Урок 6

Трехгранный угол

Основное свойство трехгранного угла.

Теорема.

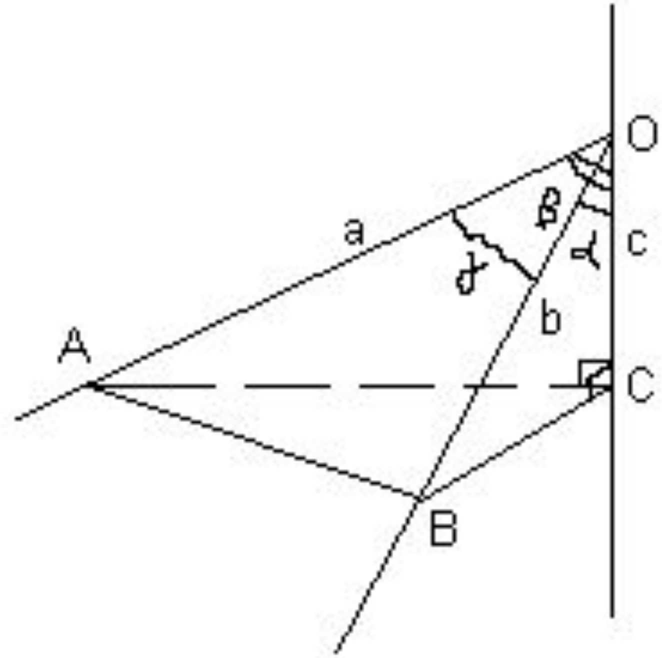
В трехгранном угле сумма плоских углов меньше 360° и сумма любых двух из них больше третьего.

Дано: Oabc – трехгранный угол;

$\angle(b; c) = \alpha$; $\angle(a; c) = \beta$; $\angle(a; b) = \gamma$.

Доказать:

1) $\alpha + \beta + \gamma < 360°$;
2) 2) $\alpha + \beta > \gamma$; $\alpha + \gamma > \beta$; $\beta + \gamma > \alpha$.



<u>Дано</u>: Oabc – трехгранный угол;

$\angle(b; c) = \alpha$; $\angle(a; c) = \beta$; $\angle(a; b) = \gamma$.

<u>Доказать</u>:

2) $\alpha + \beta > \gamma$; $\alpha + \gamma > \beta$; $\beta + \gamma > \alpha$.

<u>Доказательство</u>

I. Пусть $\alpha < 90°$; $\beta < 90°$; $(ABC) \perp c$.

Тогда $\angle OBC = 90° - \alpha < \angle OBA$ (следствие из формулы трех косинусов).

Аналогично, $\angle OAC = 90° - \beta < \angle OAB$.

Следовательно,

$\gamma = 180° - (\angle OAB + \angle OBA) < 180° - ((90° - \alpha) + (90° - \beta)) = \alpha + \beta$

Если $\gamma < 90°$, то остальные два неравенства пункта 2) доказываются аналогично,

а если $\gamma \geq 90°$, то они – очевидны.

Формула трех косинусов

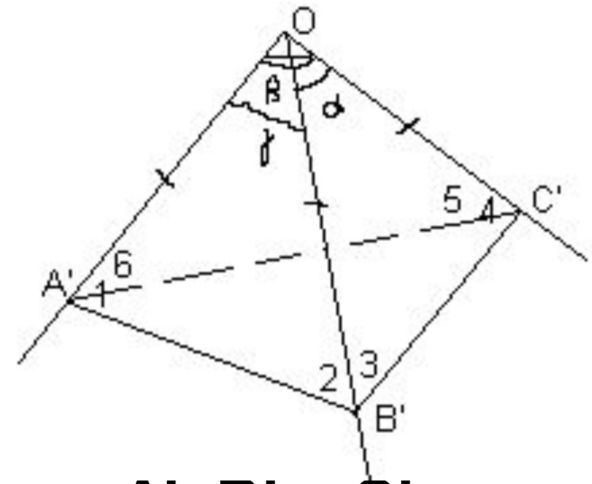
Следствия. 1) ***Для вычисления угла между прямой и плоскостью применима формула:***

$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi}{\cos\beta}$$

.

2) ***Угол между прямой и плоскостью – наименьший из углов, которая эта прямая, образует с прямыми этой плоскости.***

Дано: Oabc – трехгранный угол;
$\angle(b; c) = \alpha$; $\angle(a; c) = \beta$; $\angle(a; b) = \gamma$.



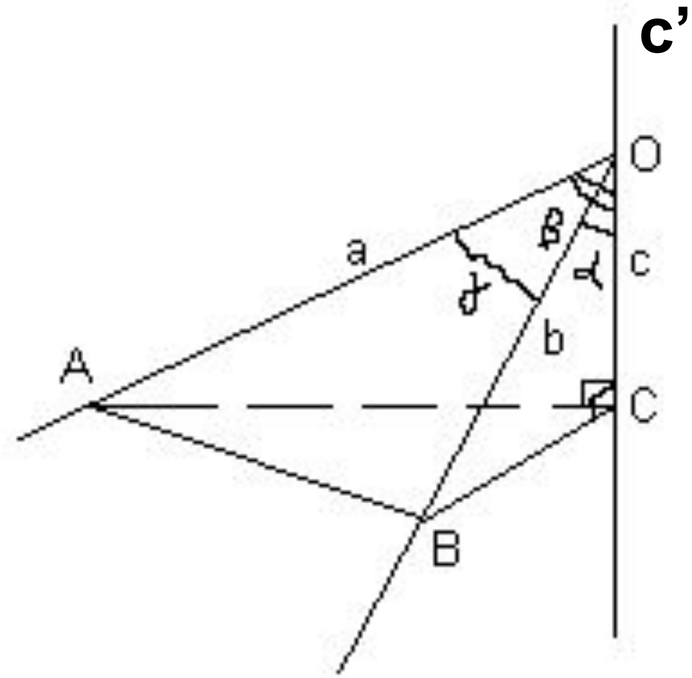
Доказать:

1) $\alpha + \beta + \gamma < 360°$;
2) $\alpha + \beta > \gamma$; $\alpha + \gamma > \beta$; $\beta + \gamma > \alpha$.

II. На ребрах данного угла отложим точки A', B' и C' так, что $|OA'| = |OB'| = |OC'|$
Тогда треугольники A'OB', B'OC' и C'OA' – равнобедренные, а их углы при основаниях 1 – 6 – острые.

Для трехгранных углов с вершинами A', B' и C' применим неравенства, доказанные в пункте I:
$\angle C'A'B' < \angle 1 + \angle 6$; $\angle A'B'C' < \angle 2 + \angle 3$; $\angle B'C'A' < \angle 4 + \angle 5$.
Сложим эти неравенства почленно,
тогда $180° < (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) + (\angle 5 + \angle 6) =$
$= (180° - \gamma) + (180° - \alpha) + (180° - \beta) \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < 360°$.

Дано: Oabc – трехгранный угол;
∠(b; c) = α; ∠(a; c) = β; ∠(a; b) = γ.
Доказать:
1) α + β + γ < 360°;
2) α + β > γ; α + γ > β; β + γ > α.



III. Рассмотрим луч c’ – дополнительный лучу c и для трехгранного угла Oabc’ используем неравенство, доказанное в пункте II для произвольного трехгранного угла:

(180° – α) + (180° – β) + γ < 360° ⇔ α + β > γ.

Аналогично доказываются и два остальных неравенства

Следствие.

В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине меньше 120°.

Определение.
***Трехгранные углы называются равными если равны все их соответствующие плоские и двугранные углы*.**
Признаки равенства трехгранных углов.
Трехгранные углы равны, если у них соответственно равны:

1) ***два плоских угла и двугранный угол между ними;***
2) ***два двугранных угла и плоский угол между ними;***
3) ***три плоских угла;***
4) ***три двугранных угла.***

Аналог теоремы косинусов

Дан трехгранный угол Oabc.

I. Пусть $\alpha < 90°$; $\beta < 90°$; тогда рассмотрим $(ABC) \perp c$

По теореме косинусов из ΔCAB:

$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos\hat{c}$

Аналогично, из ΔOAB:

$|AB|^2 = |AO|^2 + |BO|^2 - 2|AO| \cdot |BO| \cdot \cos\gamma$.

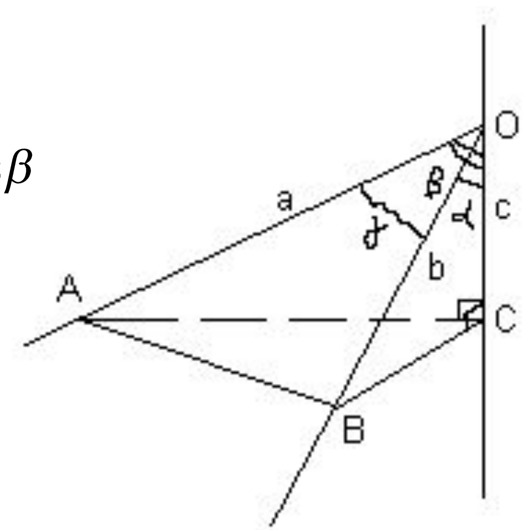
Вычтем из второго равенства первое и учтем, что

$|AO|^2 - |AC|^2 = |CO|^2 = |BO|^2 - |BC|^2$:

$2|CO|^2 - 2|AO| \cdot |BO| \cdot \cos\gamma + 2|AC| \cdot |BC|\hat{c} = 0 \Leftrightarrow$

$$\cos\gamma = \frac{|CO|^2}{|AO| \cdot |BO|} + \frac{|AC| \cdot |BC|}{|AO| \cdot |BO|}\cos\hat{c}$$

Заменим: $\frac{|CO|}{|BO|} = \cos\alpha$ $\frac{|BC|}{|BO|} = \sin\alpha$ $\frac{|AC|}{|AO|} = \sin\beta$ $\frac{|CO|}{|AO|} = \cos\beta$

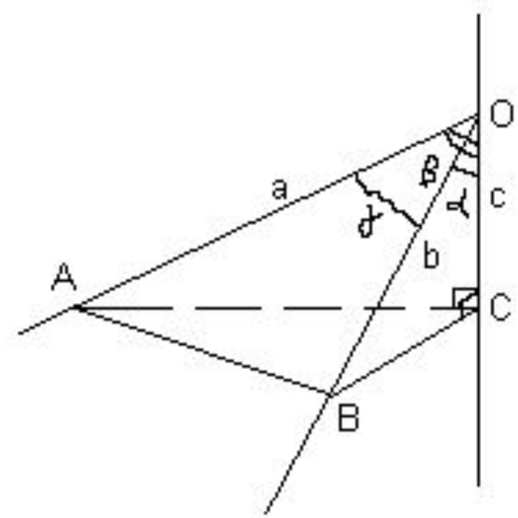


тогда ***cosγ = cosα·cosβ + sinα·sinβ·cos***

II. Пусть $\alpha > 90°$; $\beta > 90°$,
тогда рассмотрим луч c’, дополнительный к c,
и соответствующий трехгранный угол Oabc’,
в котором плоские углы $\pi - \alpha$ и $\pi - \beta$ – острые,
а плоский угол γ и двугранный угол $\hat{c}$ – те же самые.

По **I.**: $\cos\gamma = \cos(\pi - \alpha) \cdot \cos(\pi - \beta) + \sin(\pi - \alpha) \cdot \sin(\pi - \beta) \cdot \cos\hat{c}$

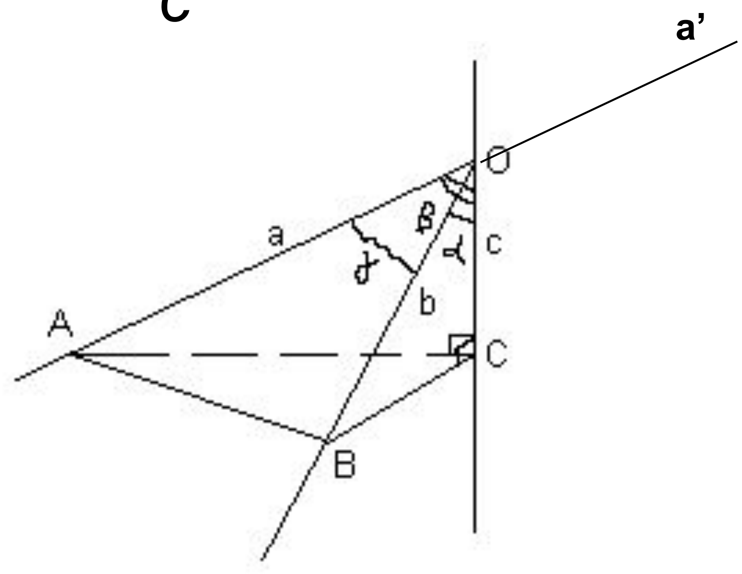
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\hat{c}}$$



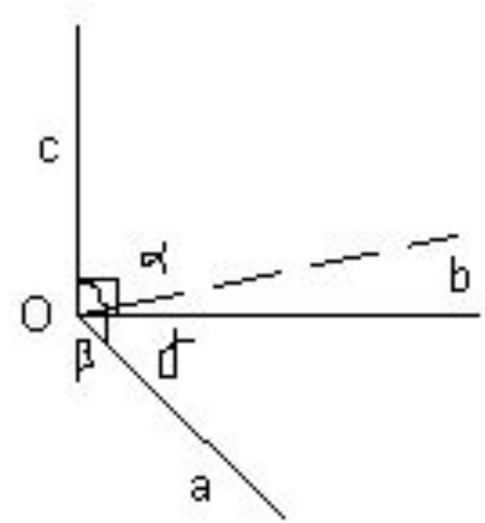
III. Пусть $\alpha < 90°$; $\beta > 90°$,
тогда рассмотрим луч а’,
дополнительный к а,
и соответствующий трехгранный угол Oa’bc, в котором плоские углы α и $\pi - \beta$ – острые,
третий плоский угол – $(\pi - \gamma)$,
а противолежащий ему двугранный угол – $(\pi - \hat{c})$

По **I.**: $\cos(\pi - \gamma) = \cos\alpha \cdot \cos(\pi - \beta) + \sin\alpha \cdot \sin(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - \hat{c})$

$\Leftrightarrow$ ***$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\hat{c}$***



IV. Пусть α = 90°; β = 90°, тогда γ = $\hat{c}$



и равенство, очевидно, выполняется.
Если же только один из этих углов, например, β = 90°,
то доказанная формула имеет вид:

$\cos\gamma = \sin\alpha \cdot \cos\hat{c} \Leftrightarrow \cos\gamma = \cos(90° - \alpha) \cdot \cos\hat{c}$

<u>Следствие</u>. ***Если*** $\hat{c}$ ***= 90°, то cosγ = cosα·cosβ –***

аналог теоремы Пифагора*!*