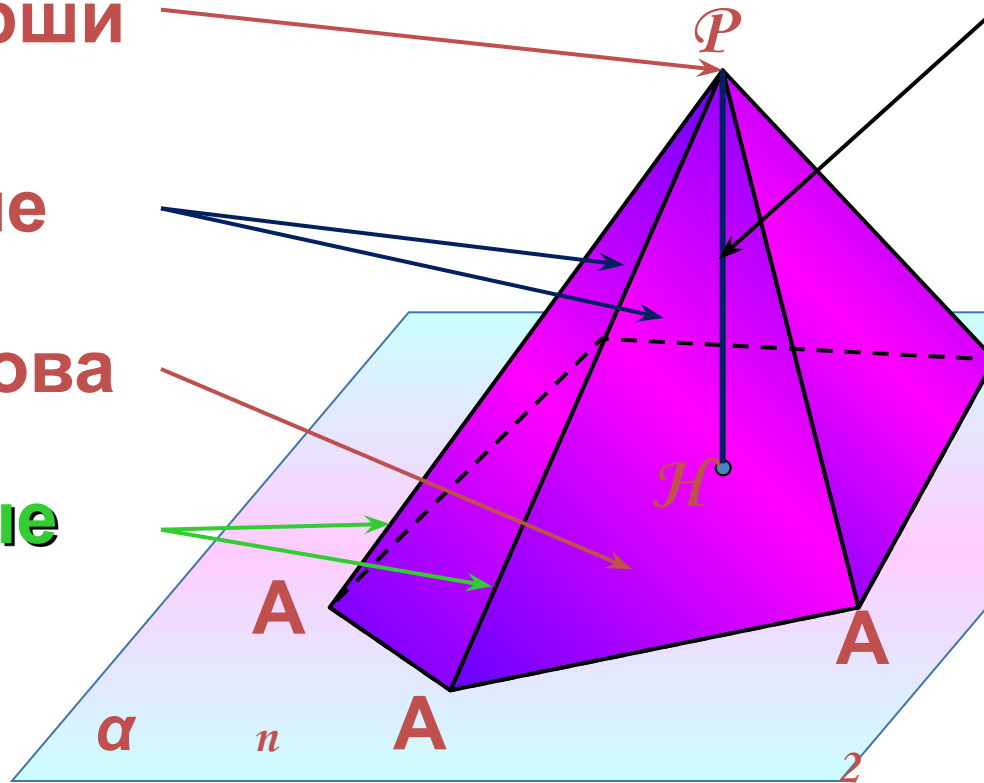
Начало геометрии пирамиды было положено в Древнем Египте и Вавилоне, однако активное развитие получило в Древней Греции. Первый, кто установил, чему равен объем пирамиды, был Демокрит а доказал Евдокс Книдский. Древнегреческий математик Евклид систематизировал знания о пирамиде в *XII* томе своих «Начал», а также вывел первое определение пирамиды: телесная фигура, ограниченная плоскостями, которые от одной плоскости сходятся в одной точке.

# Определение

**Пирамида** – многогранник,  
составленный из  $n$  - угольника

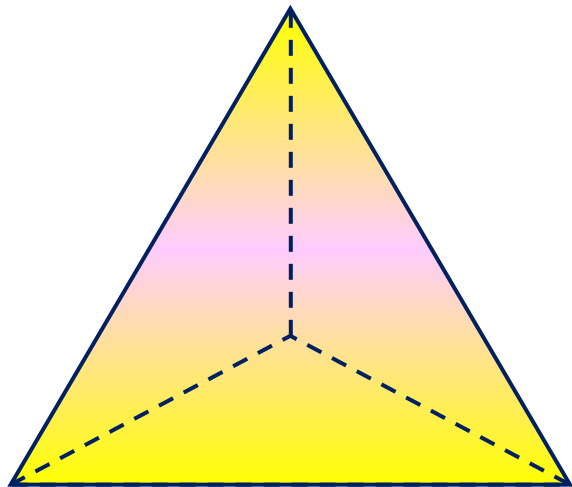
$A_1 A_2 \dots A_n$  и  $n$  треугольников

Верши  
на  
Боковые  
границы  
Основание  
Боковые  
ребра

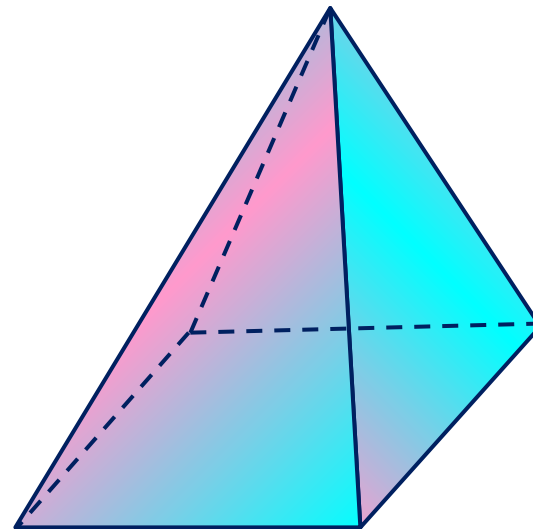


Высота –  
перпендику  
ляр,  
проведенн  
ый из  
вершины  
пирамиды  
к  
плоскости  
основания

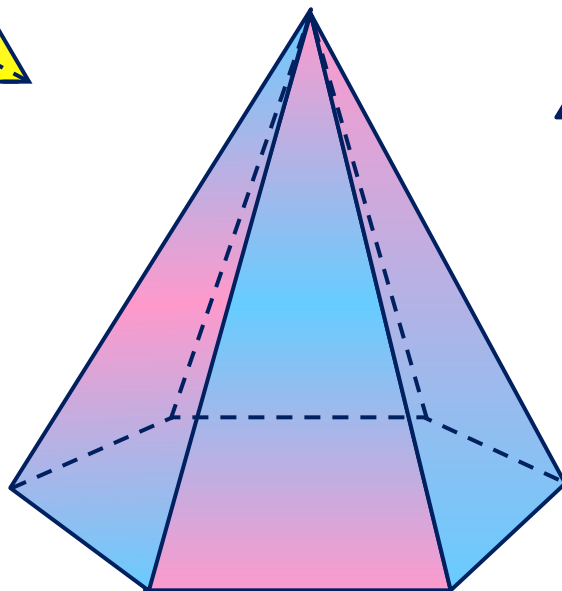
# Пирамиды



Треугольная  
пирамида  
(тетраэдр)



Четырехугол  
ьная  
пирамида



Шестиугольна  
я пирамида

# Площадь пирамиды

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} +$$

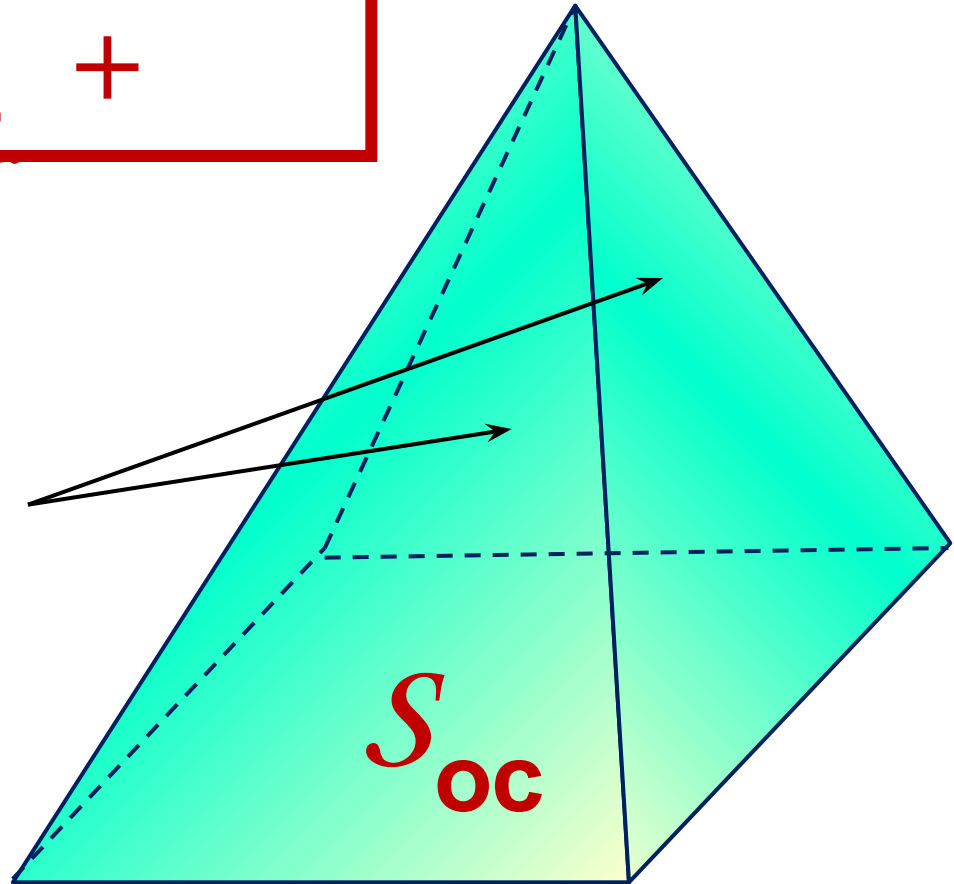
$S_{\text{осн.}}$

$S_{\text{бо}}$

к.

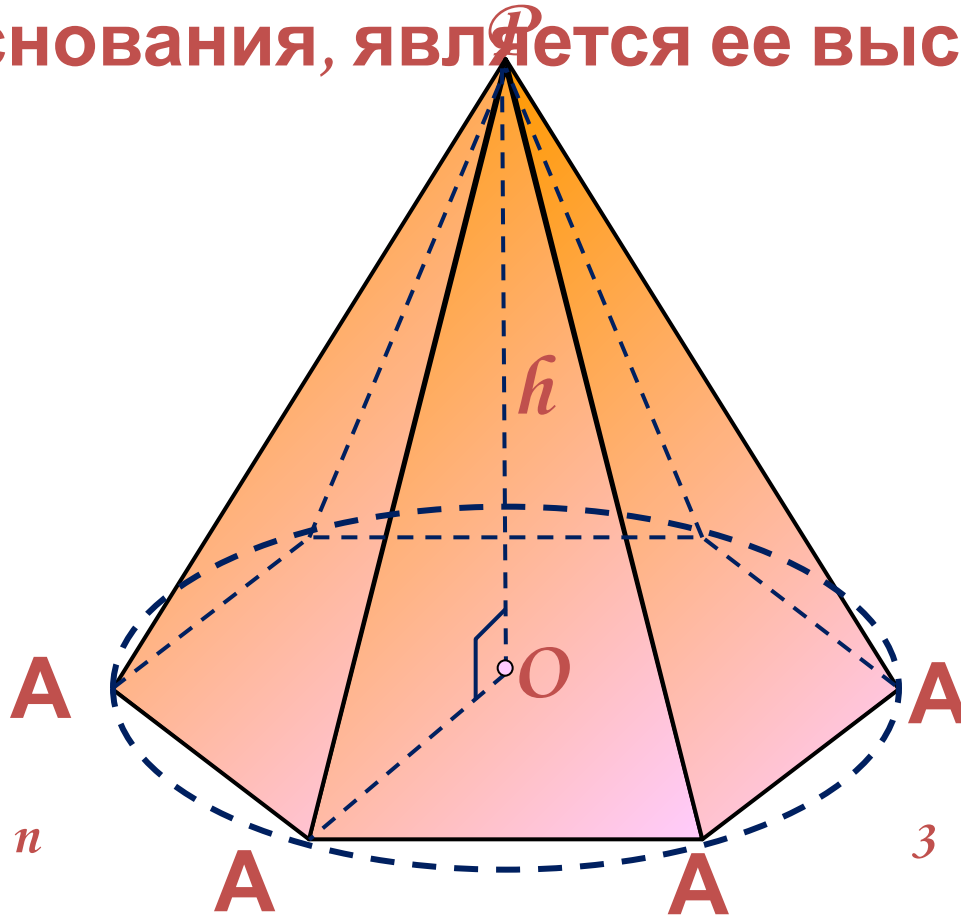
$S_{\text{ос}}$

н.



# ▶ Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной**, если ее основание – **правильный многоугольник**, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с **центром основания**, является ее **высотой**.



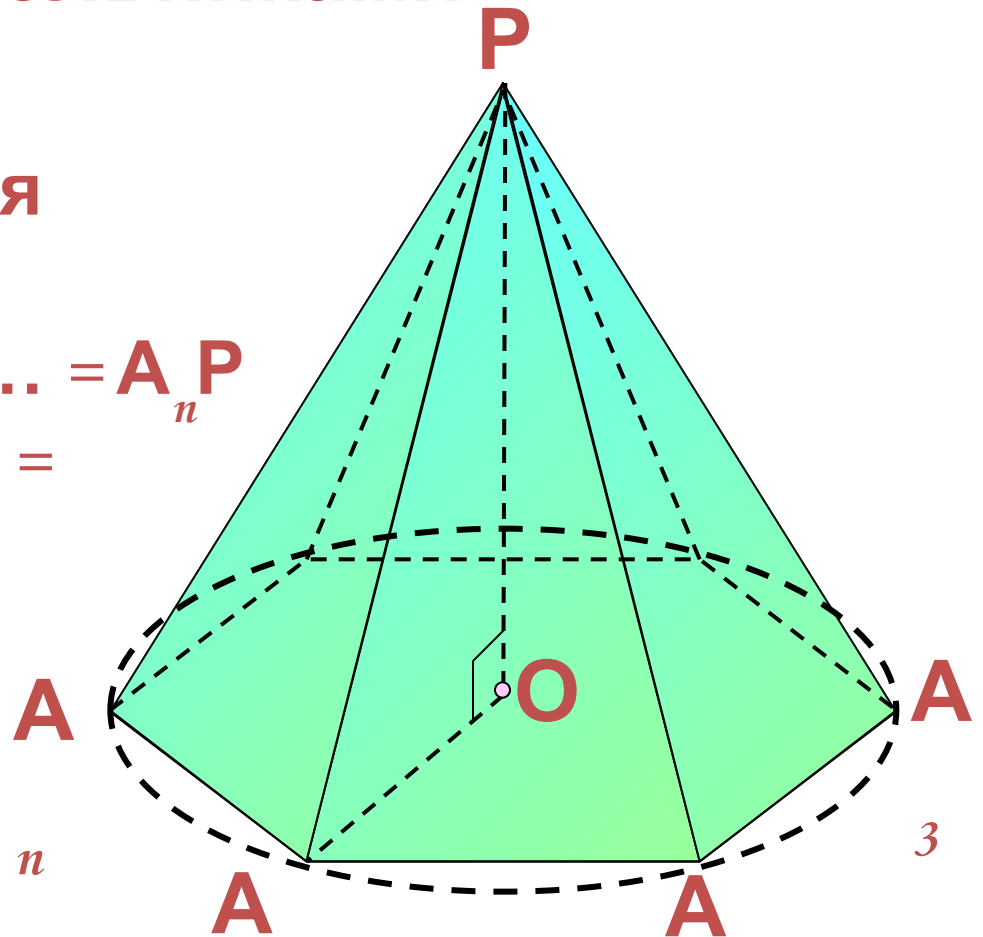
Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками

Дано:

$PA_1A_2\dots A_n$  – правильная пирамида

Док - ть: 1)  $PA_1 = PA_2 = \dots = PA_n$

2)  $\triangle PA_1A_2 = \triangle PA_2A_3 = \dots = \triangle PA_{n-1}A_n$  – р/б





# ◀ Док – во:

1) Рассмотрим  $\triangle OPA_1$  – п/у

$PO$  – высота  $h$ ,  $OA_1$  – радиус описанной окружности  $\mathcal{R}$

По теореме Пифагора:

$$A_1P = \sqrt{h^2 + \mathcal{R}^2}$$

$$A_2P = \sqrt{h^2 + \mathcal{R}^2} \quad \text{– любое боковое ребро}$$

2) т. к.  $\angle P A_1 A_2 = \angle P A_2 A_3 = \dots = \angle P A_{n-1} A_n$ ,

поэтому

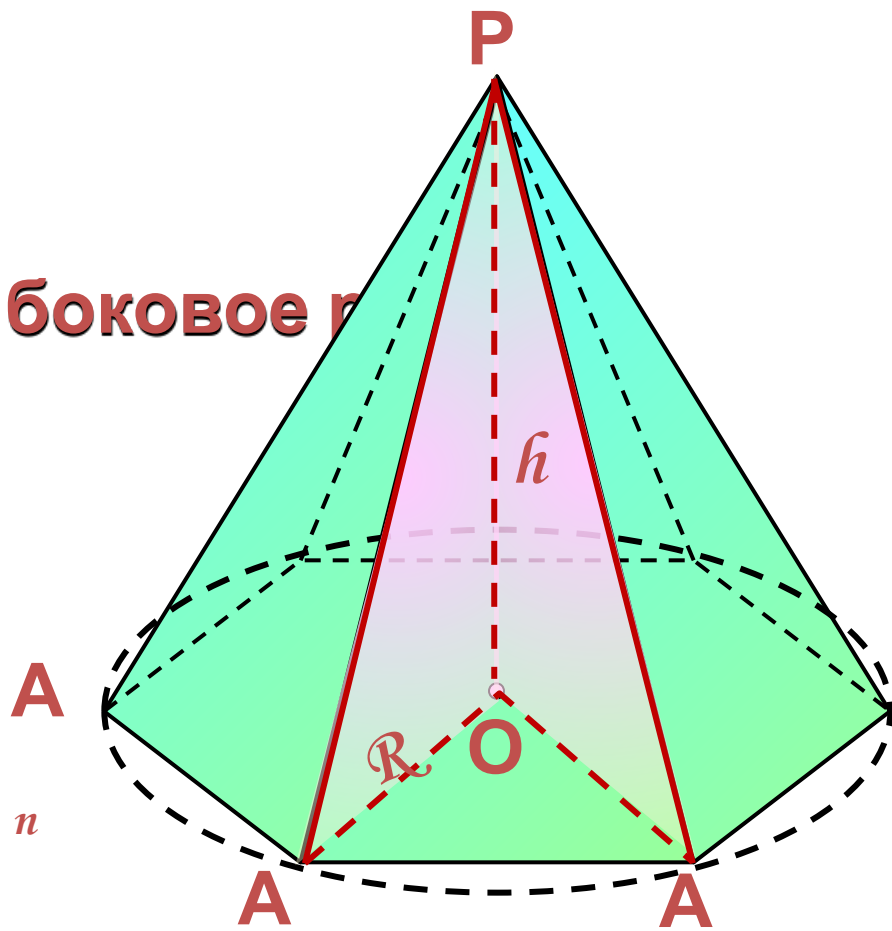
Боковые грани – р/б  $\triangle$

Основания ЭТИХ  $\triangle$

равны:

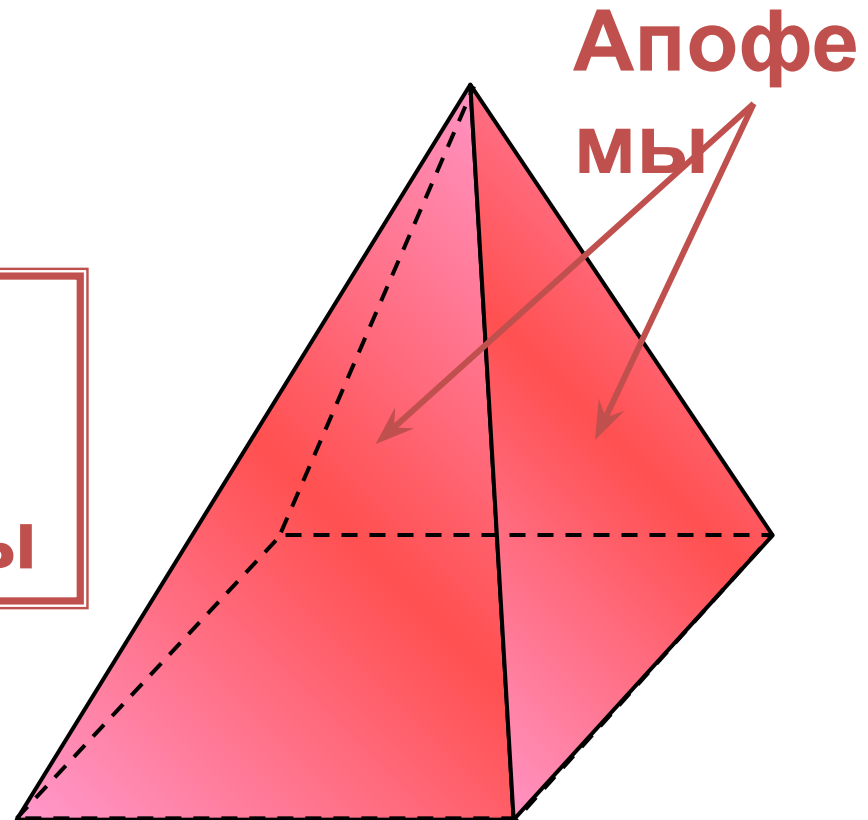
$$A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n$$

т. к.  $A_1A_2 \dots A_n \Rightarrow \triangle A_1A_2P = \dots = \triangle A_{n-1}A_nP$  – р/б



**Апофема** – высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины

Все апофемы  
правильной  
пирамиды равны  
друг другу



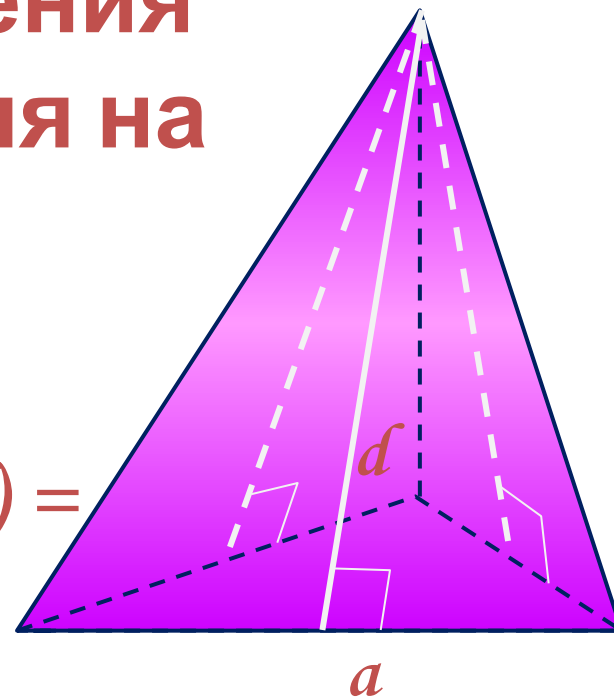
# Теорема о площади боковой поверхности правильной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}dP$$

Док – во:

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= (\frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}ad) = \\ &= \frac{1}{2}d(a + a + a) = \frac{1}{2}dP \end{aligned}$$



# Усеченная пирамида

многогранник,

образованный пирамидой и её сечением, параллельным

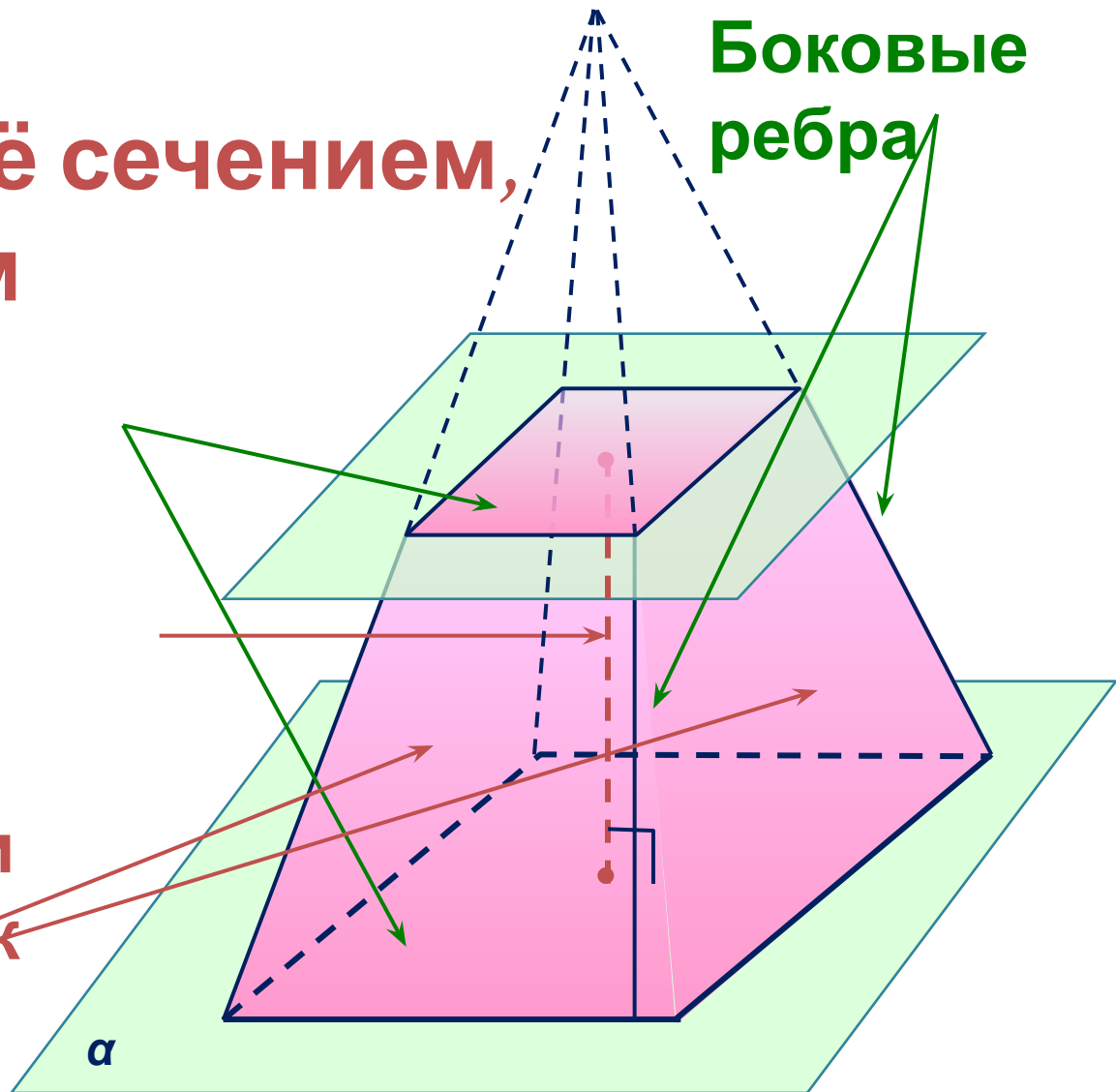
основанию.

Нижнее и верхнее основания

Высота

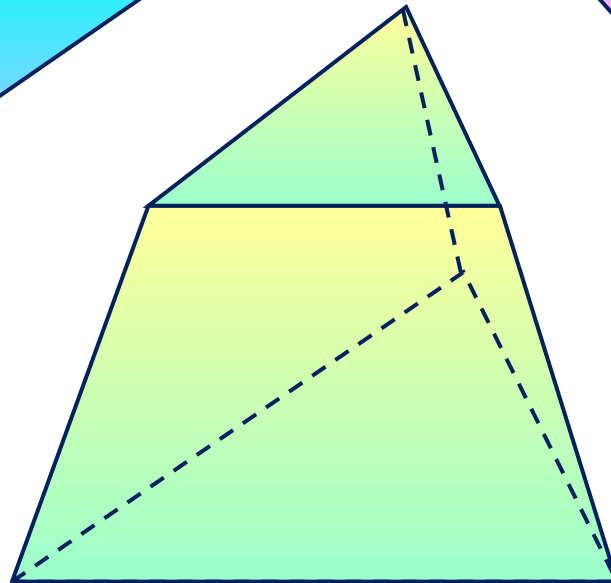
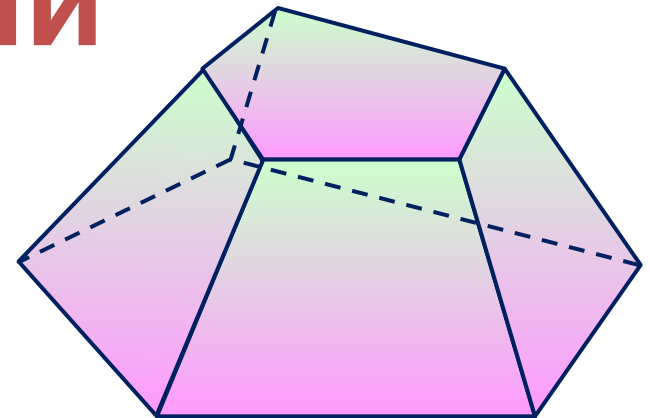
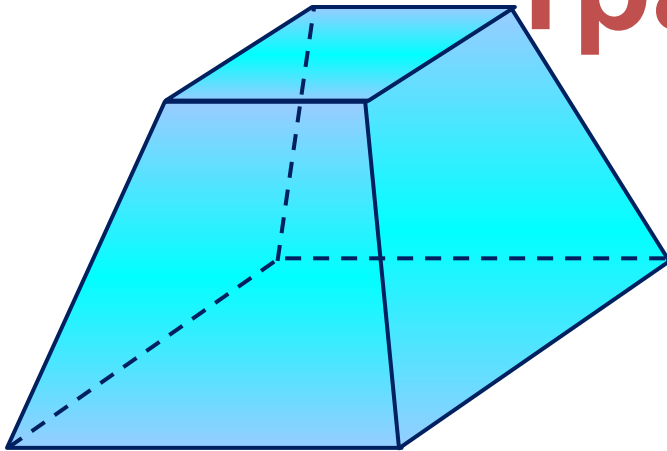
(перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания)

Боковые ребра



◀

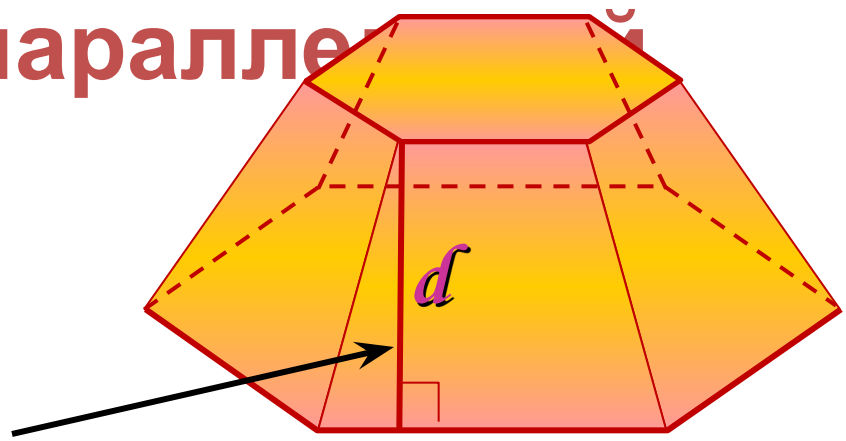
Все боковые грани  
усеченной пирамиды -  
трапеции





Усеченная пирамида называется **правильной**, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

Апофема  $d$  правильной усеченной пирамиды



# Теорема о площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot d$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= \frac{1}{2}d(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}d(a_1 + a_2) + \\ &+ \frac{1}{2}d(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}d(a_1 + a_2) = \\ &= \frac{1}{2}d(a_1 + a_2 + a_1 + a_2 + a_1 + a_2 + a_1 + a_2) = \\ &= \frac{1}{2}d(4a_1 + 4a_2) = \frac{1}{2}d(P_1 + P_2) \end{aligned}$$

