

# Урок 6

## Трехгранный угол

## Основное свойство трехгранного угла.

### Теорема.

В трехгранном угле сумма плоских углов меньше  $360^\circ$  и сумма любых двух из них больше третьего.

Дано:  $Oabc$  – трехгранный угол;

$\angle(b; c) = \alpha$ ;  $\angle(a; c) = \beta$ ;  $\angle(a; b) = \gamma$ .

Доказать:

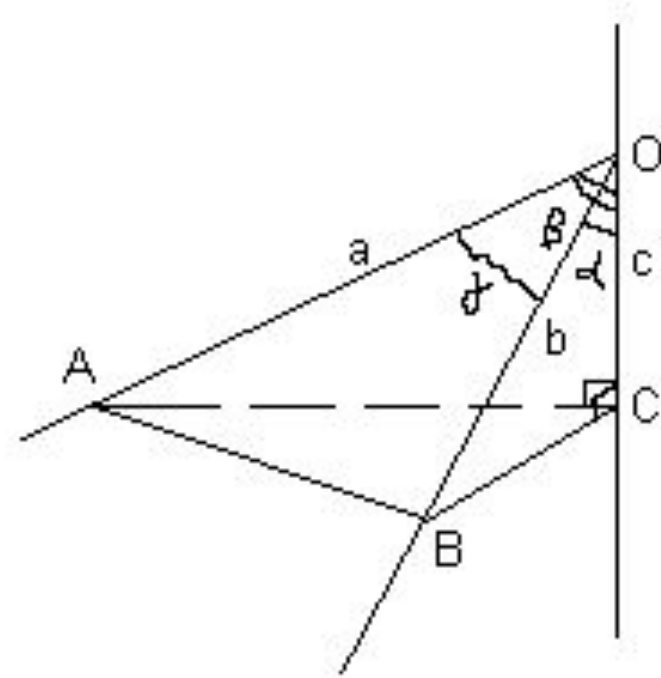
1)  $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$ ;

2)  $\alpha + \beta > \gamma$ ;  $\alpha + \gamma > \beta$ ;  $\beta + \gamma > \alpha$ .

**Дано:**  $Oabc$  – трехгранный угол;  
 $\angle(b; c) = \alpha$ ;  $\angle(a; c) = \beta$ ;  $\angle(a; b) = \gamma$ .

**Доказать:**

2)  $\alpha + \beta > \gamma$ ;  $\alpha + \gamma > \beta$ ;  $\beta + \gamma > \alpha$ .



**Доказательство**

I. Пусть  $\alpha < 90^\circ$ ;  $\beta < 90^\circ$ ;  $(ABC) \perp c$ .

Тогда  $\angle OBC = 90^\circ - \alpha < \angle OBA$

(следствие из формулы трех косинусов).

Аналогично,  $\angle OAC = 90^\circ - \beta < \angle OAB$ .

Следовательно,

$$\gamma = 180^\circ - (\angle OAB + \angle OBA) < 180^\circ - ((90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta)) = \alpha + \beta$$

Если  $\gamma < 90^\circ$ , то остальные два неравенства пункта 2)

доказываются аналогично,

а если  $\gamma \geq 90^\circ$ , то они – очевидны.

## **Формула трех косинусов**

Следствия. 1) **Для вычисления угла между прямой и плоскостью применима формула:**

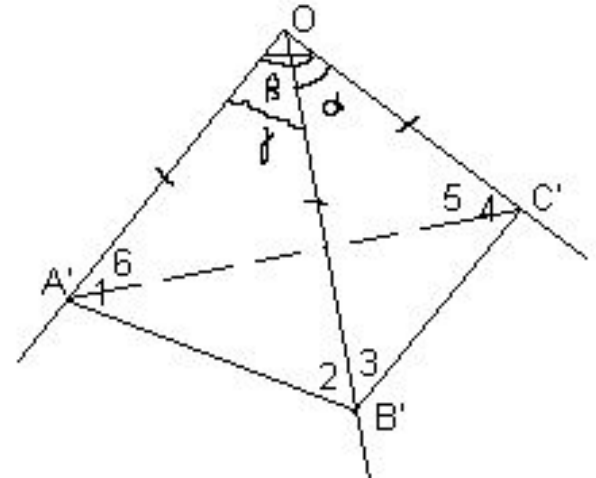
$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi}{\cos\beta}$$

2) **Угол между прямой и плоскостью – наименьший из углов, которая эта прямая, образует с прямыми этой плоскости.**

**Дано:**  $Oabc$  – трехгранный угол;  
 $\angle(b; c) = \alpha$ ;  $\angle(a; c) = \beta$ ;  $\angle(a; b) = \gamma$ .

**Доказать:**

- 1)  $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$ ;
- 2)  $\alpha + \beta > \gamma$ ;  $\alpha + \gamma > \beta$ ;  $\beta + \gamma > \alpha$ .



**II.** На ребрах данного угла отложим точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  так, что  $|OA'| = |OB'| = |OC'|$

Тогда треугольники  $A'OB'$ ,  $B'OC'$  и  $C'OA'$  –

равнобедренные, а их углы при основаниях 1 – 6 – острые.

Для трехгранных углов с вершинами  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  применим неравенства, доказанные в пункте I:

$$\angle C'A'B' < \angle 1 + \angle 6; \quad \angle A'B'C' < \angle 2 + \angle 3; \quad \angle B'C'A' < \angle 4 + \angle 5.$$

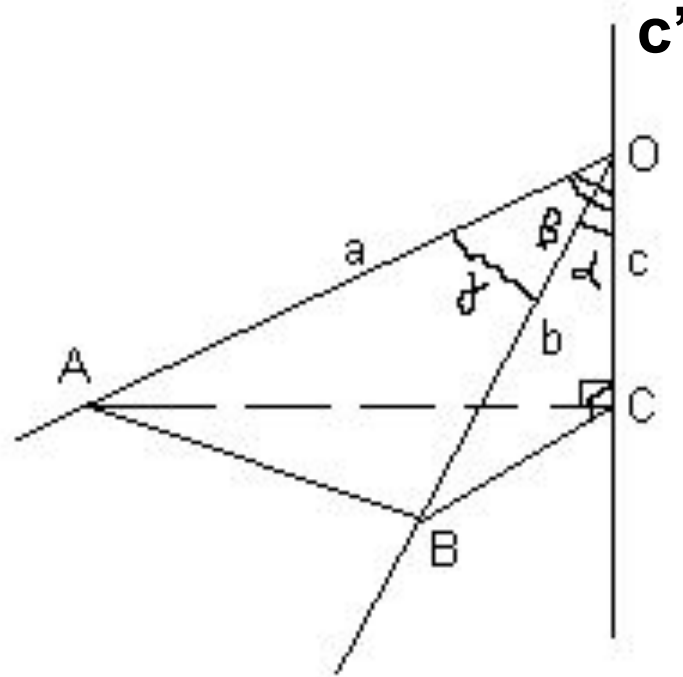
Сложим эти неравенства почленно,

$$\begin{aligned} \text{тогда } 180^\circ &< (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) + (\angle 5 + \angle 6) = \\ &= (180^\circ - \gamma) + (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < 360^\circ. \end{aligned}$$

**Дано:**  $Oabc$  – трехгранный угол;  
 $\angle(b; c) = \alpha$ ;  $\angle(a; c) = \beta$ ;  $\angle(a; b) = \gamma$ .

**Доказать:**

- 1)  $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$ ;
- 2)  $\alpha + \beta > \gamma$ ;  $\alpha + \gamma > \beta$ ;  $\beta + \gamma > \alpha$ .



**III.** Рассмотрим луч  $c'$  – дополнительный лучу  $c$  и для трехгранного угла  $Oabc'$  используем неравенство, доказанное в пункте II для произвольного трехгранного угла:

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + \gamma < 360^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta > \gamma.$$

Аналогично доказываются и два остальных неравенства

Следствие.

В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине меньше  $120^\circ$ .

Определение.

**Трехгранные углы называются равными если равны все их соответствующие плоские и двугранные углы.**

**Признаки равенства трехгранных углов.**

**Трехгранные углы равны, если у них соответственно равны:**

- 1) два плоских угла и двугранный угол между ними;**
- 2) два двугранных угла и плоский угол между ними;**
- 3) три плоских угла;**
- 4) три двугранных угла.**



## Аналог теоремы косинусов

Дан трехгранный угол  $Oabc$ .

I. Пусть  $\alpha < 90^\circ$ ;  $\beta < 90^\circ$ ; тогда рассмотрим  $(ABC) \perp c$

По теореме косинусов из  $\triangle CAB$ :

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos \hat{C}$$

Аналогично, из  $\triangle OAB$ :

$$|AB|^2 = |AO|^2 + |BO|^2 - 2|AO| \cdot |BO| \cdot \cos \gamma.$$

Вычтем из второго равенства первое и учтем, что

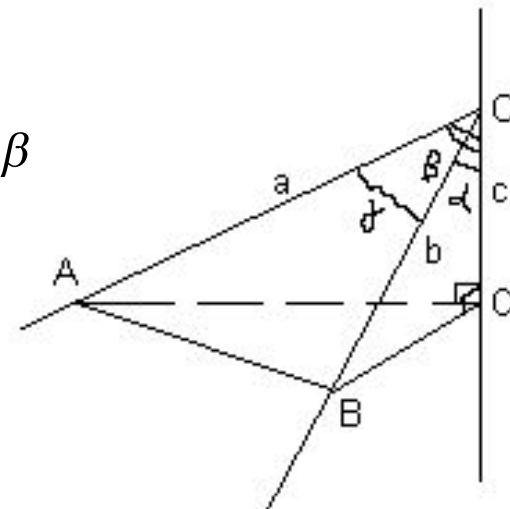
$$|AO|^2 - |AC|^2 = |CO|^2 = |BO|^2 - |BC|^2:$$

$$2|CO|^2 - 2|AO| \cdot |BO| \cdot \cos \gamma + 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos \hat{C} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos \gamma = \frac{|CO|^2}{|AO| \cdot |BO|} + \frac{|AC| \cdot |BC|}{|AO| \cdot |BO|} \cos \hat{C}$$

Заменяем:  $\frac{|CO|}{|BO|} = \cos \alpha$     $\frac{|BC|}{|BO|} = \sin \alpha$     $\frac{|AC|}{|AO|} = \sin \beta$     $\frac{|CO|}{|AO|} = \cos \beta$

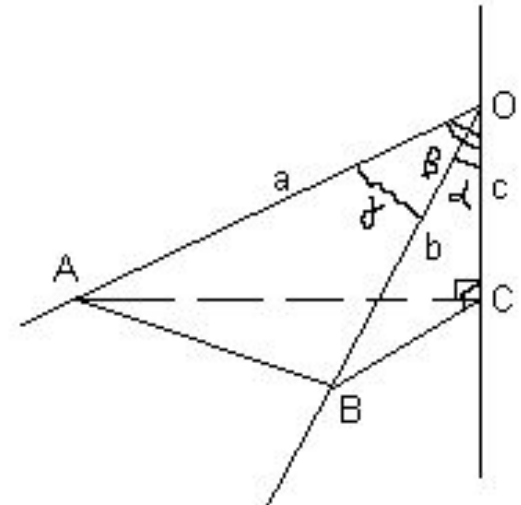
тогда  **$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos$**



II. Пусть  $\alpha > 90^\circ$ ;  $\beta > 90^\circ$ ,  
 тогда рассмотрим луч  $c'$ , дополнительный к  $c$ ,  
 и соответствующий трехгранный угол  $Oabc'$ ,  
 в котором плоские углы  $\pi - \alpha$  и  $\pi - \beta$  — острые,  
 а плоский угол  $\gamma$  и двугранный угол  $\hat{C}$  — те же самые.

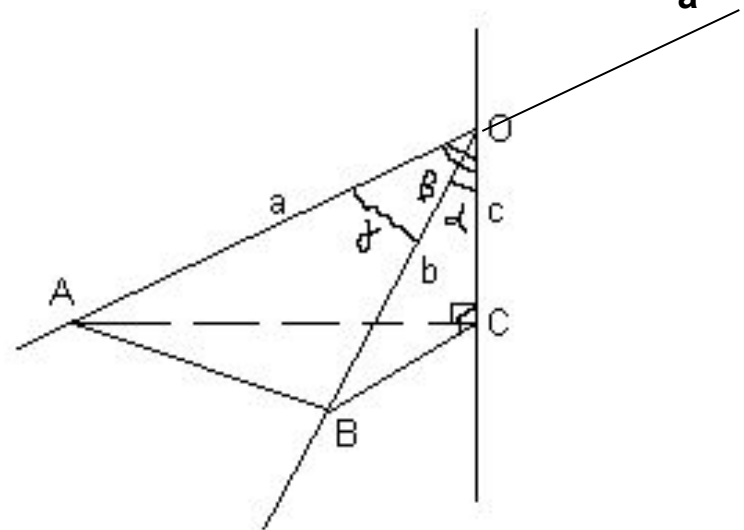
По I.:  $\cos \gamma = \cos(\pi - \alpha) \cdot \cos(\pi - \beta) + \sin(\pi - \alpha) \cdot \sin(\pi - \beta) \cdot \hat{C}$

$$\Leftrightarrow \cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \hat{C}$$



III. Пусть  $\alpha < 90^\circ$ ;  $\beta > 90^\circ$ ,  
 тогда рассмотрим луч  $a'$ ,  
 дополнительный к  $a$ ,  
 и соответствующий трехгранный угол  $Oa'bc$ , в котором  
 плоские углы  $\alpha$  и  $\pi - \beta$  – острые,  
 третий плоский угол –  $(\pi - \gamma)$ ,  
 а противолежащий ему двугранный угол –  $(\pi - \hat{C})$

По I.:  $\cos(\pi - \gamma) = \cos\alpha \cdot \cos(\pi - \beta) + \sin\alpha \cdot \sin(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - \hat{C})$   
 $\Leftrightarrow \cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\hat{C}$



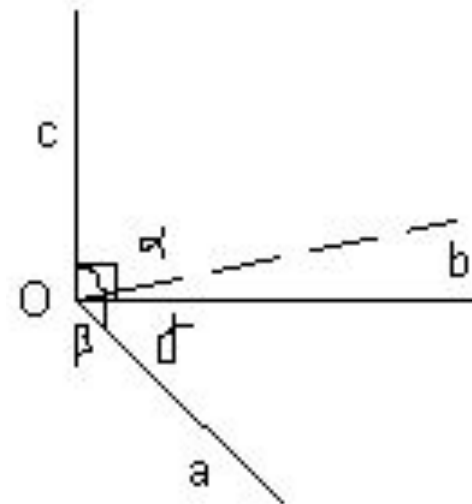
**IV.** Пусть  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\beta = 90^\circ$ , тогда  $\gamma = \hat{C}$

и равенство, очевидно, выполняется.

Если же только один из этих углов, например,  $\beta = 90^\circ$ ,

то доказанная формула имеет вид:

$$\cos \gamma = \sin \alpha \cdot \cos \hat{C} \Leftrightarrow \cos \gamma = \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \hat{C}$$



Следствие. Если  $\hat{C} = 90^\circ$ , то  $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta$   
 —  
 аналог теоремы Пифагора!