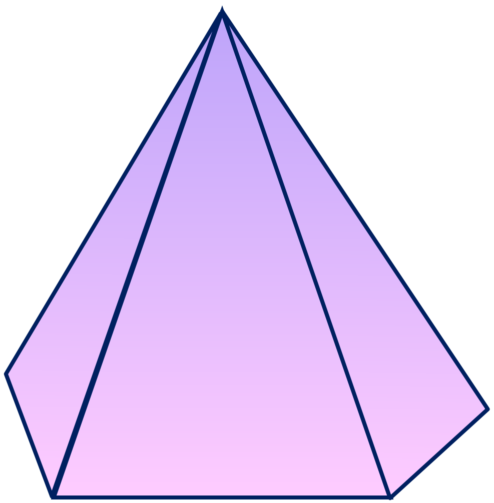
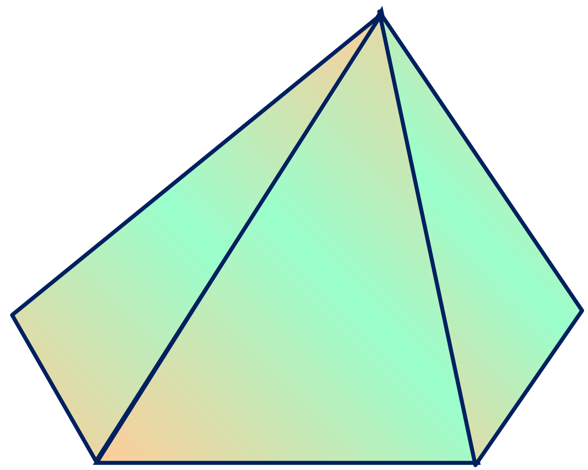
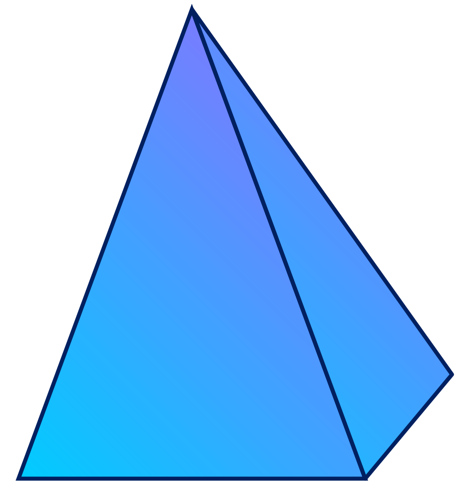
ПИРАМИДА

Содержание

История появления

Начало геометрии пирамиды было положено в Древнем Египте и Вавилоне, однако активное развитие получило в Древней Греции. Первый, кто установил, чему равен объем пирамиды, был Демокрит а доказал Евдокс Книдский. Древнегреческий математик Евклид систематизировал знания о пирамиде в XII томе своих «Начал», а также вывел первое определение пирамиды: телесная фигура, ограниченная плоскостями, которые от одной плоскости сходятся в одной точке.

Определение

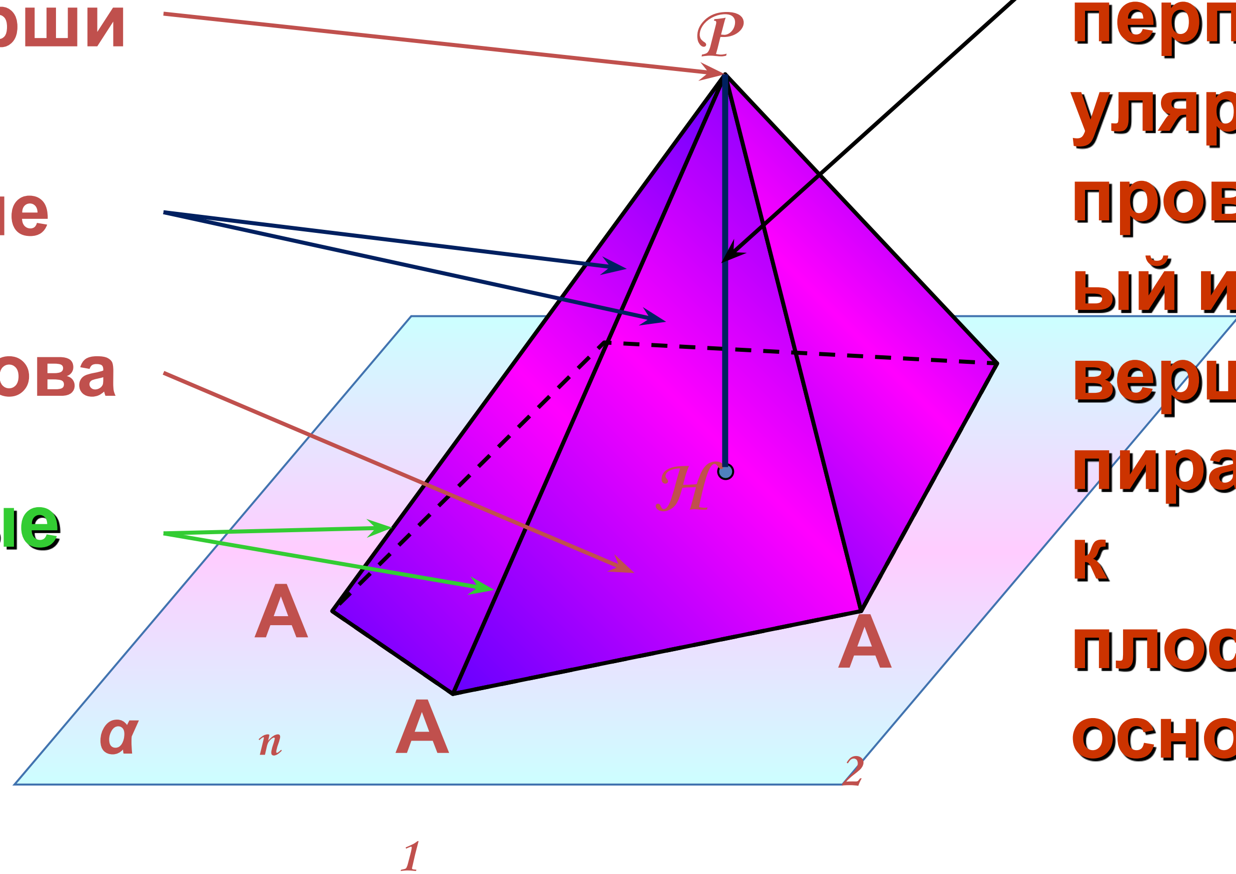
Пирамида – многогранник, составленный из n - угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и n треугольников

Вершина

Боковые грани

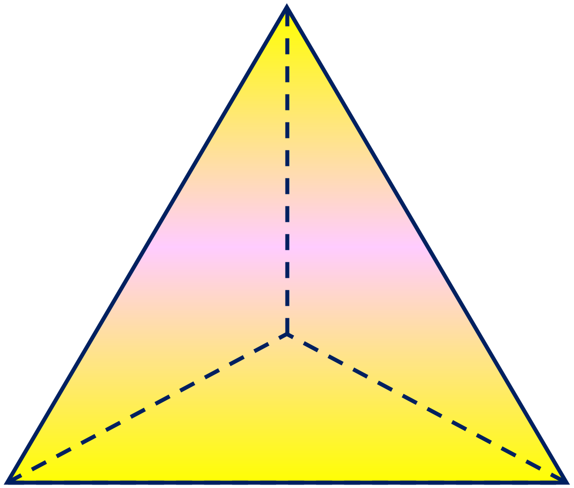
Основание

Боковые ребра

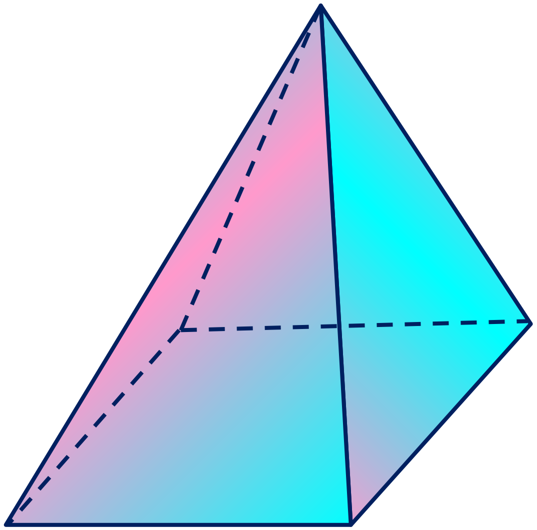


Высота – перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания

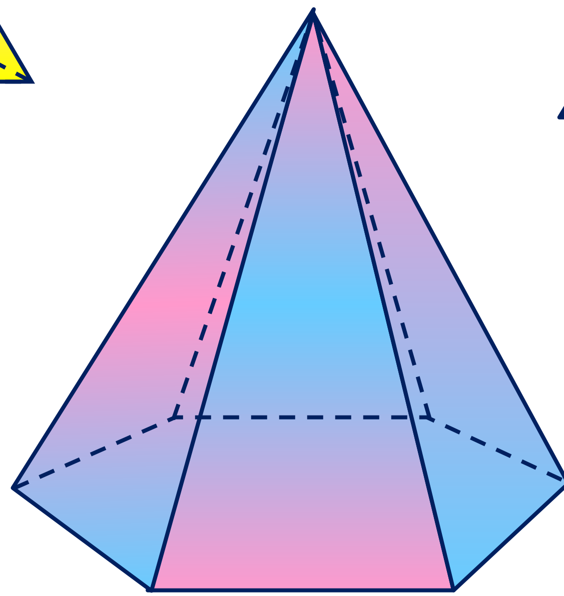
Пирамиды



Треугольная пирамида (тетраэдр)



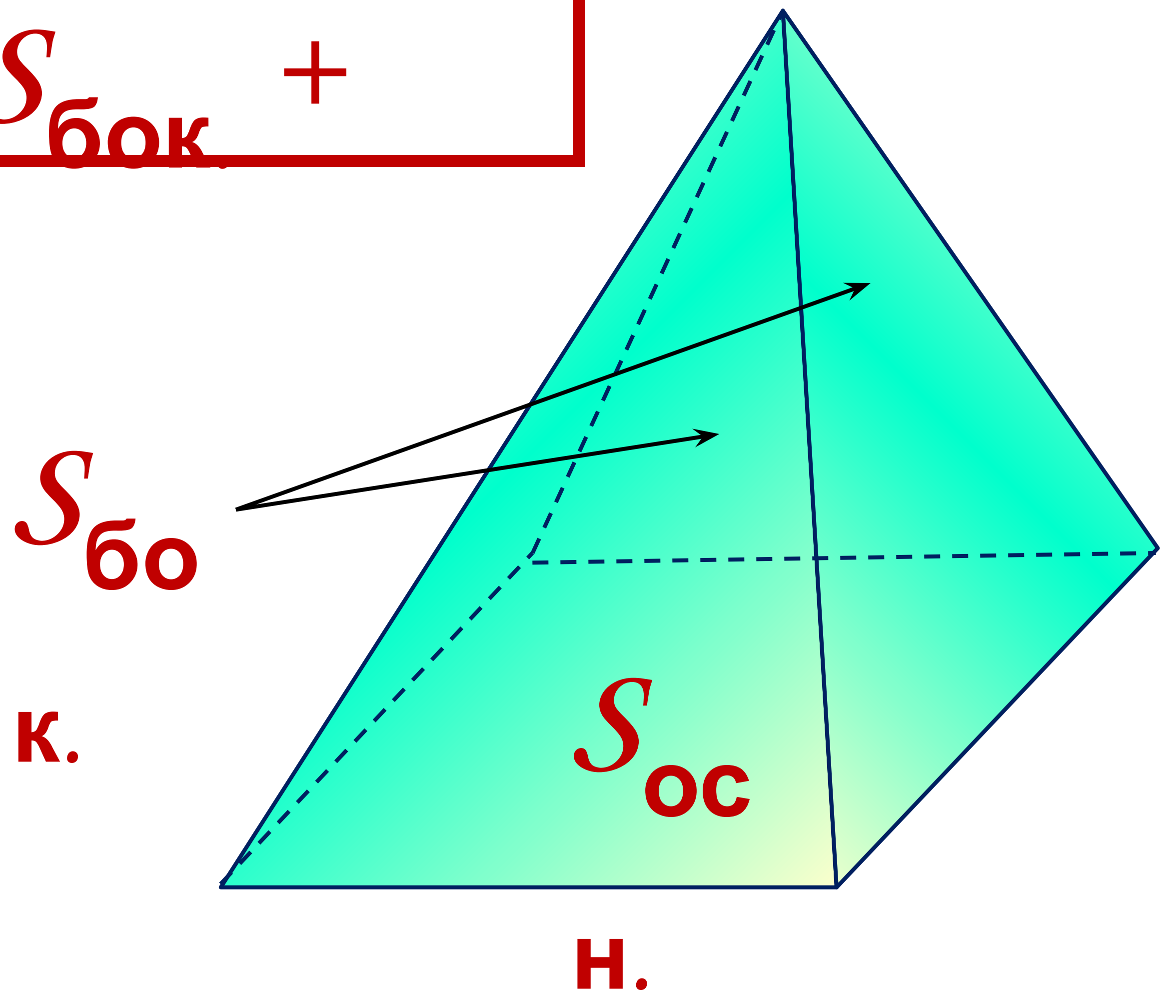
Четырехугольная пирамида



Шестиугольная пирамида

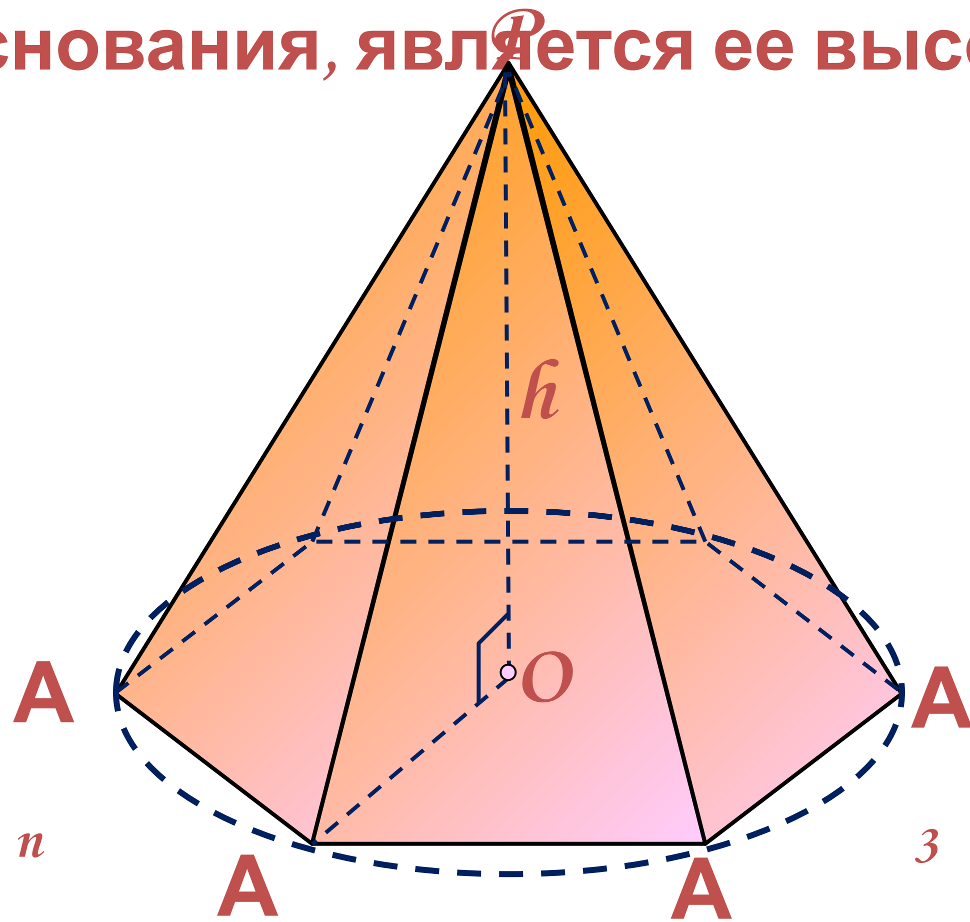
Площадь пирамиды

$$\boxed{S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}}$$



Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.



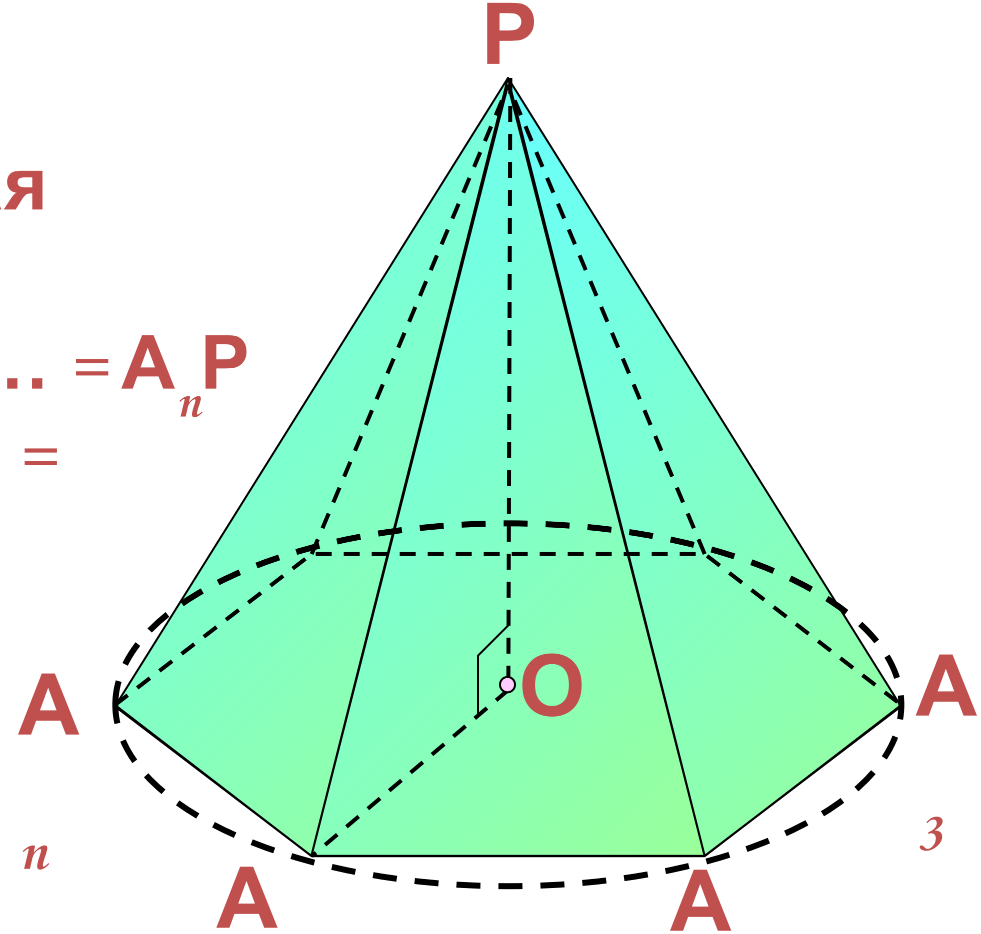
Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками

Дано:

$PA_1A_2\ldots A_n$ – правильная пирамида

Док-ть: 1) $A_1P = A_2P = \ldots = A_nP$

2) $\triangle A_1A_2P = \triangle A_2A_3P = \ldots = \triangle A_{n-1}A_nP$ – р/б



Док – во:

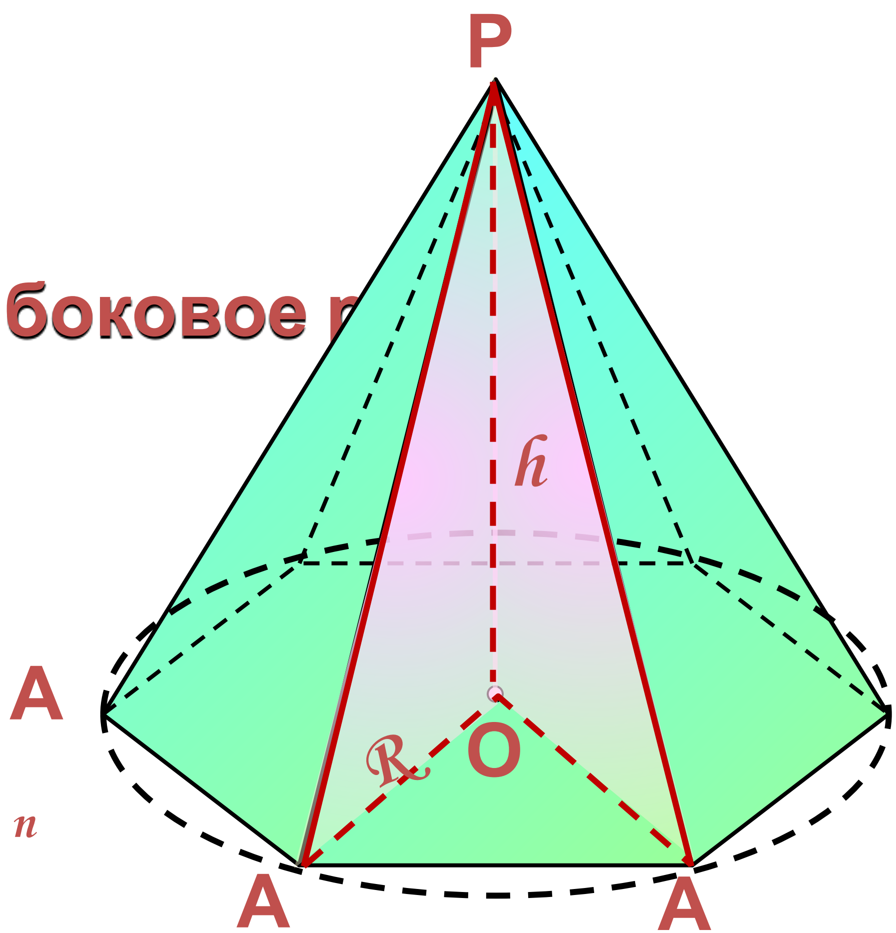
1) Рассмотрим $\triangle OPA_1$ – п/у

PO – высота h, OA_1 – радиус описанной окружности R.

По теореме Пифагора:

$A_1P = \sqrt{h^2 + R^2}$

$A_2P = \sqrt{h^2 + R^2}$ – любое боковое р



2) т. к. $PA_1 = PA_2 = \ldots = PA_n$, поэтому

Боковые грани – р/б $\triangle$

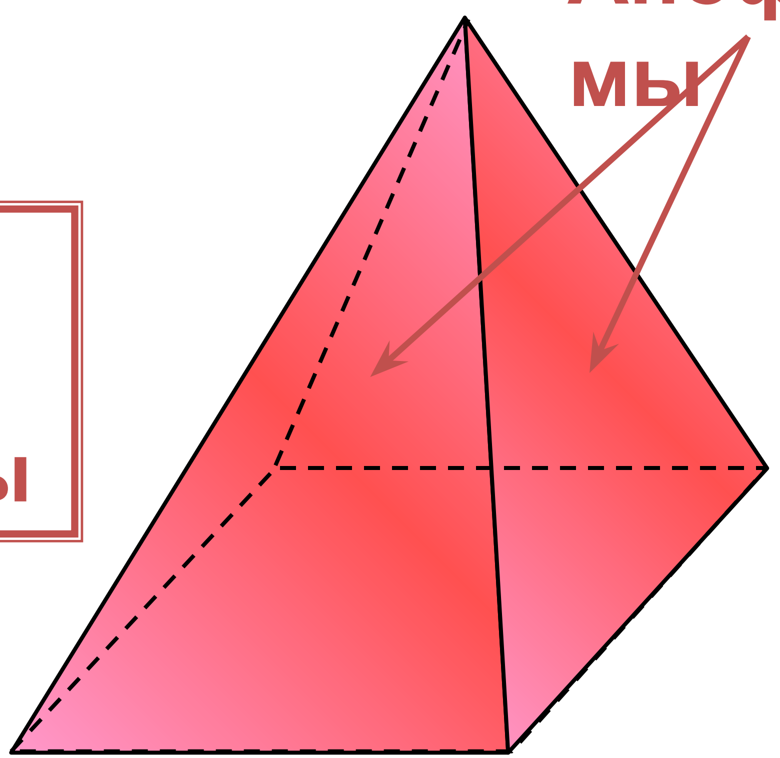
Основания этих $\triangle$ равны:

$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_1A_n$

т. к. $A_1A_2\ldots A_n$ – правильный

$\triangle A_1A_2P = \ldots = \triangle A_{n-1}A_nP$ – р/б

Апофема – высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины



Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу

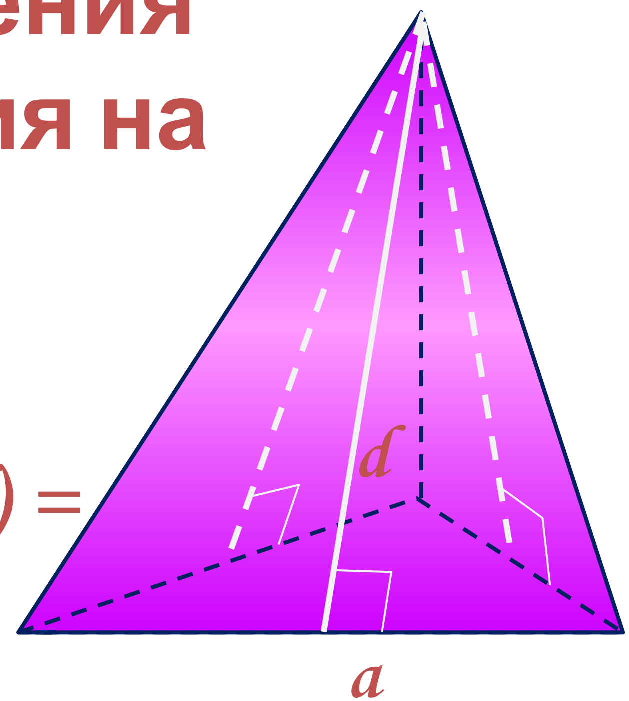
Теорема о площади боковой поверхности правильной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему

$$\boxed{S_{бок} = \tfrac{1}{2}dP}$$

Док – во:

$$S_{бок} = \left(\tfrac{1}{2}ad + \tfrac{1}{2}ad + \tfrac{1}{2}ad\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}d(a + a + a) = \tfrac{1}{2}dP$$



Усеченная пирамида

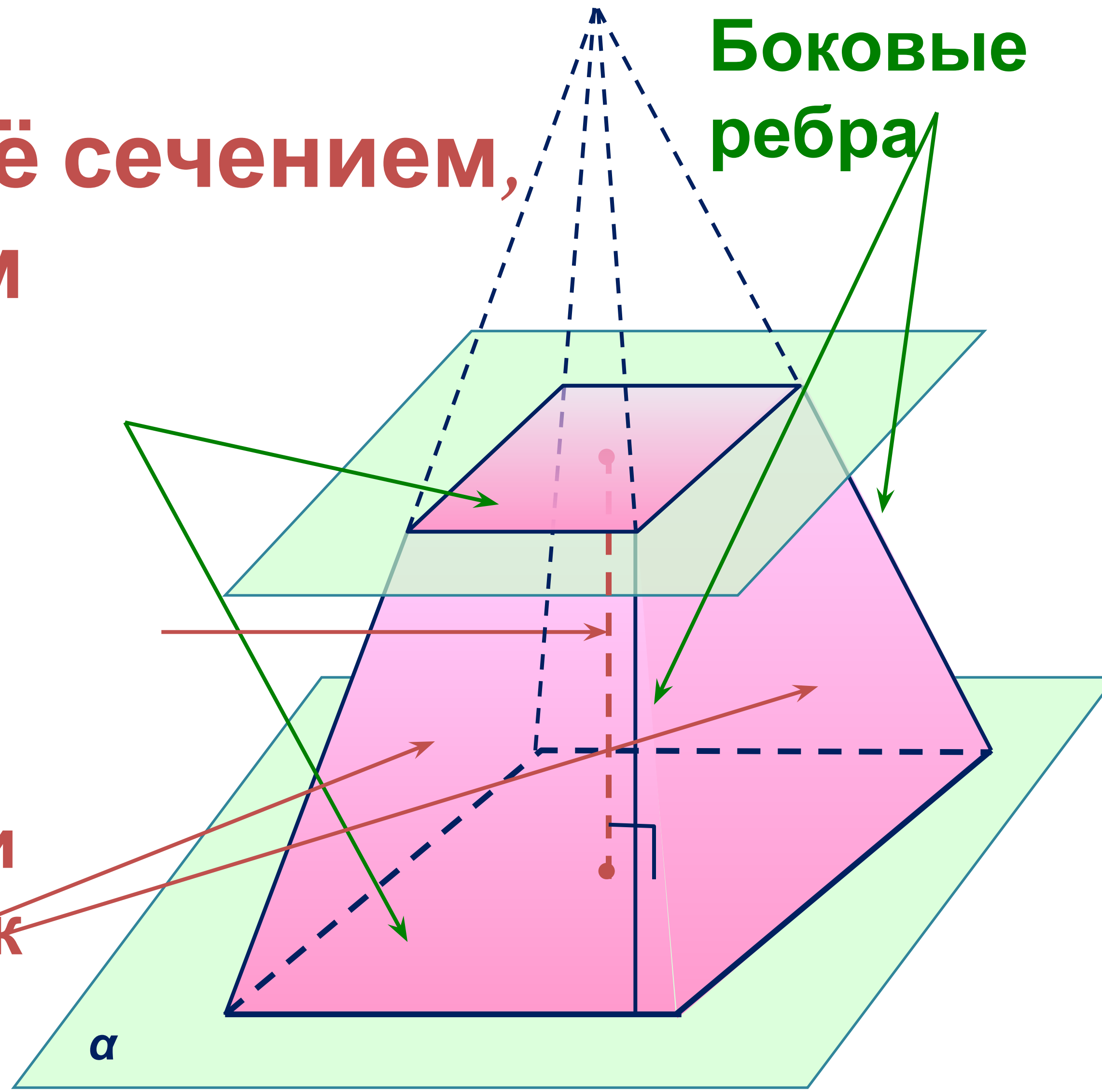
многогранник, образованный пирамидой и её сечением, параллельным основанию.

Нижнее и верхнее основания

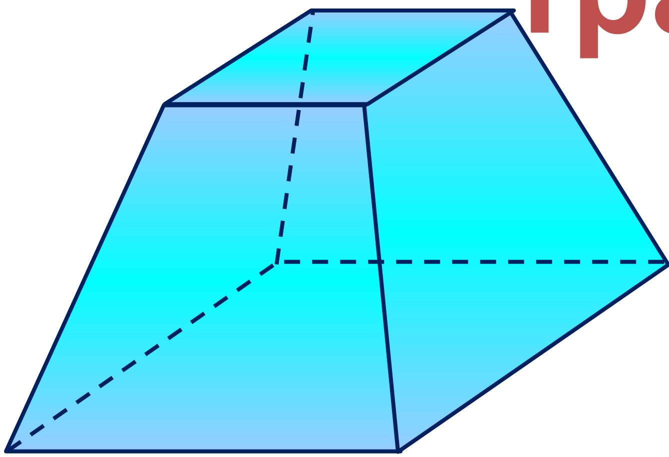
Высота (перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания)

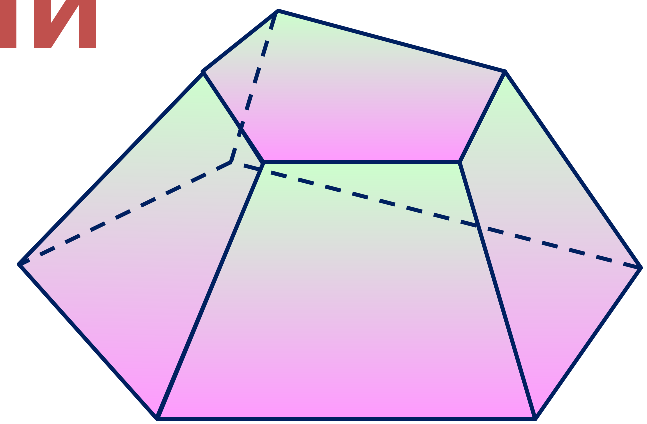
Боковые грани

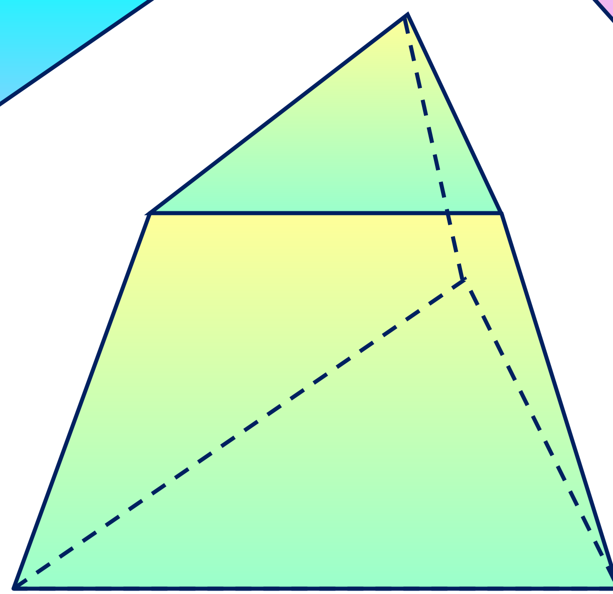
Боковые ребра



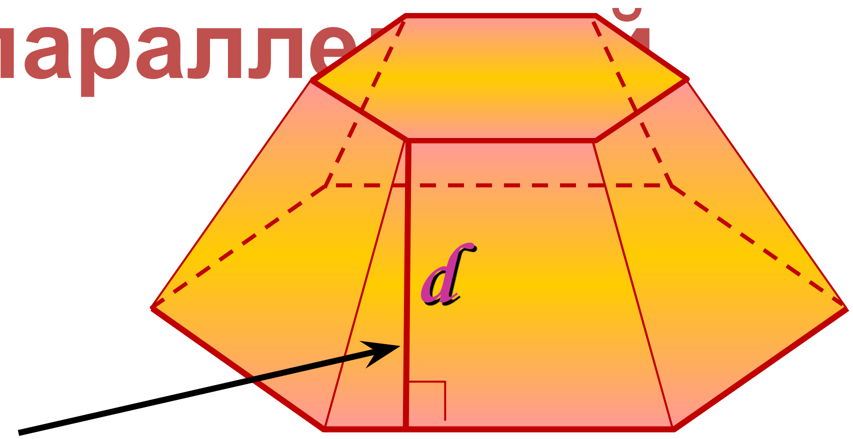
Все боковые грани усеченной пирамиды - трапеции







Усеченная пирамида называется **правильной**, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию.



Апофема d правильной усеченной пирамиды

Теорема о площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему

$$S_{бок} = \tfrac{1}{2}(P_1 + P_2)\,d$$

Док – во:

$S_{бок} = \tfrac{1}{2}d(a_1+a_2) + \tfrac{1}{2}d(a_1+a_2) +$

$+ \tfrac{1}{2}d(a_1+a_2) + \tfrac{1}{2}d(a_1+a_2) =$

$= \tfrac{1}{2}d(a_1 + a_2 + a_1 + a_2 + a_1 + a_2 + a_1 + a_2) =$

$= \tfrac{1}{2}d(4a_1 + 4a_2) = \tfrac{1}{2}d(P_1 + P_2)$