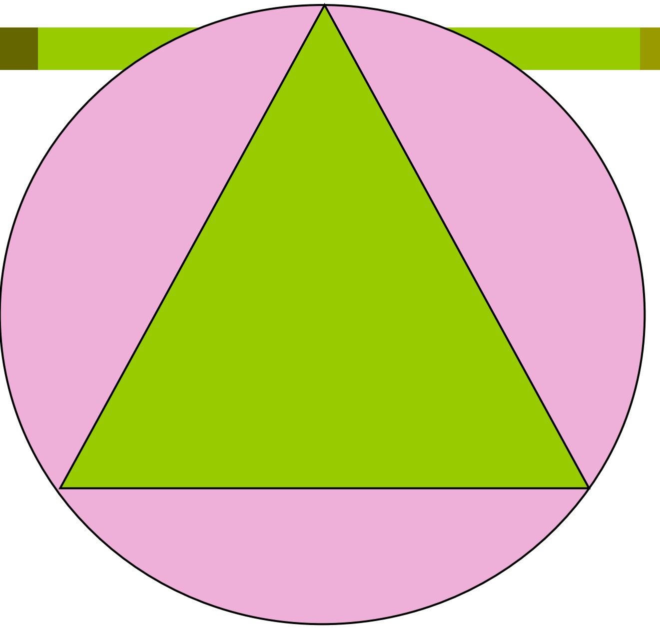
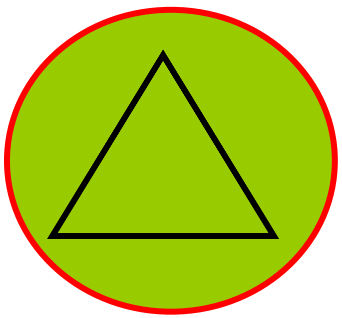
Описанная окружность



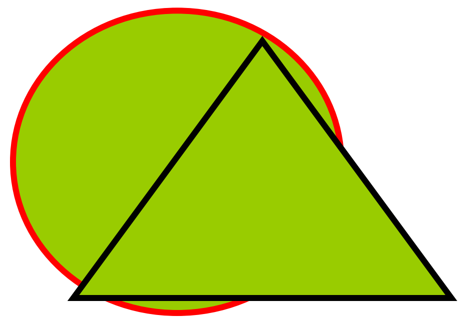
Определение: **окружность называется описанной около треугольника, если все вершины треугольника лежат на этой окружности.**

На каком рисунке окружность описана около треугольника:

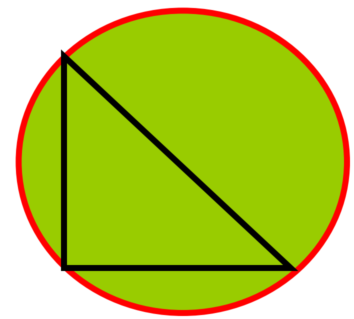
1)



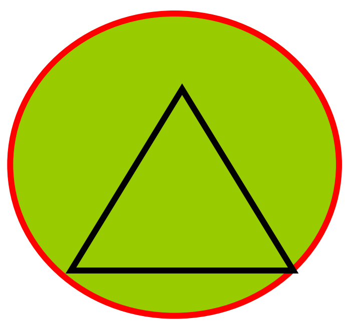
2)



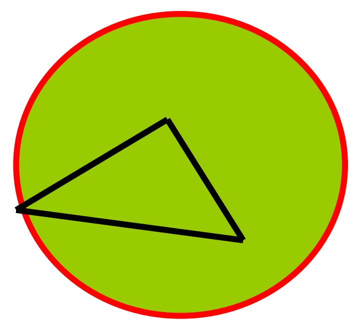
3)



4)



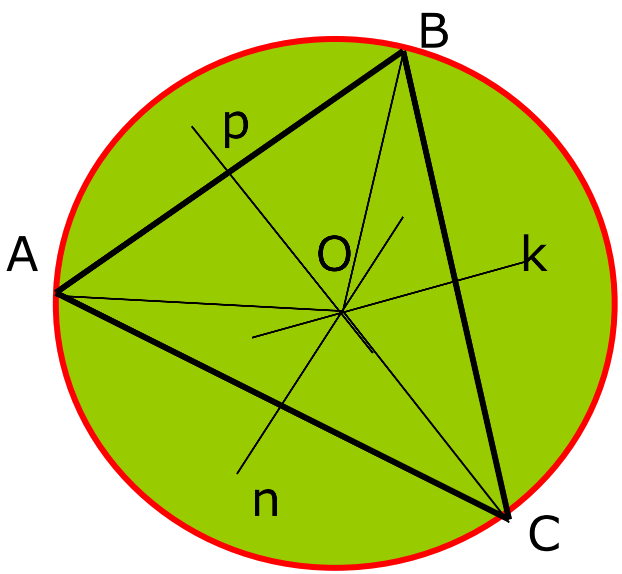
5)



Если окружность описана около треугольника, то треугольник вписан в окружность.

Теорема. **Около треугольника можно описать окружность, и притом только одну.**

Её центр – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



Дано: △ABC

Доказать: существует Окр.(O; r), описанная около △ABC.

Доказательство:

Проведём серединные перпендикуляры p, k,n к сторонам AB, BC, AC

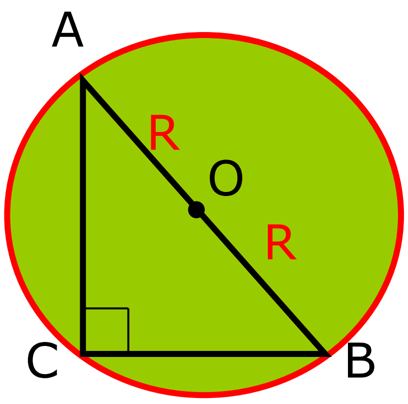
По свойству серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (замечательная точка треугольника):
они пересекаются в одной точке – O, для которой OA = OB = OC.

Т. е. все вершины треугольника равноудалены от точки O, значит, они лежат на окружности с центром O.

Значит, окружность описана около треугольника ABC.

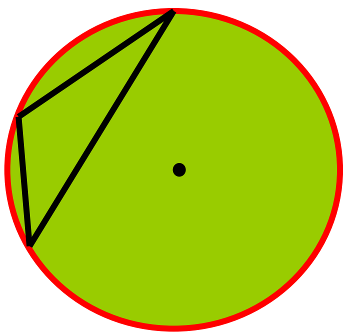
Важное свойство:

Если окружность описана около прямоугольного треугольника, то её центр – середина гипотенузы.



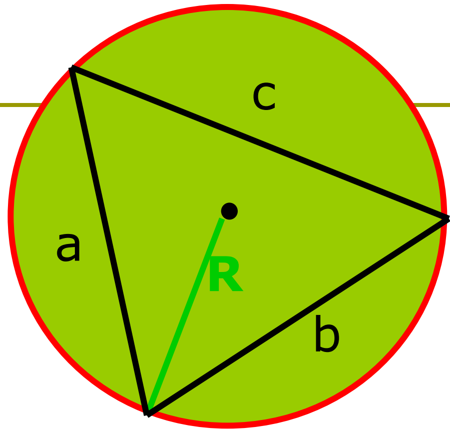
R = ½ AB

Задача: найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3 см и 4 см.



Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, лежит вне треугольника.

Формулы для радиуса описанной около треугольника окружности



$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

$$R = \frac{a}{2Sin\alpha} = \frac{b}{2Sin\beta} = \frac{c}{2Sin\gamma}$$

Задача: найти радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, сторона которого равна 4 см.

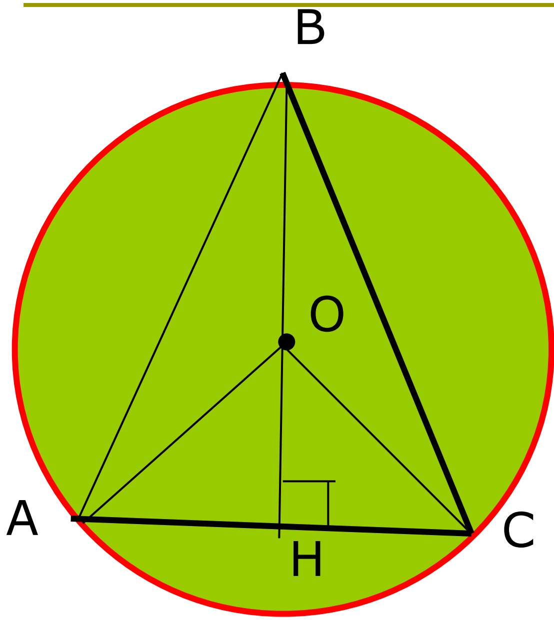
Решение:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}, \quad R = \frac{a^3}{4S} \qquad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

$$R = \frac{4^3}{4 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (см)}$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см

Задача: в окружность, радиус которой 10 см, вписан равнобедренный треугольник. Высота, проведённая к его основанию равна 16 см. Найти боковую сторону и площадь треугольника.



Дано: $\triangle ABC$- р/б, $BH \perp AC$, $BH = 16$ см

Окр.(О; 10 см) описана около АВС

Найти: АВ, S_{ABC}

Решение:

Т. к. окружность описана около равнобедренного треугольника АВС, то центр окружности лежит на высоте ВН.

$AO = BO = CO = 10$ см, $OH = BH - BO =$
$= 16 - 10 = 6$ (см)

$\triangle AOH$ – прямоугольный, $AO^2 = AH^2 + AH^2$, $AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, $AH = 8$ см

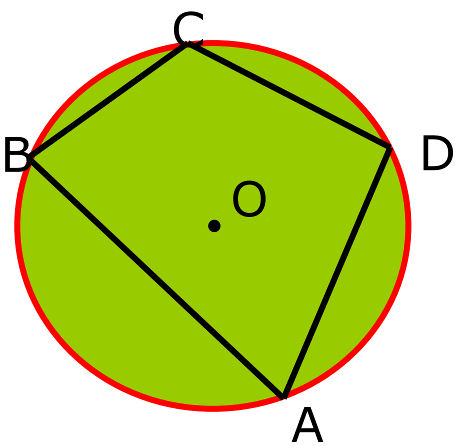
АВН – прямоугольный, $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 8^2 + 16^2 = 64 + 256 = 320$,
$AB = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ (см)

$AC = 2AH = 2 \cdot 8 = 16$ (см), $S_{ABC} = ½\, AC \cdot BH = ½ \cdot 16 \cdot 16 = 128$ (см^2)

Ответ: $AB = 8\sqrt{5}$ см , $S = 128$ см^2

Определение: **окружность называется описанной около четырёхугольника, если все вершины четырёхугольника лежат на окружности.**

Теорема. **Если около четырёхугольника описана окружность, то сумма его противоположных углов равна 180^0.**



Дано: Окр.(O;R) описана около ABCD

Доказать: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^0$

Доказательство:

Т. к. окружность описана около ABCD, то $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ – вписанные, значит,

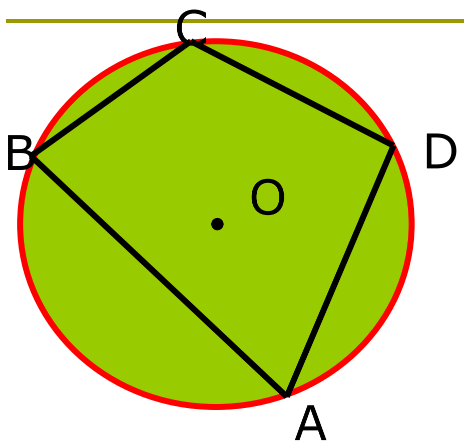
$\angle A + \angle C = ½\ \ BCD + ½\ \ BAD = ½\ (\ \ BCD +\ \ BAD) = ½ \cdot 360^0 = 180^0$

$\angle B + \angle D = ½\ \ ADC + ½\ \ ABC = ½\ (\ \ ADC +\ \ ABC) = ½ \cdot 360^0 = 180^0$

Значит, $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^0$

Другая формулировка теоремы: **во вписанном в окружность четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180^0.**

Обратная теорема: **если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180^0, то около него можно описать окружность.**



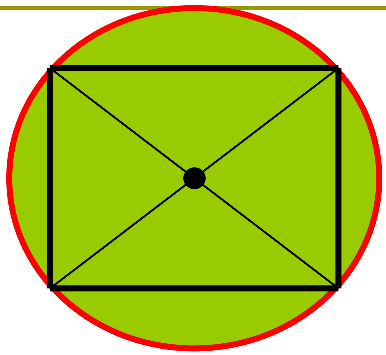
Дано: ABCD, $\angle A + \angle C = 180^0$

Доказать: Окр.(O;R) описана около ABCD

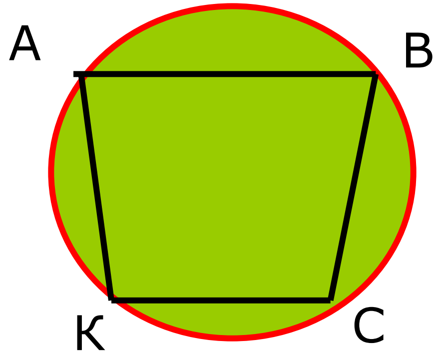
Доказательство: № 729 (учебник)

Вокруг какого четырёхугольника нельзя описать окружность?

Следствие 1: **около любого прямоугольника можно описать окружность, её центр – точка пересечения диагоналей.**



Следствие 2: **около равнобедренной трапеции можно описать окружность.**



Реши задачи

Найти углы четырёхугольника РКЕН: