Площадь криволинейной трапеции

Определение производной:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)\, при\, \Delta x \to 0$$

Найти производную функции по определению:

$$y = -2x + x^2 \quad в\ точке\, x_0$$

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

$$\Delta y = -2\Delta x + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 + 2x_0 + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -2 + 2x_0 \,, при\ \Delta x \to 0$$

Вставьте вместо *

1) $3x = (*x^2)'$ $\left(\frac{3}{2}x^2\right)'$

2) $Sin\,5x = (*\cos 5x)'$ $\left(-\frac{1}{5}\cos 5x\right)'$

3) $3\cos 3x = (\sin *)'$ $(\sin 3x)'$

4) $\frac{1}{x^2} = (-*)'$ $\left(-\frac{1}{x}\right)'$

Определение первообразной:

$F(x)$ *первообразная для* $f(x)$,

если $F'(x) = f(x)$

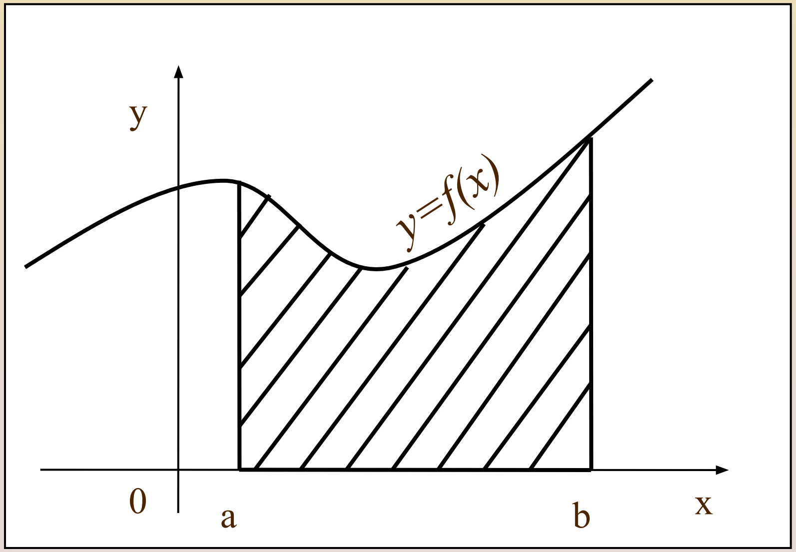
Будут ли первообразными следующие функции

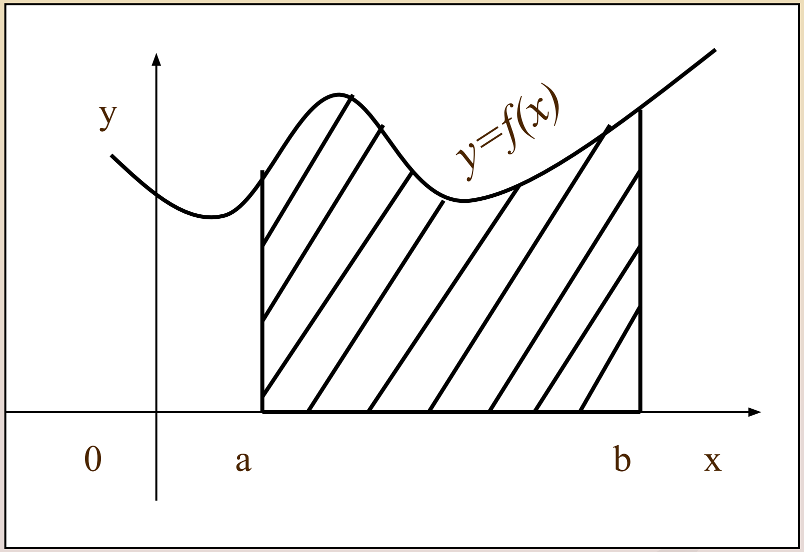
$$1)\ y=\frac{x^3}{3}+5-x^2; \quad 2)\ y=\frac{x^3}{3}-10-x^2;$$

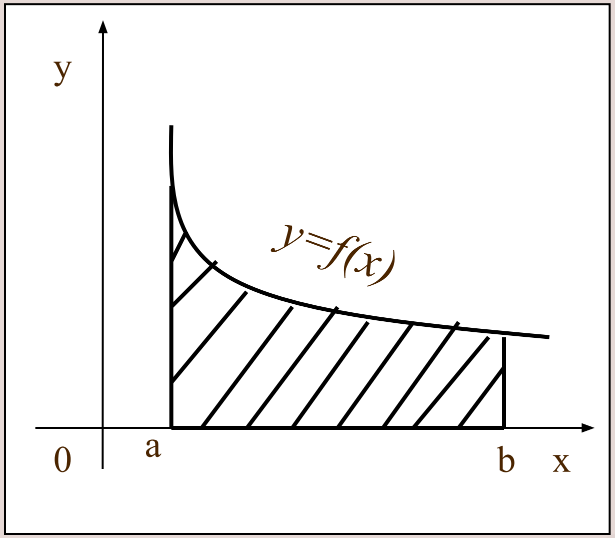
$$3)\ y=7-\frac{x^3}{3}; \qquad 4)\ y=\frac{x^3}{3}-x^2+25.$$

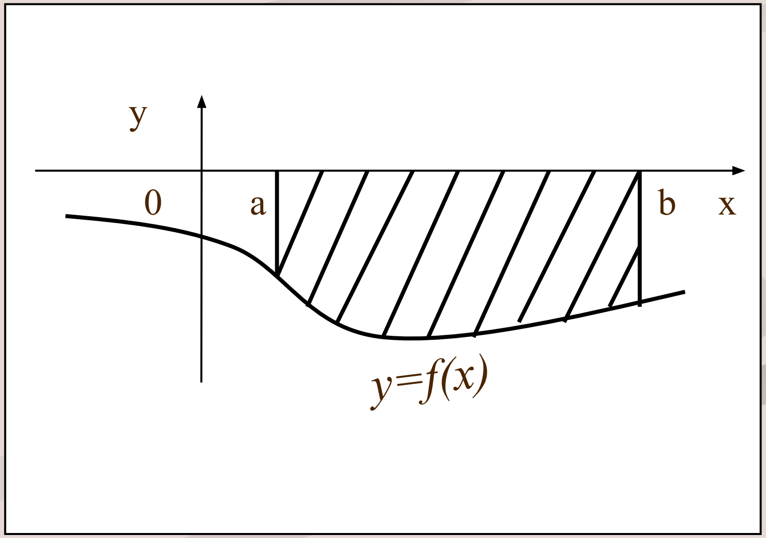
для функции $y=x^2-2x.$

Рассмотрим следующие чертежи



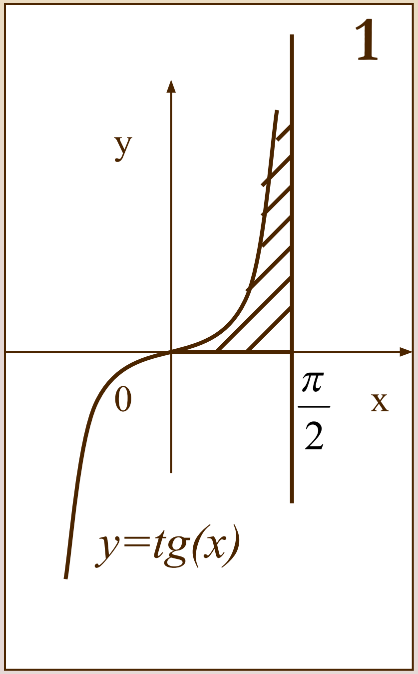


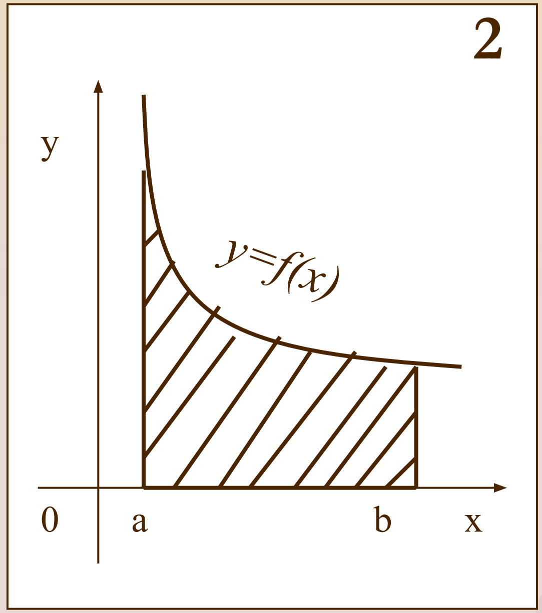


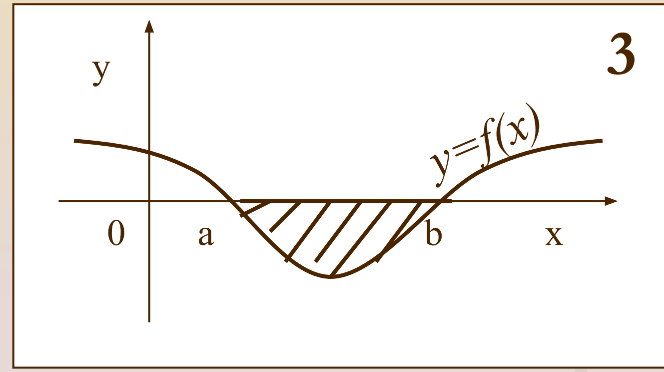


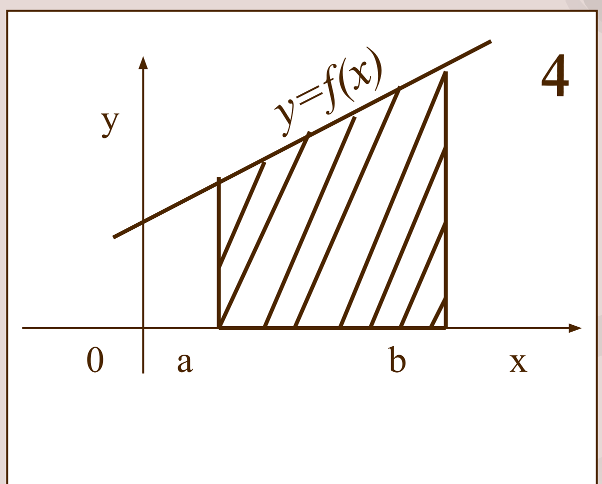
Определение: фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей своего знака на отрезке [$a; b$] функции, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком [$a; b$] называется *криволинейной трапецией.*

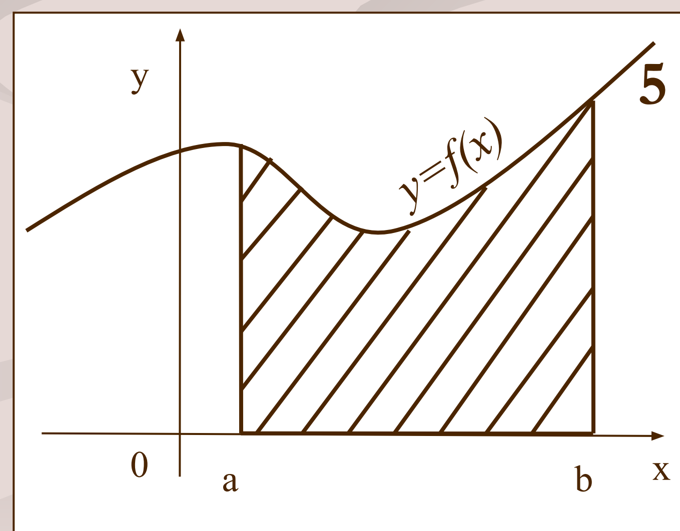
Указать криволинейные трапеции, ответ обосновать.



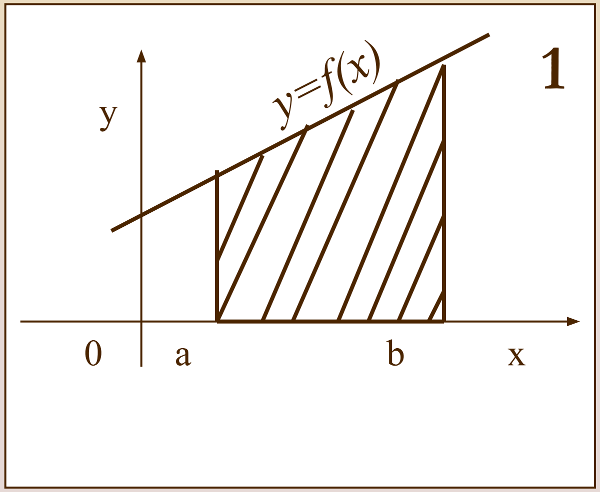


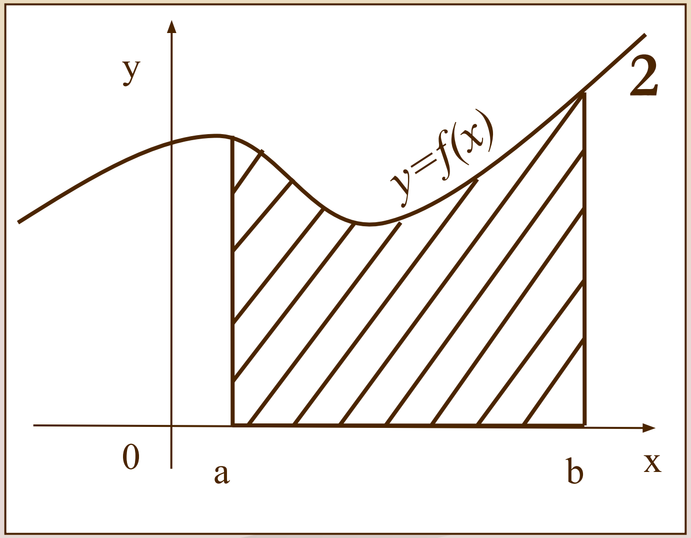






Как вычислить площадь данной криволинейной трапеции?





Площадь равна произведению полусуммы оснований трапеции на высоту.

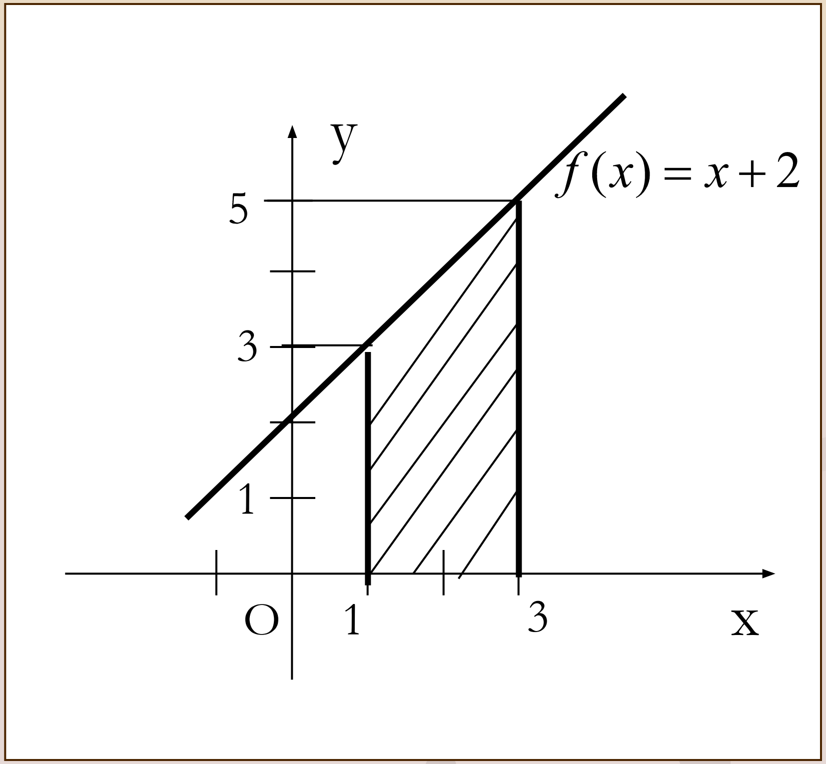
?

Площадь криволинейной трапеции

Вычислите площадь криволинейной трапеции 2-мя способами

1) Используя формулу площади трапеции из геометрии, получим:

$$S = \frac{5+3}{2} \cdot 2 = 8$$



2) Найдите F(x) и вычислите S по формуле S=F(b)-F(a)

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$$

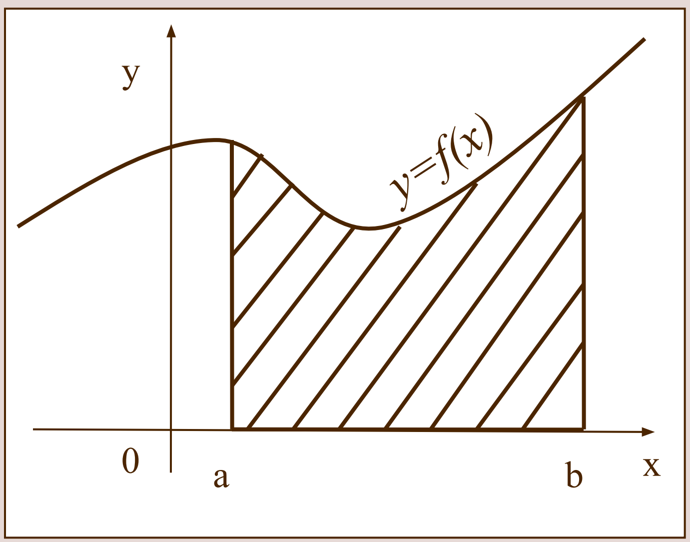
$$F(b) = F(3) = 10{,}5$$

$$F(a) = F(1) = 2{,}5$$

$$S = 10{,}5 - 2{,}5 = 8$$

Теорема:

Если *f* – непрерывная и неотрицательная на отрезке [*a; b*] функция, а *F* – ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке [*a; b*], т.е. $S=F(b)-F(a)$.

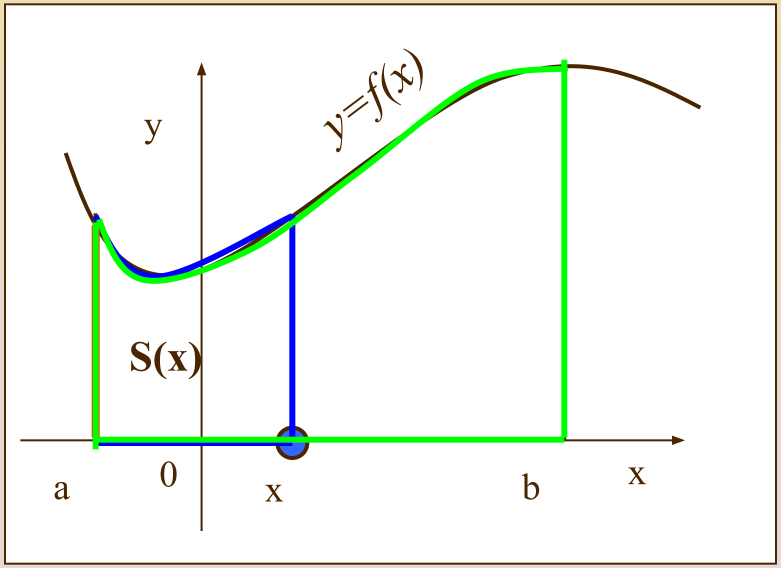


Дано: *f* – функция непрерывная, неотрицательная на отрезке [*a; b*]

криволинейная трапеция

Док-ть: $S=F(b)-F(a)$

Доказательство:



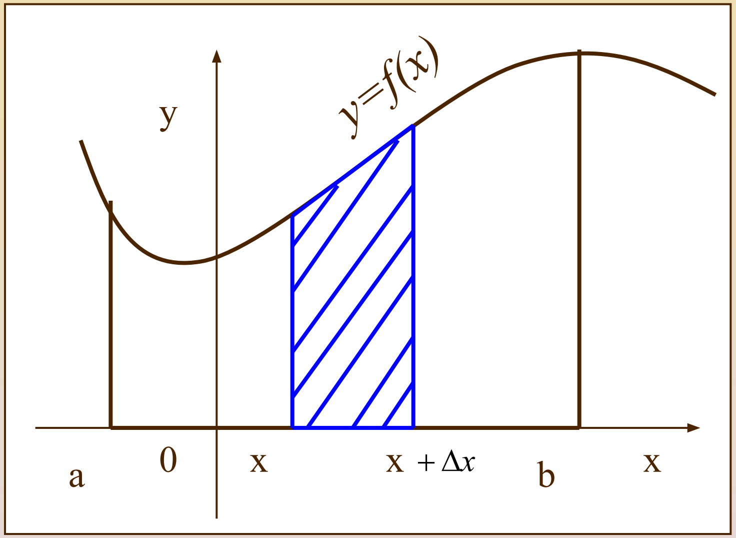
Выберем между *a и b* на оси абсцисс фиксированную точку *x* и рассмотрим криволинейную трапецию, обозначим ее площадь через *S(x)*.

Каждому *x* из отрезка [a; b] соответствует вполне определенное значение *S(x)*, то есть *S(x)* можно назвать-функцией, зависящей от *x*.

x=a, то *S(a)=0*.

Если *x=b* , то *S(b)=S (где S-площадь криволинейной трапеции)*.

Докажем , что $S'(x) = f(x)$

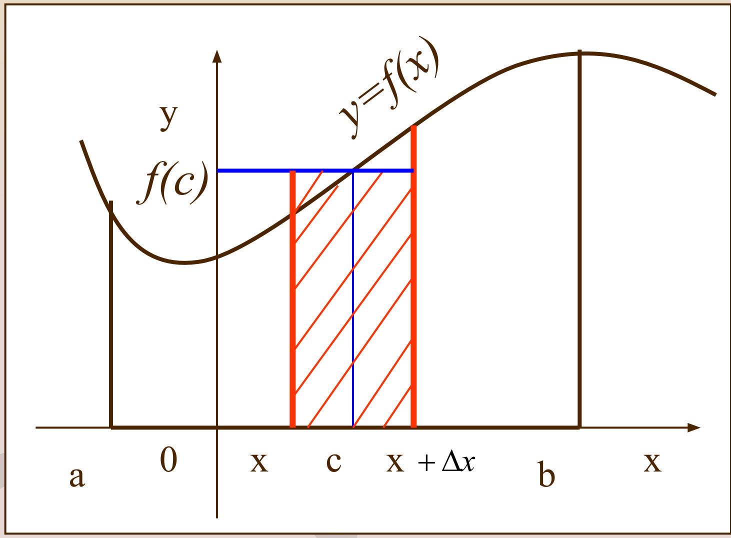


$$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \to f(x), при\ \Delta x \to 0.$$

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$$

$\Delta S(x)$ – это площадь криволинейной трапеции, опирающейся на отрезок $[x;\ x+\Delta x]$ (площадь фигуры заштрихованной на рисунке)

Возьмем прямоугольник, равновеликий этой криволинейной трапеции и с длиной Δx. Верхнее основание этого прямоугольника пересекает график функции в точке с координатами *(c ; f(c))*.



$$S_{пр-ка} = \Delta S(x) = \Delta x \cdot f(c)$$

$$f(c) = \frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$$

$$f(c) \to f(x), при\, \Delta x \to 0$$

$$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \to f(x)$$

$$S'(x) = f(x)$$

$S(x) = F(x) + C$ Найдем C:

$при\ \ x = b,\ \ S = S(b),\ S(b) = F(b) + C$

$при\ \ x = a,\ \ S(a) = F(a) + C,\ но\ \ S(a) = 0,$

$получаем\ C = -F(a)$

Тогда

$S(x) = F(x) - F(a),\ поскольку\ \ S = S(b),$

$получим\ \ S = S(b) = F(b) - F(a)$

Таким образом, мы доказали теорему и в дальнейшем площадь криволинейной трапеции будем вычислять по формуле

S=F(b)-F(a)

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2, y = 0, x = 1, x = 3$$

Решение:

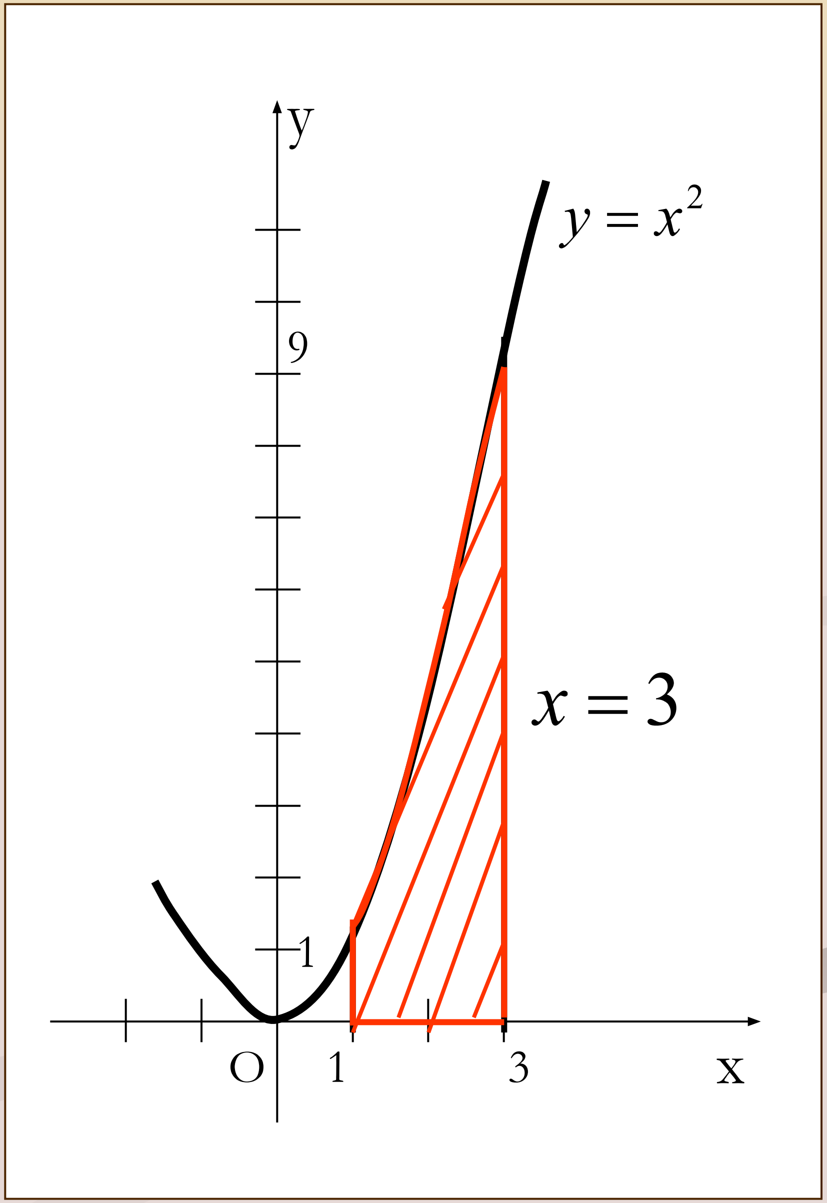
$$F(x) = \frac{x^3}{3}, a = 1, b = 3,$$

$$F(3) = 9,\ F(1) = \frac{1}{3}$$

$$S = F(3) - F(1)$$

$$S = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$$

Ответ: $8\frac{2}{3}$



Алгоритм нахождения площади криволинейной трапеции:

1. Изобразить чертеж и убедится, является ли данная фигура криволинейной трапецией
2. Найти первообразную $F(x)$
3. Применить формулу $S=F(b)-F(a)$