Уравнение прямой в пространстве

Поскольку прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, то одним из способов аналитического задания прямой в пространстве является задание с помощью системы из двух уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

задающих пару пересекающихся плоскостей.

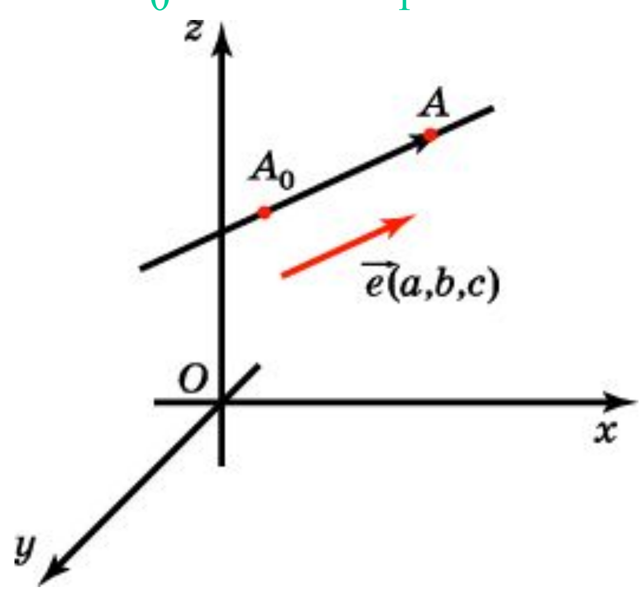
Уравнение прямой в пространстве

Прямую, проходящую через точку $A_0(x_0,y_0,z_0)$ с направляющим вектором $\vec{e}(a,b,c)$ можно задавать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

В случае, если прямая в пространстве задается двумя точками $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, то, выбирая в качестве направляющего векто ра вектор $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ и в качестве точки A_0 точку A_1, получим следующие уравнения

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1, \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1, \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1. \end{cases}$$



Упражнение 1

Какими уравнениями задаются координатные прямые?

Ответ: Ось Ox $\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ Ось Oy $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 0; \end{cases}$ Ось Oz $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t. \end{cases}$

Упражнение 2

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A(1,-2,3) с направляющим вектором, имеющим координаты (2,3,-1).

Ответ: $$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Упражнение 3

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(-2,1,-3)$, $A_2(5,4,6)$.

Ответ: $$\begin{cases} x = -2 + 7t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -3 + 9t. \end{cases}$$

Упражнение 4

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1,2,-3)$ и перпендикулярную плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

Ответ: $$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$$

Упражнение 5

В каком случае параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a_1 t + x_1, \\ y = b_1 t + y_1, \\ z = c_1 t + z_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a_2 t + x_2, \\ y = b_2 t + y_2, \\ z = c_2 t + z_2 \end{cases}$$

определяют перпендикулярные прямые?

Ответ: Если выполняется равенство $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

Упражнение 6

Определите взаимное расположение прямой, задаваемой уравнениями

$$\begin{cases} x-1=5t, \\ y-1=4t, \\ z-1=7t, \end{cases}$$

и плоскости, задаваемой уравнением $x - 3y + z + 1 = 0$.

Ответ: Перпендикулярны.

Упражнение 7

Найдите координаты точки пересечения плоскости $2x - y + z - 3 = 0$ и прямой, проходящей через точки A(-1,0,2) и B(3,1,2).

Ответ: $(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, 2)$.

Упражнение 8

Определите взаимное расположение прямых, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} x-1=2t, \\ y-1=-t, \\ z-1=3t, \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=t, \\ y=8t, \\ z-4=2t. \end{cases}$$

Ответ: Перпендикулярны.

Упражнение 9

Точка движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{e}$ (1,2,3). В начальный момент времени $t = 0$ она имела координаты (-1,1,-2). Какие координаты она будет иметь в момент времени t=4?

Ответ: (3,9,10).

Упражнение 10

Параметрические уравнения движения материальной точки в пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -t + 2, \\ z = 3t - 3. \end{cases}$$

Найдите скорость.

Ответ: $\sqrt{14}.$

Упражнение 11

Точка движется прямолинейно и равномерно. В момент времени $t = 2$ она имела координаты (3,4,0), а в момент времени $t = 6$ - координаты (2,1,3). Какова скорость движения точки?

Ответ: $\frac{\sqrt{19}}{4}$.

Упражнение 12

Прямая в пространстве задана параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$
Напишите параметрические уравнения прямых, симметричных данной относительно координатных плоскостей.

Ответ: $\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = -ct - z_0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = -bt - y_0, \\ z = ct + z_0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -at - x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$