


# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

Задачи на нахождение  
наибольшего или  
наименьшего  
значения



# Определения

Задачи, где требуется определить условия, при которых некоторая величина принимает наибольшее и наименьшее значение, принято называть задачами «на экстремум» или задачами «на максимум и минимум».

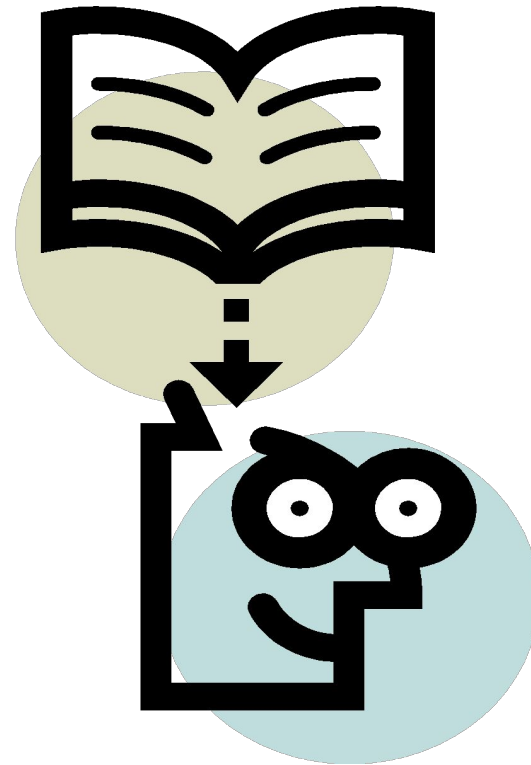
Extremum (лат.)-крайний

Maximum (лат.)-  
наибольший

Minimum (лат.)-  
наименьший

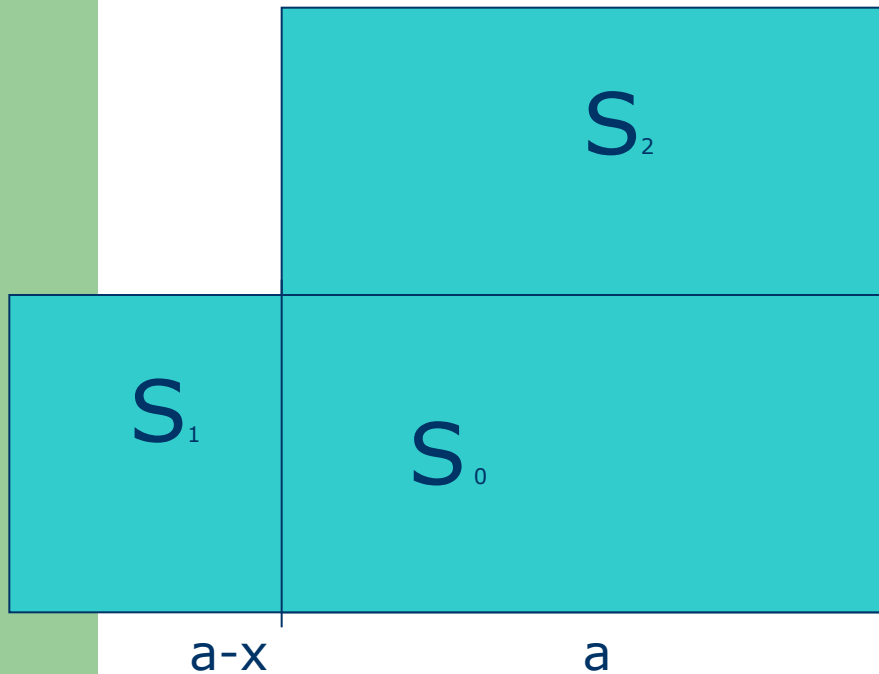
Задачи, в которых фигура с экстремальными свойствами отыскивается среди других с равными периметрами.

Называются *изопериметрическими* или «задачами Дидоны».



# Задача Евклида

$a$



- Если рассмотреть прямоугольник и квадрат с одинаковыми периметрами, то площадь квадрата будет больше.

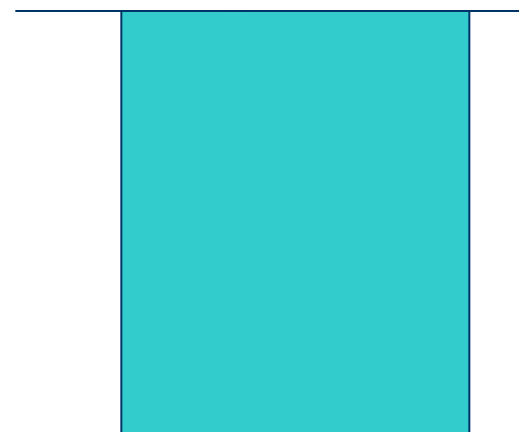
$x$   
 $a-x$   
 $a$

Доказательство:

- Площадь прямоугольника равна  $S_0+S_1$ , а площадь квадрата  $S_0+S_2$  и  $S_1 < S_2$ , если  $x < a$ . Таким образом, мы получаем, что из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

# Легенда о Дионе

- Диона- основательница города Карфагена и его первая царица. Вынужденная бежать из своего города, Диона вместе со своими спутниками прибыла на северный берег Африки и хотела приобрести у местных жителей землю для нового поселения. Ей согласились уступить участок земли, однако не больше, чем объемлет воловья шкура. Хитроумная Диона разрежала воловью шкуру на узкие ремешки и, сумела ограничить гораздо большую площадь по сравнению с той, которую можно было покрыть воловьею одной шкурой .

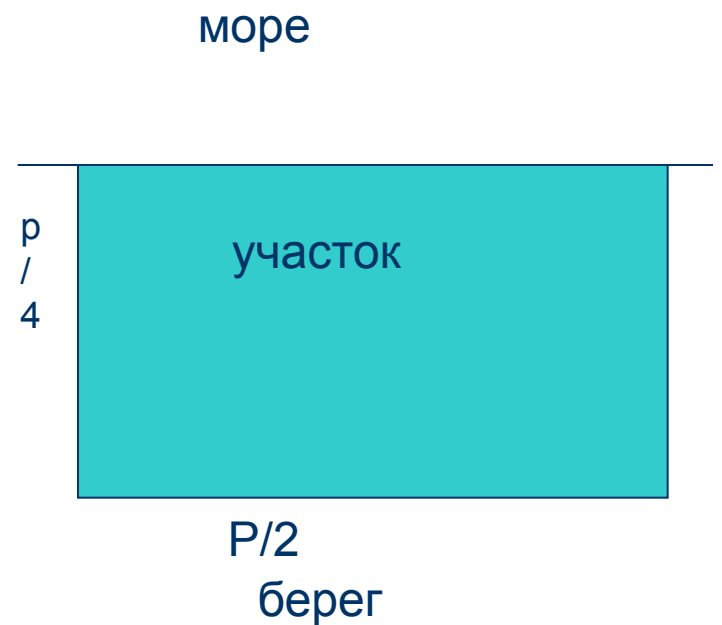


# Задачи Зенодора (2-1 в. до н.э.)

- Из всех многоугольников с равным периметром и равным числом сторон наибольшую площадь имеет правильный многоугольник
- Из двух правильных многоугольников с равным периметром большую площадь имеет тот, у которого число углов больше
- Из всех плоских фигур с равным периметром наибольшую площадь имеет круг.

# Задача Дионы (частный случай)

- Если принять, что береговая линия есть прямая и ограничиваемый участок прямоугольной формы, то наибольшую площадь будет иметь прямоугольник с длинами сторон  $p/4$  и  $p/2$ .
- $P$ -ПЕРИМЕТР УЧАСТКА.



# ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

- Задача. Каких размеров должен быть ящик, чтобы при заданной площади поверхности его объем был наибольшим?
- Решение. Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  - длины ребер.  $S$ -площадь полной поверхности,  $V$ - объем.
- $S=2(ab+bc+ac)$ ,  $V=abc$ . Применим неравенство: среднее арифметическое больше или равно среднему геометрическому. Знак равенства достигается при  $a=b=c$  и при этом объем будет наибольшим. Итак, наибольший объем имеет куб.

