

A stylized, light-colored illustration of a plant with a central stem, several large leaves, and a cluster of small, round buds or flowers at the top, set against a dark brown background.

# ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Урок обобщения и  
систематизации знаний

Выполнила  
Учитель математики I категории  
МБОУ Федосеевской СОШ  
Лозовая Раиса Михайловна

1. Показательная функция

2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ

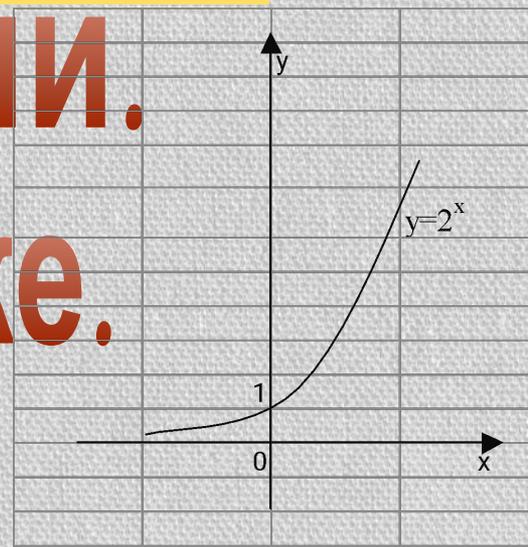
ФУНКЦИЯ

И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В

ПРИРОДЕ И ТЕХНИКЕ.

3. В биологии.

4. В экономике.



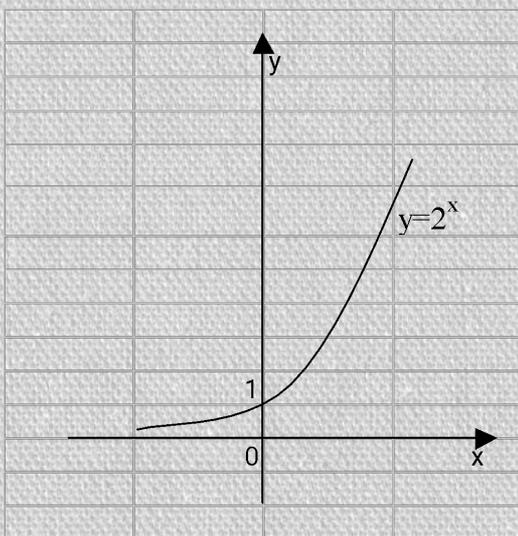
# «ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ».

Некоторые наиболее часто  
встречающиеся виды  
трансцендентных функций,  
прежде всего показательные,  
открывают доступ ко  
многим исследованиям.

Л.Эйлер.



# Графики функции $y=2^x$ и $y=(\frac{1}{2})^x$

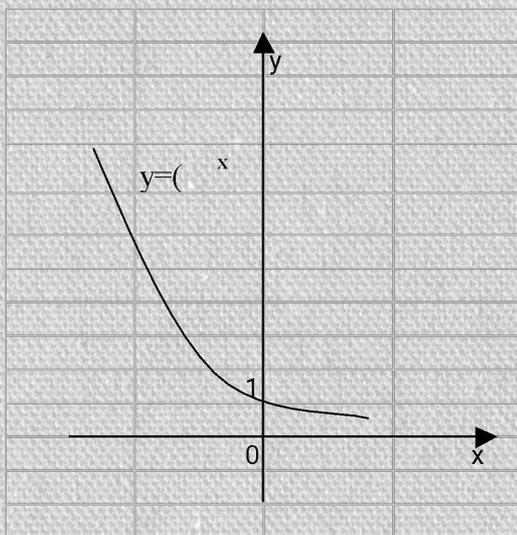


1. График функции  $y=2^x$  проходит через точку  $(0;1)$  и расположен выше оси  $Ox$ .

**$a > 1$      $D(y): x \in \mathbb{R}$**

**$E(y): y > 0$**

**Возрастает на всей области определения.**



2. График функции  $y=(\frac{1}{2})^x$  также проходит через точку  $(0;1)$  и расположен выше оси  $Ox$ .

**$0 < a < 1$      $D(y): x \in \mathbb{R}$**

**$E(y): y > 0$**

**Убывает на всей области определения.**

# Блиц – опрос

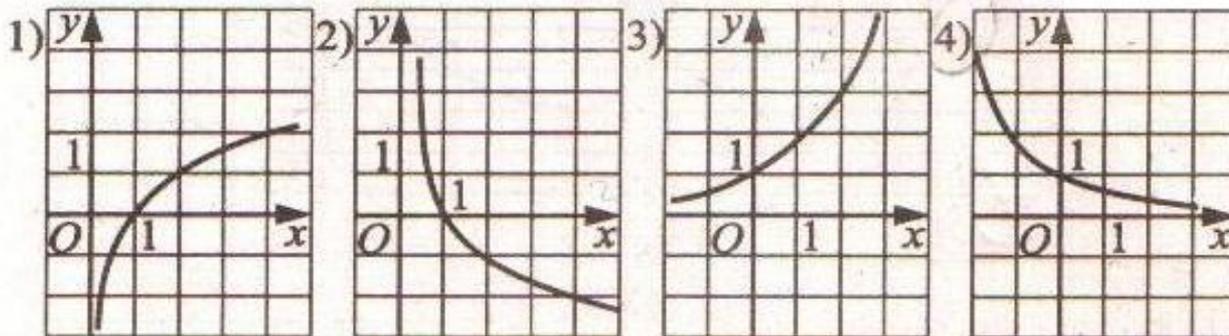
- 1.Какая функция называется показательной?
- 2.Какова область определения функции  $y=0,3x$ ?
- 3.Каково множество значения функции  $y=3x$ ?
4. Дайте определение возрастающей, убывающей функции.
- 5.При каком условии показательная функция является возрастающей?
- 6.При каком условии показательная функция является убывающей?
- 7.Возрастает или убывает показательная функция

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad y = 4^x$$

- 8.Определить при каком значении  $a$  функция  $y = a^x$  проходит через точку  $A(1; 2)$ ;

9

Укажите график функции, заданной формулой  $y = 0,5^x$



Какие из перечисленных функций являются возрастающими, а какие убывающими?

1)  $y = 5^x$       *возрастающая, т.к.  $5 > 1$*

2)  $y = 0,5^x$       *убывающая, т.к.  $0 < 0,5 < 1$*

3)  $y = 10^x$       *возрастающая, т.к.  $10 > 1$*

4)  $y = \pi^x$       *возрастающая, т.к.  $\pi > 1$*

какие из функций являются  
возрастающими, а какие  
убывающими?

$$5) y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad \text{убывающая, т.к. } 0 < \frac{2}{3} < 1$$

$$6) y = 49^{-x} \quad \text{убывающая, т.к. } 49^{-1} = \frac{1}{49} \text{ и } 0 < \frac{1}{49} < 1$$

# Показательные уравнения.

Уравнения, у которых неизвестное находится в показателе степени, называются показательными.

Способы решения:

1. По свойству степени;
2. Вынесение общего множителя за скобки;
3. Деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, принимающее значение отличное от нуля при всех действительных значениях  $x$ ;
4. Способ группировки;
5. Сведение уравнения к квадратному;
6. Графический.

Например:

$$3^{2x+6} = 2^{x+3}$$

Решение.

$$(3^2)^{x+3} = 2^{x+3}$$

$$9^{x+3} = 2^{x+3}$$

т.к.  $2 \neq 0$ , тогда  $\left(\frac{9}{2}\right)^{x+3} = 1$

$$\left(\frac{9}{2}\right)^{x+3} = \left(\frac{9}{2}\right)^0$$

$$x+3 = 0$$

$$x = -3$$

Ответ.  $x = -3$ .

$$9^{-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{27}$$

Решение.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$(2\sqrt{x-1})^2 = 3^2$$

$$4x - 4 = 9$$

$$4x = 13$$

$$x = 3,25$$

Ответ.  $x = 3,25$ .

УСТНО):

$$\bullet 5^x = 25$$

$$\underline{\mathbf{x=2}}$$

$$\bullet 7^{x-2} = 49$$

$$\underline{\mathbf{x=4}}$$

$$\bullet 4^x = 1$$

$$\underline{\mathbf{x=0}}$$

$$\bullet 5,7^{x-3} = 1$$

$$\underline{\mathbf{x=3}}$$

$$\bullet 2 \cdot 2^x = 64$$

$$\underline{\mathbf{x=5}}$$

$$\bullet 3 \cdot 9^x = 81$$

$$\underline{\mathbf{x=1,5}}$$

$$\bullet 5^x = 7^x$$

$$\underline{\mathbf{x=0}}$$

$$\bullet 3,4^{x+2} = 4,3^{x+2}$$

$$\underline{\mathbf{x=-2}}$$

# Указать способы решения показательных уравнений.

1.  $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31$     5.  $36 \cdot 216^{3x+1} = 1$     9.  $3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 36$

2.  $27^{1-x} = \frac{1}{81}$

6.  $3^{2x+1} - 8 \cdot 3^x = 3$

10.  $49^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^x$

3.  $9^x - 3^{x+1} = 54$

7.  $3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = 4$

11.  $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5$

4.  $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

8.  $4^{2x+2} + 4^{x+1} - 1 = 0$

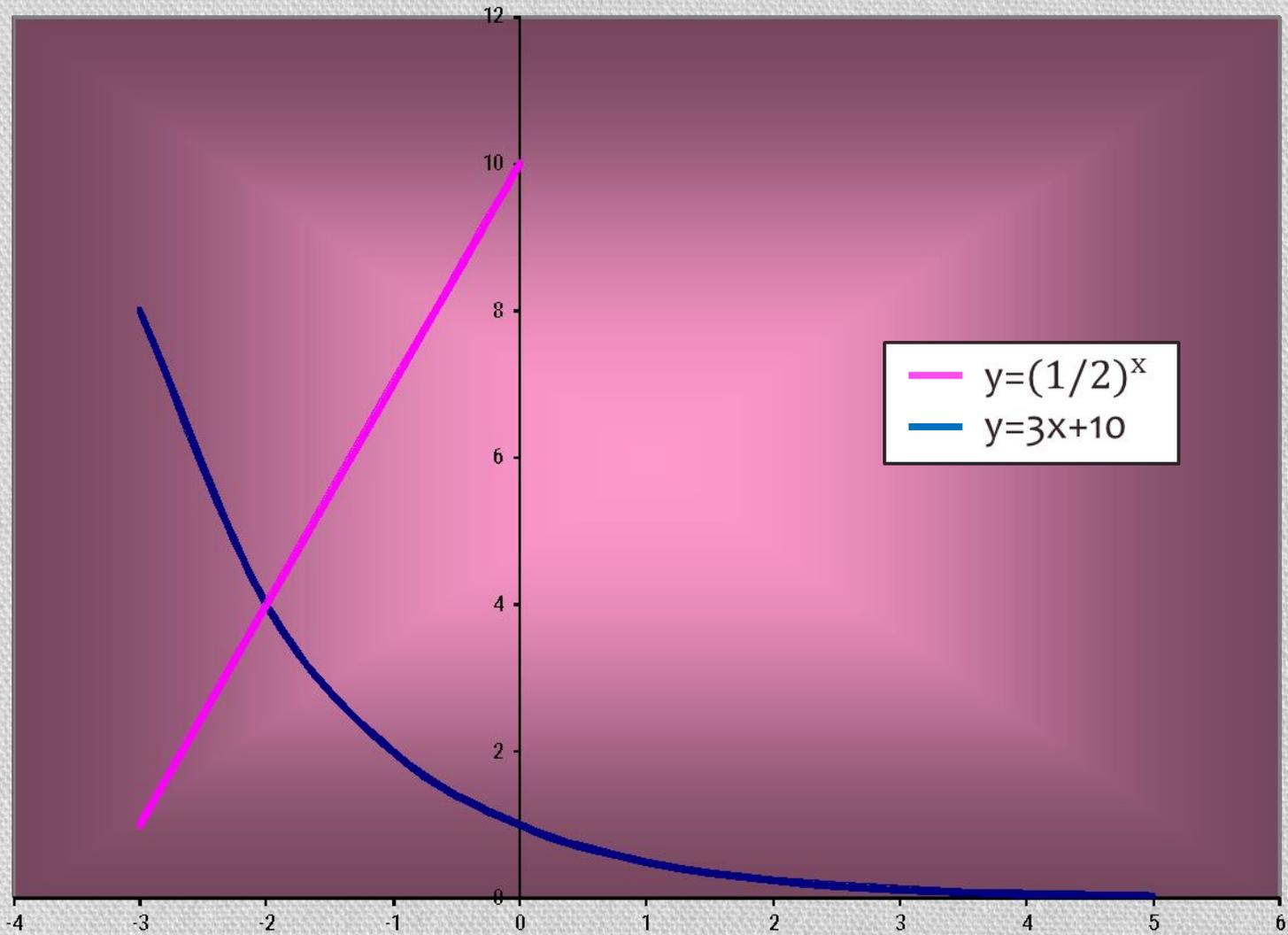
12.  $9 \cdot 81^{1-2x} = 27^{2-x}$

# Диагностика уровня формирования практических навыков

|  |   |  |
|--|---|--|
| <b>Приведение к<br/>одному<br/>основанию</b> | <b>Вынесение<br/>общего<br/>множителя за<br/>скобки</b> | <b>Замена<br/>переменного<br/>(приведение к<br/>квадратному)</b> |
| 2, 5, 10, 12                                 | 1, 7, 9, 11   | 3, 4, 6, 8   |

Чтобы решить графически уравнение  $f(x) = g(x)$ , надо:

- построить графики функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$
- найти абсциссу точки пересечения графиков функций
- рассмотреть возможность существования других точек пересечения



# Определение

Показательные неравенства –

это неравенства, в которых

неизвестное содержится в

показателе степени.

Примеры:  $3^x \leq 9;$   $2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$

# Показательные неравенства

решаются по следующим свойствам показательной функции:

• если  $a > 1$ , то неравенство справедливо  $\Leftrightarrow$   $a^{x_1} < a^{x_2}$   
 $x_1 < x_2$

• если  $0 < a < 1$ , то неравенство справедливо  $\Leftrightarrow$   $a^{x_1} > a^{x_2}$   
 $x_1 < x_2$

## (устно):

$$\bullet 2^x > 0$$

$x$ -любое

$$\bullet 2^x > 1$$

$x > 0$

$$\bullet \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 1$$

$x \leq 0$

$$\bullet \left(\frac{1}{2}\right)^x < 0$$

$x = \emptyset$

$$\bullet 5^x > 25$$

$x > 2$

$$0,7^x < 0,49$$

$x > 2$

$$\bullet 0,2^{x+1} < 0,2^4$$

$x > 3$

$$\bullet 9,7^{x-2} < 9,7^{10}$$

$x < 12$

# Решения показательных неравенств:

1. Способ Уравнивание оснований правой  
и левой части

**Решите неравенство:**

$$3^x > 81$$

$$3^x > 3^4$$

*т.к.  $3 > 1$ , то функция  $y = 3^x$  возрастающая*

$$\underline{x > 4}$$

$$x \in (4; +\infty)$$

# Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

т.к.  $0 < \frac{1}{2} < 1$ , то функция  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  убывающая

$$x \leq \frac{3}{2}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$$

# Решение показательных неравенств

Способ 2: Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$3^{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3^x > 10$$

$$3^{x-3} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 3^3\right) > 10$$

$$3^{x-3} (1 + 9) > 10$$

$$3^{x-3} \cdot 10 > 10 \quad | : 10$$

$$3^{x-3} > 1$$

$$3^{x-3} > 3^0$$

$$3 > 1, \text{ то } x - 3 > 0$$

$$x > 3.$$

Ответ:  $x > 3$

# Решение показательных неравенств

Способ 3: введение новой переменной

$$9^x - 10 \cdot 3^x < -9$$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0)$$

$$t^2 - 10t + 9 < 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

$$t_1 = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$t_2 = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$(t-9)(t-1) < 0$$



$$1 < t < 9$$

$$1 < 3^x < 9$$

$$3^x < 3^2; \quad 3^x > 3^0;$$
$$x < 2 \quad x > 0.$$

$3 > 1$ , то

Ответ:  $x < 2$ .  $x > 0$



# **ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ**

*И её применение в  
природе и технике.*



## Подумайте! Где может использоваться показательная функция?



- Тема «Показательная функция» является основополагающей при изучении таких тем, как «Производная показательной функции», «Термодинамика», «Электромагнетизм», «Ядерная физика», «Колебания», используется для решения некоторых задач судовождения.

# Наглядный бытовой пример!

- Все, наверное, замечали, что если снять кипящий чайник с огня, то сначала он быстро остывает, а потом остывание идет гораздо медленнее. Дело в том, что скорость остывания пропорциональна разности между температурой чайника и температурой окружающей среды. Чем меньше становится эта разность, тем медленнее остывает чайник. Если сначала температура чайника равнялась  $T_0$ , а температура воздуха  $T_1$ , то через  $t$  секунд температура  $T$  чайника выразится формулой:
- $T = (T_1 - T_0)e^{-kt} + T_1$ ,
- где  $k$  - число, зависящее от формы чайника, материала, из которого он сделан, и количества воды, которое в нем находится.

При падении тел в безвоздушном пространстве скорость их непрерывно возрастает.

- При падении тел в воздухе скорость падения тоже увеличивается, но не может превзойти определенной величины.

- Рассмотрим задачу о падении парашютиста. Если считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости падения парашютиста, т.е. что  $F = kv$ , то через  $t$  секунд скорость падения будет равна:  $v = mg/k(1 - e^{-kt/m})$ , где  $m$  - масса парашютиста. Через некоторый промежуток времени  $e^{-kt/m}$  станет очень маленьким числом, и падение станет почти равномерным. Коэффициент пропорциональности  $k$  зависит от размеров парашюта. Данная формула пригодна не только для изучения падения парашютиста, но и для изучения падения капли дождевой воды, пушинки и т.д.

- Много трудных математических задач приходится решать в теории межпланетных путешествий. Одной из них является задача об определении массы топлива, необходимого для того, чтобы придать ракете нужную скорость  $v$ . Эта масса  $M$  зависит от массы  $m$  самой ракеты (без топлива) и от скорости  $v_0$ , с которой продукты горения вытекают из ракетного двигателя.

- Если не учитывать сопротивление воздуха и притяжение Земли, то масса топлива определится формулой:  
 $M = m(ev/v_0 - 1)$  (формула К.Э. Циолковского). Например, для того чтобы ракете с массой 1,5 т придать скорость 8000 м/с, надо при скорости истечения газов 2000 м/с взять примерно 80 т топлива.

- Если при колебаниях маятника, гири, качающейся на пружине, не пренебрегать сопротивлением воздуха, то амплитуда колебаний становится все меньше, колебания затухают. Отклонения точки, совершающей затухающие колебания, выражается формулой:  $s = Ae^{-kt} \sin(\omega t + \varphi)$ . Так как множитель  $e^{-kt}$  уменьшается с течением времени, то размах колебаний становится все меньше и меньше.

- Когда радиоактивное вещество распадется, его количество уменьшается. Через некоторое время остается половина первоначального количества вещества. Этот промежуток времени  $t_0$  называется периодом полураспада. Вообще через  $t$  лет масса  $m$  вещества будет равна:  $m = m_0(1/2)^{t/t_0}$ , где  $m_0$  - первоначальная масса вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество.
- Явление радиоактивного распада используется для определения возраста археологических находок, например, определен примерный возраст Земли, около 5,5 млрд. лет, для поддержания эталона времени.

Задача:

*Период полураспада плутония равен 140 суткам. Сколько плутония останется через 10 лет, если его начальная масса равна 8г ?*

*Решение.*

$$T = 140 \text{ сут.}$$

$$t = 10 \text{ лет}$$

$$m_0 = 8 \text{ г}$$

$$m = ?$$

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$t = 365 \cdot 10 = 3650 \text{ (дней)}$$

$$m(t) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3650}{140}} = 1,1345 \cdot 10^{-7} \text{ (г)} = 1,13 \cdot 10^{-7} \text{ (г)}.$$

**Ответ:  $1,13 \cdot 10^{-7}$  (г).**



- **Как видите, во всех приведенных выше исследованиях использовалась показательная функция.**

• Вот некоторые из Нобелевских лауреатов, получивших премию за исследования в области физики с использованием показательной функции:

• Пьер Кюри - 1903 г.

• Ричардсон Оуэн - 1928 г.

• Игорь Тамм - 1958 г.

• Альварес Луис - 1968 г.

• Альфвен Ханнес - 1970 г.

• Вильсон Роберт Вудро - 1978 г.

# Она не перестаёт нас удивлять!

- Показательная функция также используется при решении некоторых задач судовождения, например, функцию  $e^{-x}$  используют в задачах, требующих применения биномиального закона (повторение опытов), закона Пуассона (редких событий), закона Релея (длина случайного вектора).



*Применение  
показательной  
функции  
в биологии .*



# Применение логарифмической функции в биологии.

В питательной среде бактерия кишечной палочки делится каждую минуту. Понятно, что общее число бактерий за каждую минуту удваивается. Если в начале процесса была одна бактерия, то через  $x$  минут их число ( $N$ ) станет равной  $2^x$ , т.е.

$$N(x) = 2^x.$$



# **ПРИМЕНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В ЭКОНОМИКЕ**



**Задача:** Ежемесячно на банковский вклад, равный  $S_0$  рублей начисляется  $r\%$ . На сколько процентов возрастет банковский вклад за  $x$  месяцев?

**Решение.**

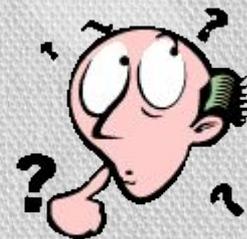
Пусть  $r = 2\%$ ,  $x = 12$  месяцев.

Тогда за год банковский вклад возрастет на

$$S_0(x) - S_0 = S_0(1 + 0,02)^{12} - S_0 = S_0(1,02^{12} - 1) = S_0(1,268241 - 1) \approx S_0 \cdot 0,27,$$

$$\frac{0,27S_0}{S_0} \cdot 100\% = 27\%.$$

Ответ: на 27%.



А теперь, в конце урока хочется, чтобы вы выразили свое отношение к нашей сегодняшней работе и всему уроку в целом. Ответьте на вопросы в листах рефлексии и сдайте их мне.

1) Понравилось на уроке? (отметь галочкой мордашку)



2) Поставь оценку учителю за работу по 10 бальной системе.

3) Поставь оценку себе за работу по 10 бальной системе.

# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- *Страница 57 учебника – «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»*

**СПАСИБО ЗА  
УРОК!**

A faint, light-colored illustration of a sunflower and a smaller flower is visible in the background on the right side of the page. The sunflower is the larger one, with a distinct head and stem, while the smaller flower is positioned below and to the left of it. The background has a fine, woven texture.