

Призма

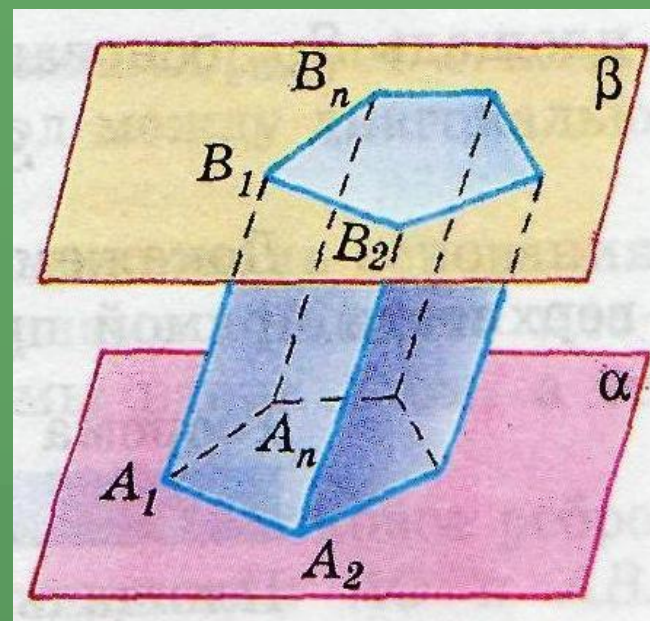
# Определение призмы:

$A_1A_2\dots A_nB_1B_2B_n$  – *призма*

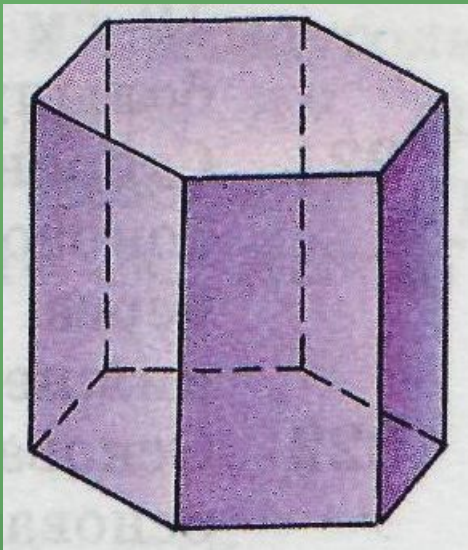
Многоугольники  $A_1A_2\dots A_n$   
и  $B_1B_2\dots B_n$  – *основания*  
*призмы*

Параллелограммы  
 $A_1A_2B_2B_1, A_1A_2B_2B_1, \dots$   
 $A_nA_1B_1B_n$  – *боковые*  
*границы*

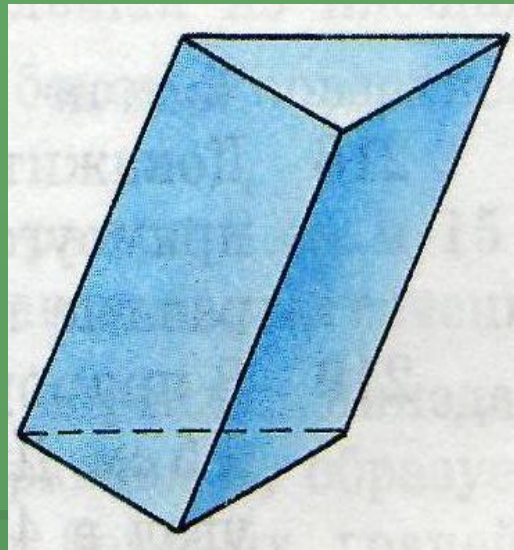
Отрезки  $A_1B_1, A_2B_2\dots A_nB_n$   
– *боковые ребра призмы*



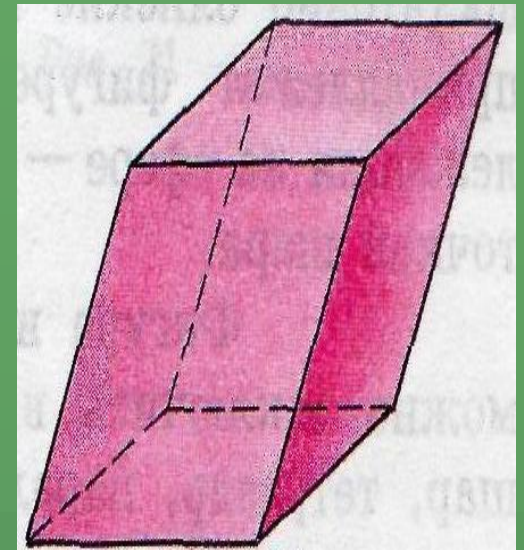
# Виды призм



Шестиугольная  
призма



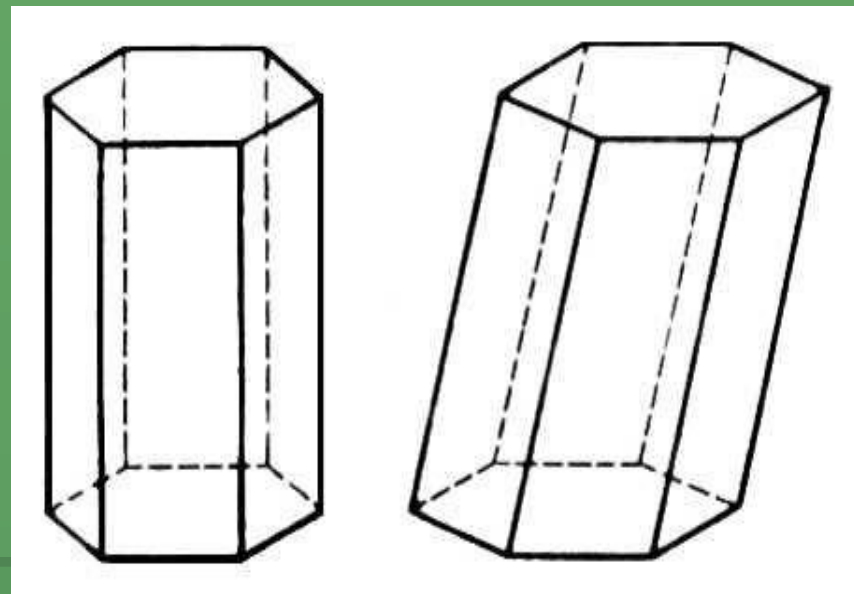
Треугольная  
призма



Четырехугольная  
призма

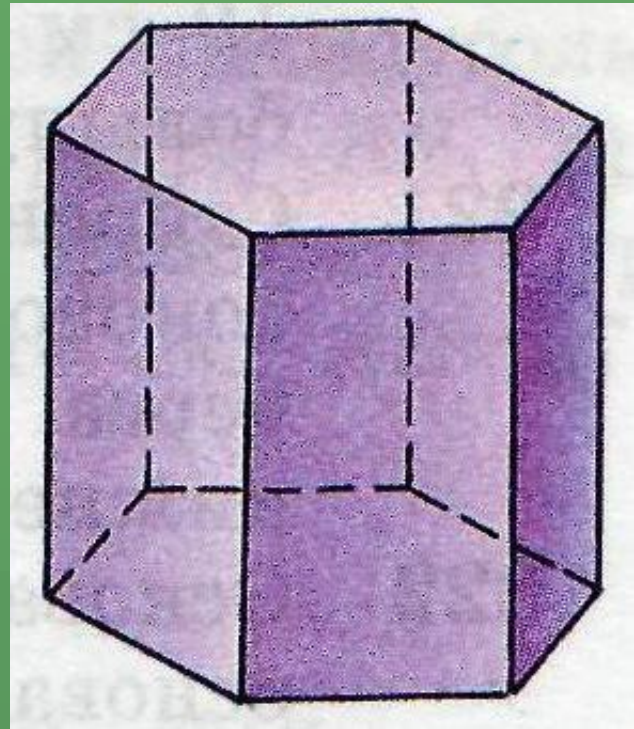
# Наклонная и прямая призма

Если боковые ребра призмы перпендикулярны основаниям то призма называется *прямой*, в противном случае — *наклонной*.



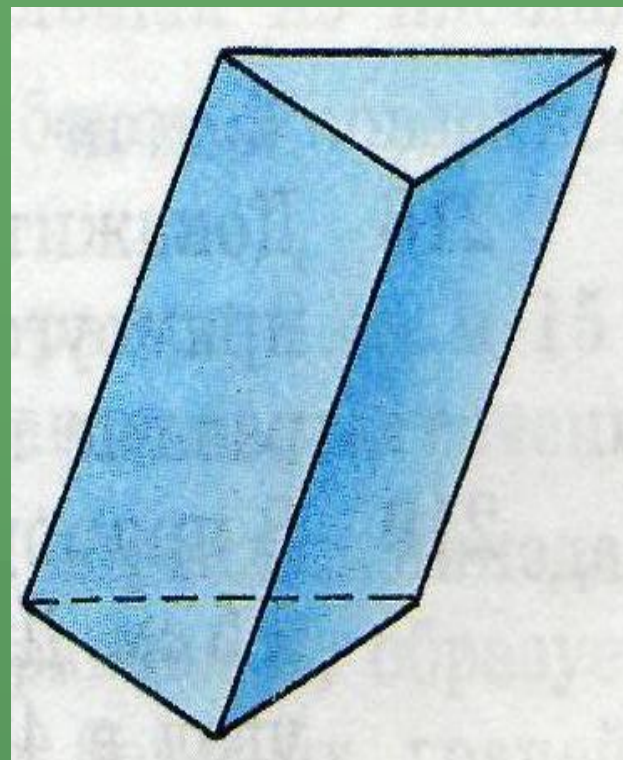
# Правильная призма

Призма называется *правильной*, если она прямая и ее основания - правильные многоугольники.



# Площадь полной поверхности призмы

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

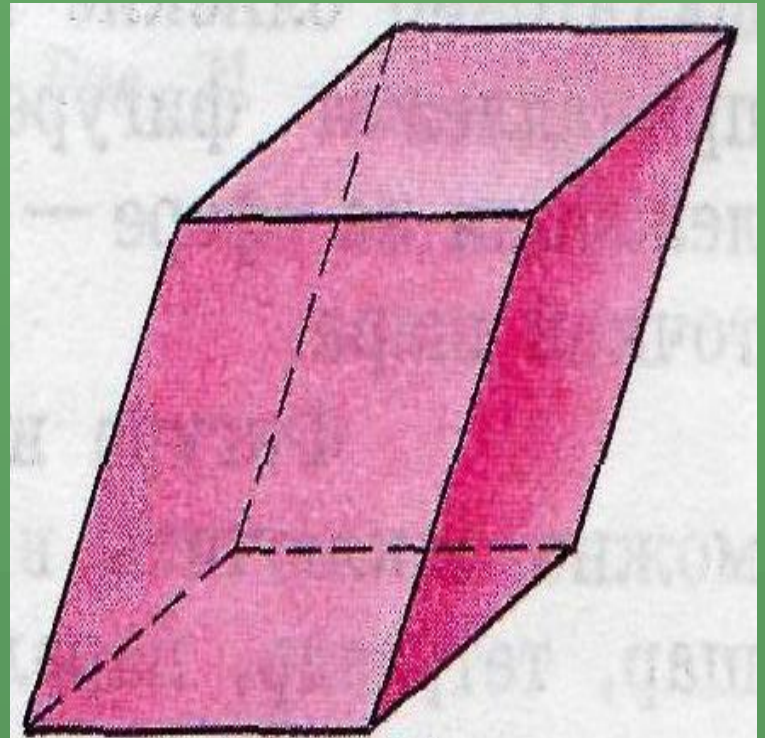




# Площадь боковой поверхности призмы

## Теорема

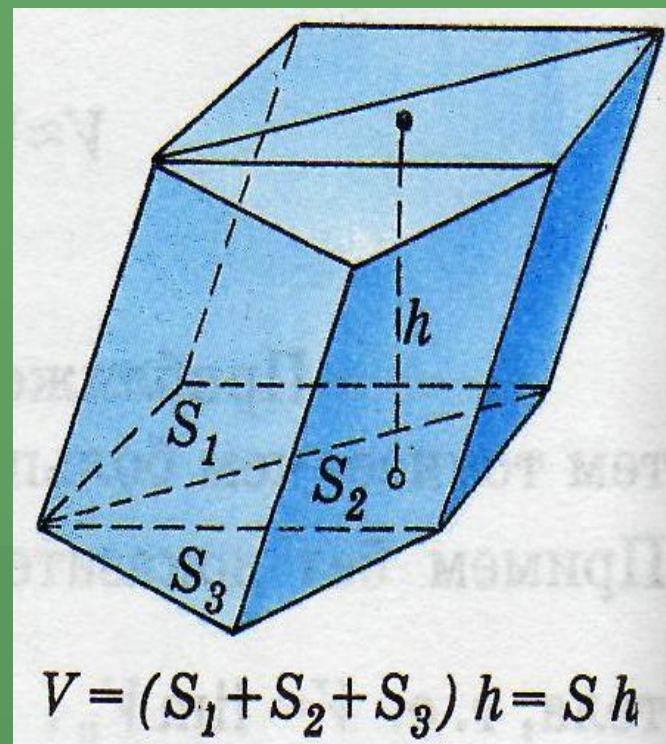
Площадь боковой поверхности прямой призмы равна половине произведения периметра основания на высоту призмы.



# Объем наклонной призмы

## Теорема

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.



$$V = (S_1 + S_2 + S_3) h = S h$$

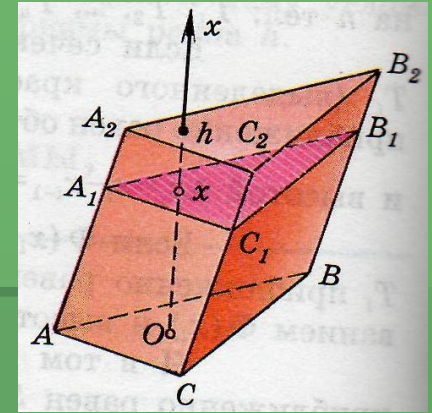


## Доказательство

Докажем сначала теорему для треугольной призмы, а затем — для произвольной призмы.

1. Рассмотрим треугольную призму с объемом  $V$ , площадью основания  $S$  и высотой  $h$ . Отметим точку  $O$  на одном из оснований призмы и направим ось  $Ox$  перпендикулярно к основаниям. Рассмотрим сечение призмы плоскостью, перпендикулярной к оси  $Ox$  и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим буквой  $x$  абсциссу точки пересечения этой плоскости с осью  $Ox$ , а через  $S(x)$  — площадь получившегося сечения.

Докажем, что площадь  $S(x)$  равна площади  $S$  основания призмы. Для этого заметим, что треугольники  $ABC$  (основание призмы) и  $A_1B_1C_1$  (сечение призмы рассматриваемой плоскостью) равны. В самом деле, четырехугольник  $AA_1B_1B$  — параллелограмм (отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  равны и параллельны), поэтому  $A_1B_1=AB$ . Аналогично доказывается, что  $B_1C_1=BC$  и  $A_1C_1=AC$ . Итак, треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  равны по трем сторонам. Следовательно,  $S(x)=S$ . Применяя теперь основную формулу для вычисления объемов тел при  $a=0$  и  $b=h$ , получаем



$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S dx = S \int_0^h dx = S \cdot x \Big|_0^h = S \cdot h.$$

2. Докажем теперь теорему для произвольной призмы с высотой  $h$  и площадью основания  $S$ . Такую призму можно разбить на треугольные призмы с общей высотой  $h$ . Выразим объем каждой треугольной призмы по доказанной нами формуле и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий множитель  $h$ , получим в скобках сумму площадей оснований треугольных призм, т. е. площадь  $S$  основания исходной призмы. Таким образом, объем исходной призмы равен  $S * h$ . Теорема доказана.

