Координатный метод

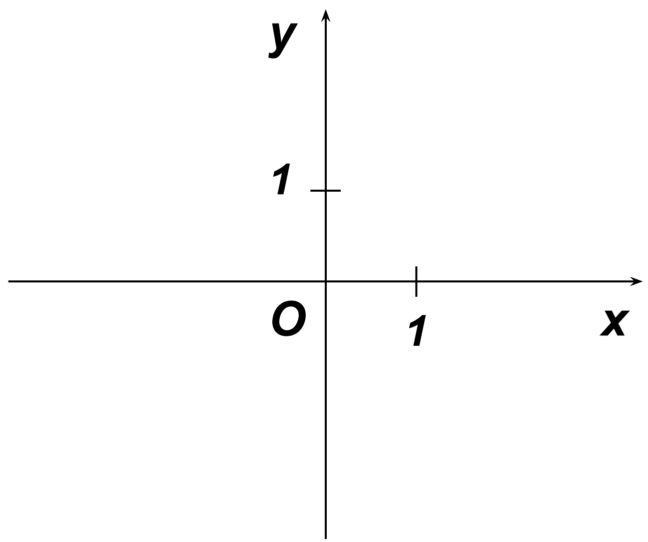
Геометрия

Подготовила Глазкрицкая Светлана Геннадьевна

Содержание

- Координаты точки
- Расстояние между точками
- Уравнение окружности
- Координаты середины отрезка
- Уравнение прямой
- Заключение

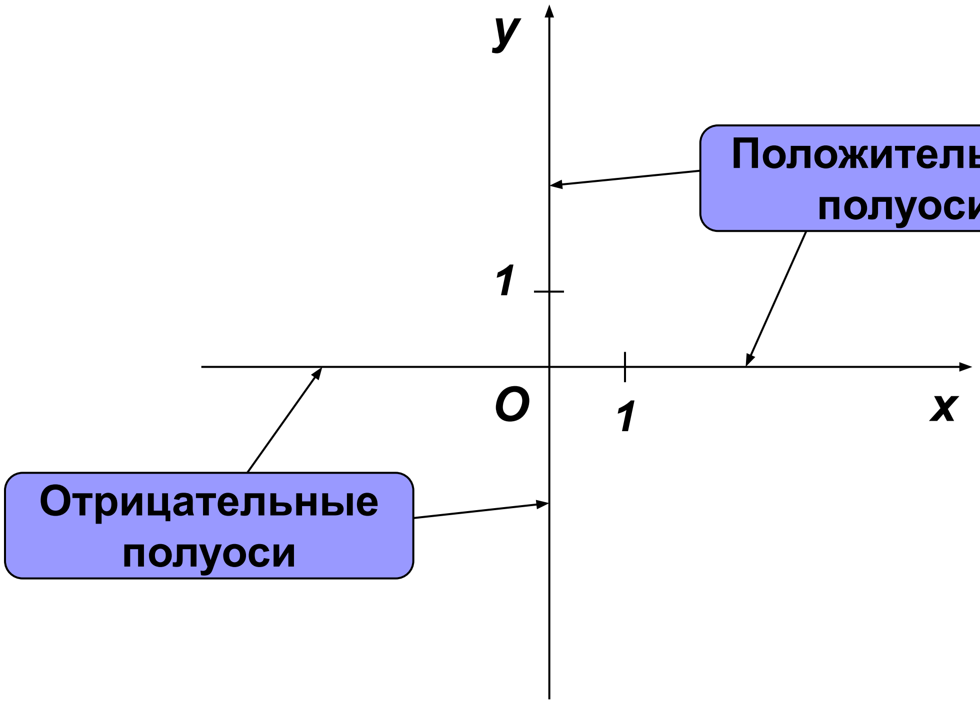
Координаты точки



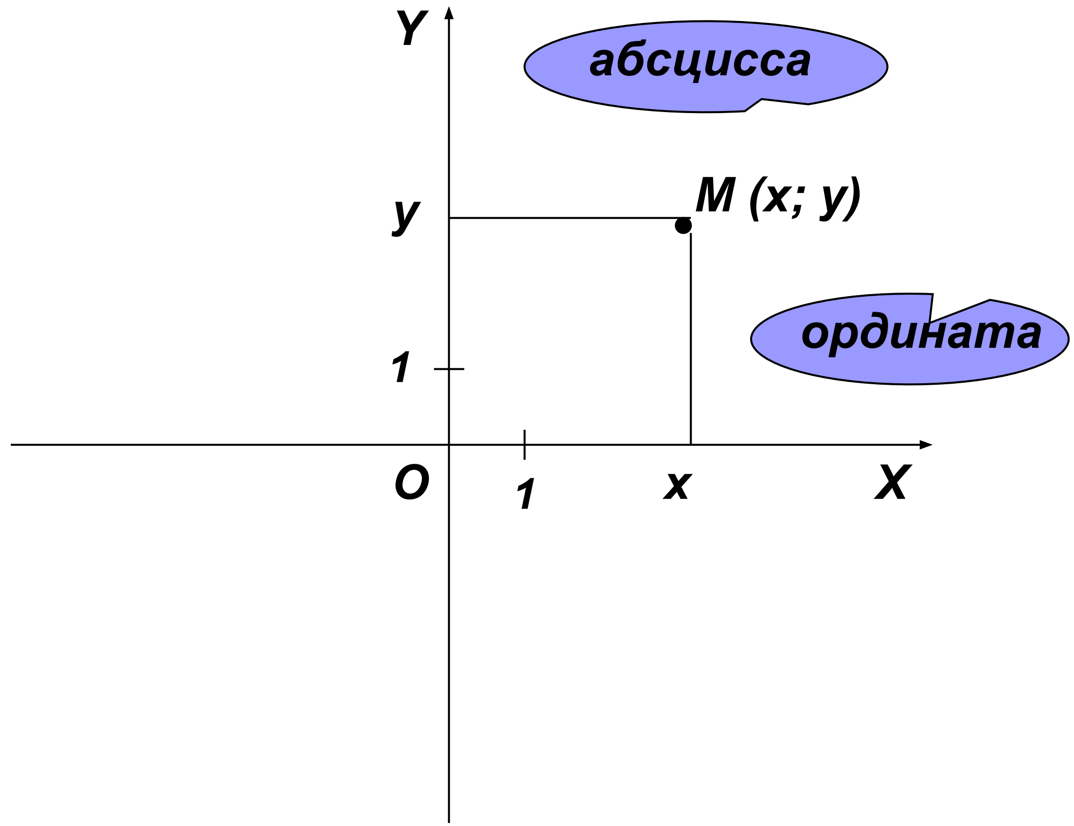
Говорят, что на плоскости задана ***прямоугольная система координат***, если через некоторую точку ***О*** плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из которых выбрано направление (которое на рисунке отмечается стрелкой) и одна и та же единица измерения отрезков. Точка ***О*** называется ***началом координат***, а прямые с выбранными на них направлениями – ***осями координат***. Одна из осей координат называется ***осью абсцисс***, а другая – ***осью ординат***. Ось абсцисс обозначается ***Ох***, а ось ординат – ***Оу***.

Прямоугольная система координат:

- ✔ ***О*** – начало;
- ✔ ***Ох*** – ось абсцисс;
- ✔ ***Оу*** – ось ординат;
- ✔ ***Ох*** $\perp$ ***Оу***
- ✔ на осях выбран масштаб (единичный отрезок)



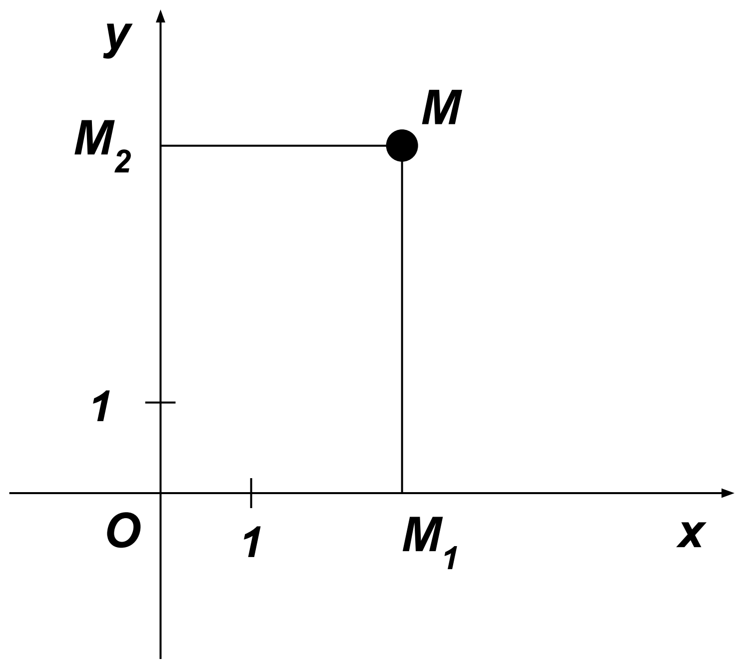
Для каждой из осей определены два противоположных луча с началом в точке ***O***. Луч, направление которого совпадает с направлением координатной оси, называется ***положительной полуосью***, а другой – ***отрицательной полуосью***.



Если на плоскости задана прямоугольная система координат, то в этой системе координат каждой точке ***M*** плоскости соответствует упорядоченная пара чисел ***x***, ***y***. Эта пара чисел называется ***координатами точки M***. Первая координата называется ***абсциссой***, вторая – ***ординатой***.

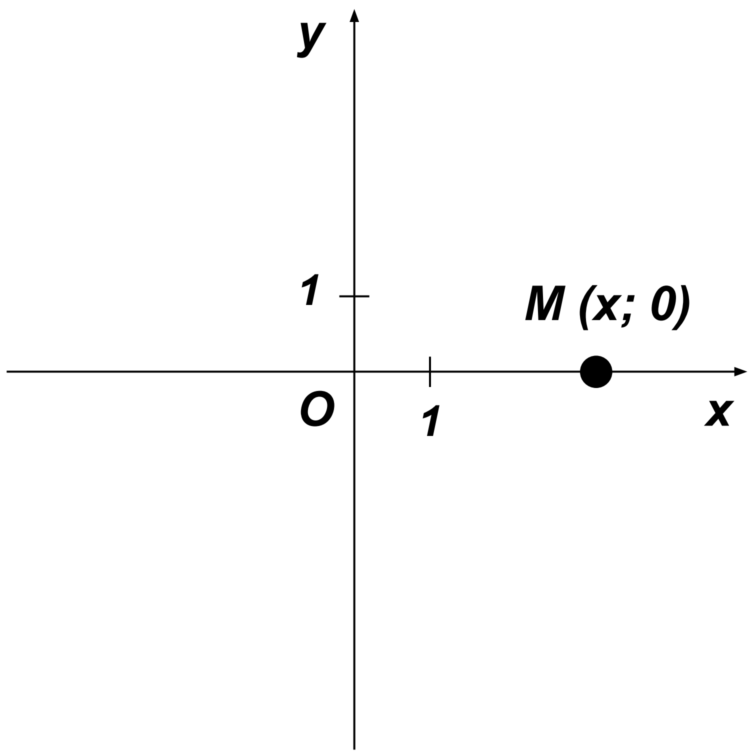
Пусть M_1 и M_2 – точки пересечения осей координат Ox и Oy с прямыми, проходящими перпендикулярно им через точку M соответственно. Тогда координаты x, y точки M определяются следующим образом:

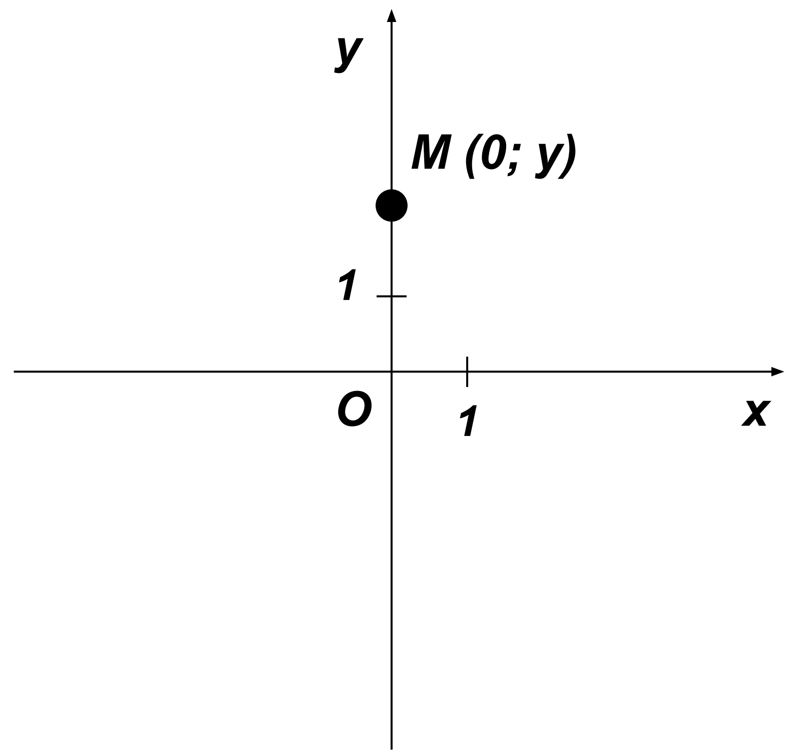
- ✔ $x = OM_1$, если точка M_1 принадлежит положительной полуоси;
- ✔ $x = 0$, если M_1 совпадает с точкой O;
- ✔ $x = – OM_1$, если точка M_1 принадлежит отрицательной полуоси;
- ✔ $y = OM_2$, если M_2 принадлежит положительной полуоси;
- ✔ $y = 0$, если M_2 совпадает с точкой O;
- ✔ $y = – OM$, если точка M_2 принадлежит отрицательной полуоси.



Координаты точки ***M*** записываются в скобках после обозначения точки: ***M (x; y)*** (на первом месте записывается абсцисса, на втором записывается ордината).

Если точка ***M*** лежит на оси ***Ox***, то она имеет координаты ***(x; 0)***, если ***M*** лежит на оси ***Oy***, то ее координаты – ***(0; y)***.





Рассмотрим примеры.

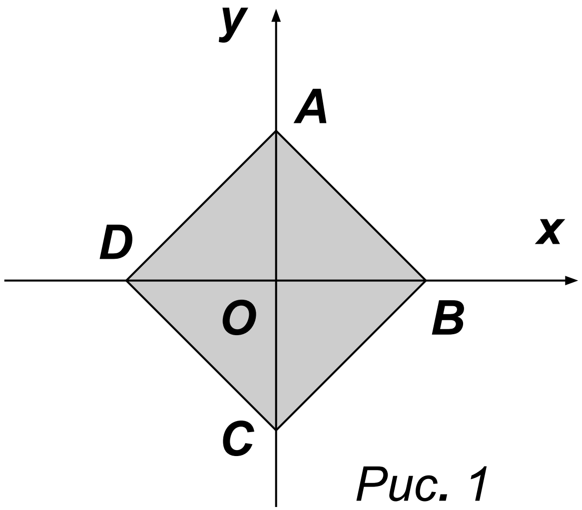


Рис. 1

Пусть ***ABCD*** – квадрат, длина стороны которого равна двум единицам длины, а прямоугольная система координат выбрана так, как показано на рисунке 1. Тогда в выбранной системе вершины квадрата имеют координаты:

A **(0; $\sqrt{2}$); *B* ($\sqrt{2}$; 0); *C* (0; –$\sqrt{2}$); *D* (–$\sqrt{2}$; 0)**.

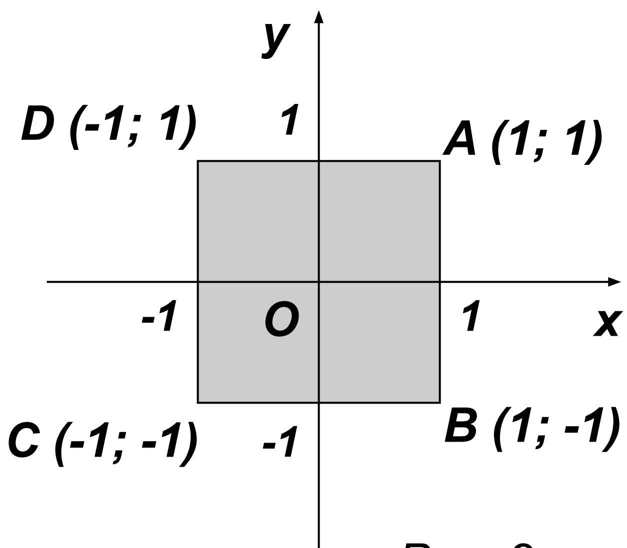


Рис. 2

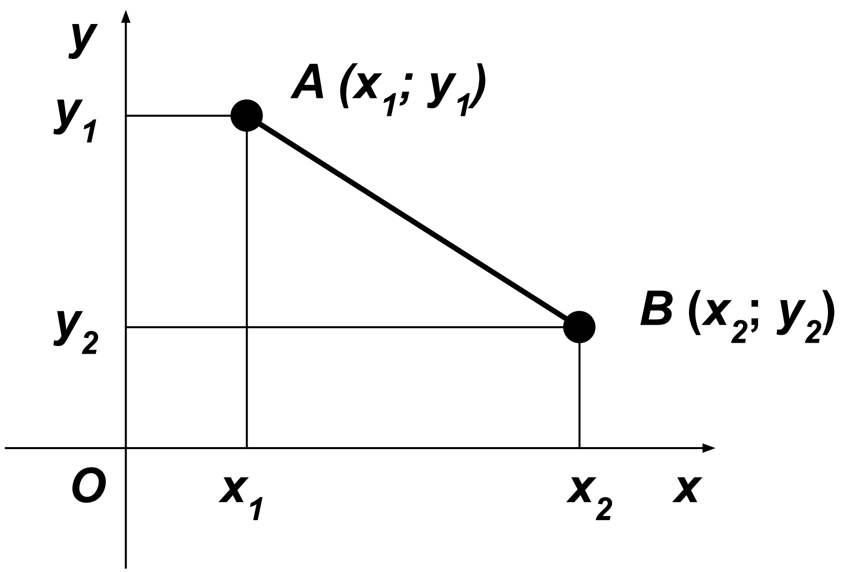
Если система координат выбрана так, как показано на рисунке 2, то координаты вершин данного квадрата в этой системе имеют координаты:

A **(1; 1); *B* (1; –1); *C* (–1; –1); *D* (–1; 1)**.

Расстояние между точками

Рассмотрим вопрос о нахождении расстояния между точками, если известны их координаты. Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат и известны координаты точек ***A*** и ***B*** в этой системе координат: ***A*** **(*x*$_1$; *y*$_1$)** и ***B*** **(*x*$_2$; *y*$_2$)**. Тогда расстояние ***d*** **(*A*, *B*) = *AB*** между точками ***A*** и ***B*** можно найти по формуле

$$\boxed{d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

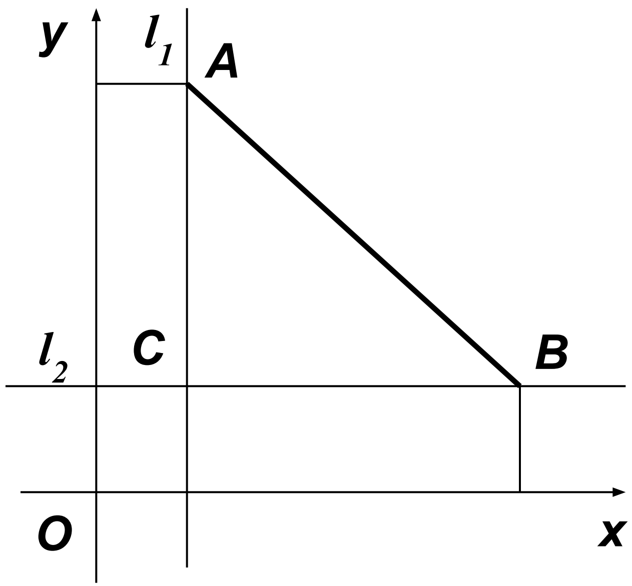


Докажем формулу $d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ для случая, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, т. е. когда отрезок ***AB*** не параллелен ни одной из координатных осей. Пусть ***C*** – точка пересечения прямых l_1 и l_2, которые проходят через точки ***A***, ***B*** соответственно и параллельны осям ***Oy***, ***Ox***. Рассмотрим прямоугольный треугольник ***ABC***. Длины сторон ***AC*** и ***BC*** равны: ***AC =*** $|x_2-x_1|$, ***BC =*** $|y_2-y_1|$. Тогда по теореме Пифагора

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$$

или

$$d(A,B)=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$



Заметим, что формула $d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ верна и для случаев:

а) $\boldsymbol{x_1 = x_2}$, $\boldsymbol{y_1 \neq y_2}$ (отрезок параллелен оси ***Oy***, рисунок 1);

б) $\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$, $\boldsymbol{y_1 = y_2}$ (отрезок параллелен оси ***Ox***, рисунок 2);

в) $\boldsymbol{x_1 = x_2}$, $\boldsymbol{y_1 = y_2}$ (точки ***A*** и ***B*** совпадают).

В случае а) ***d (A, B) = AB =*** $\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|y_2-y_1|$.

В случае б) ***d (A, B) = AB =*** $\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$.

Если точки ***A*** и ***B*** совпадают, то ***d (A, B) = 0***.

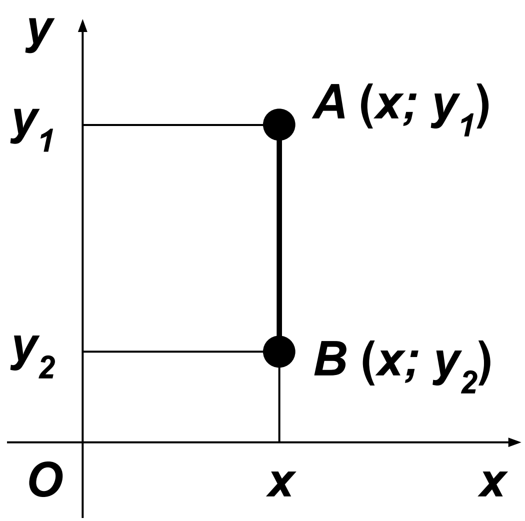


Рис. 1

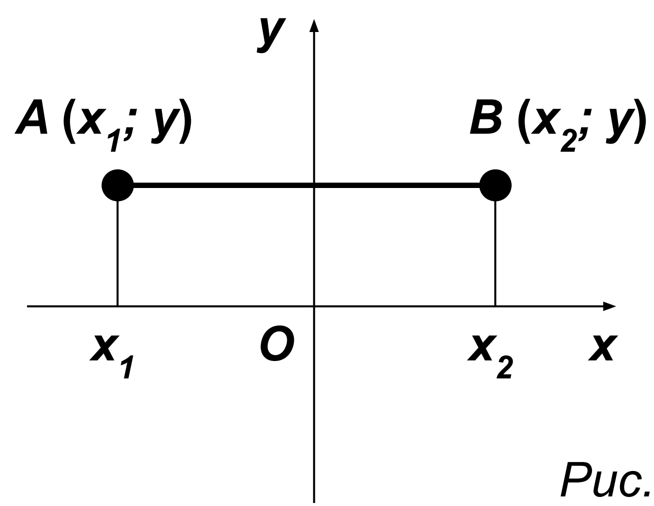


Рис. 2

Рассмотрим пример.

Пусть необходимо вычислить площадь квадрата ***ABCD***, две вершины которого имеют координаты ***A* (8; 8)** и ***B* (5; 5)**. Площадь квадрата равна квадрату длины стороны.

Следовательно, $S_{ABCD} = AB^2$. Для вычисления длины стороны ***AB*** воспользуемся формулой расстояния между двумя точками

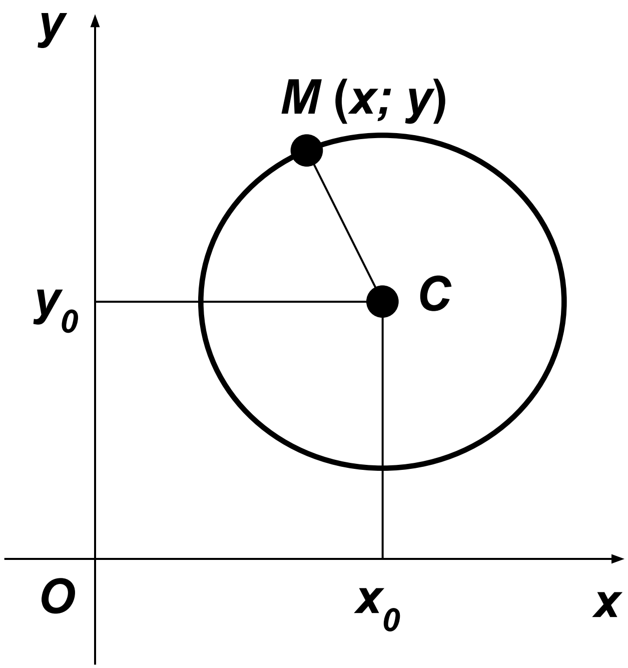
$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};$$

$$AB=\sqrt{(8-5)^2+(8-5)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь квадрата S_{ABCD} ***= AB = 18 кв. ед***.

Ответ: 18 кв. ед.

Уравнение окружности



Рассмотрим вопрос об уравнении окружности.

Уравнение с двумя переменными называется ***уравнением фигуры***, если ему удовлетворяют координаты любой точки этой фигуры и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих данной фигуре.

Составим уравнение окружности с центром в точке $O\ (x_0;\ y_0)$ и радиусом R.

Пусть точка $M\ (x;\ y)$ принадлежит окружности. Тогда в силу определения окружности $CM = R$. Следовательно, квадрат расстояния между точками C и M равен квадрату радиуса:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad .$$

Пусть точка $\boldsymbol{M_1}$ $(\boldsymbol{x_1};\ \boldsymbol{y_1})$ не принадлежит окружности, тогда $\boldsymbol{CM_1 \neq R}$, а значит, $(\boldsymbol{x - x_1})^2 + (\boldsymbol{y - y_1})^2 \neq \boldsymbol{R}^2$, т. е. если точка не принадлежит окружности, то ее координаты не удовлетворяют уравнению

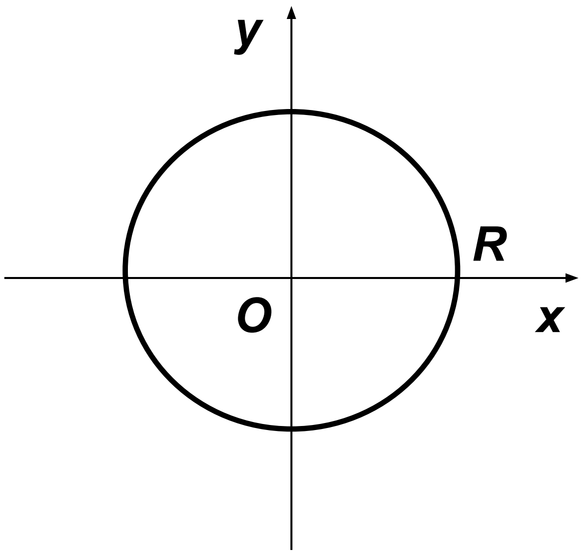
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 .$$

Таким образом, уравнение

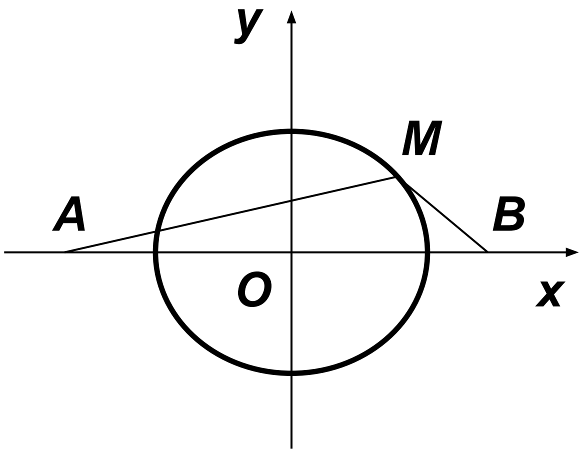
$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$$

есть ***уравнение окружности*** с центром в точке $\boldsymbol{C}$ $(\boldsymbol{x_0};\ \boldsymbol{y_0})$ и радиусом $\boldsymbol{R}$.

Заметим, что если центр окружности совпадает с началом системы координат, то уравнение окружности имеет вид



$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2} .$$



Задача. Составьте уравнение фигуры на плоскости, состоящей из всех точек, сумма квадратов расстояний которых от точек ***A*** **(*–6; 0*)** и ***B*** **(*6; 0*)** равна 104.

Решение.

1) Пусть ***M*** **(*x; y*)** – точка, принадлежащая фигуре, уравнение которой необходимо составить. Тогда по условию задачи $\boldsymbol{AM^2 + BM^2 = 104}$.

2) Воспользуемся формулой для нахождения расстояния между точками, координаты которых известны. Получаем:

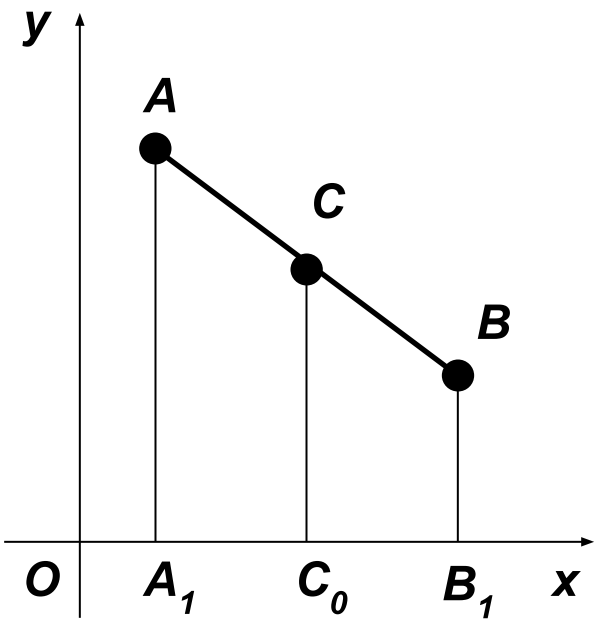
$$AM = \sqrt{(x+6)^2 + y^2}; BM = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}.$$

3) По условию задачи $(x + 6)^2 + y^2 + (x – 6)^2 + y^2 = 104$. После упрощения получаем $x^2 + y^2 = 16$.

Если точка ***M*** **(*x; y*)** не принадлежит фигуре, о которой идет речь в задаче, то $\boldsymbol{AM^2 + BM^2 \neq 104}$, а значит, координаты точки *M* (*x; y*) не удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 16$. Таким образом, уравнение фигуры имеет вид $x^2 + y^2 = 16$ и фигура является окружностью с центром в начале координат и радиусом 4.

Координаты середины отрезка

Рассмотрим вопрос о вычислении координат середины отрезка, если известны координаты концов этого отрезка.



Пусть ***A*** (x_1; y_1) и ***B*** (x_2; y_2) – произвольные точки плоскости, а точка ***C*** (x_0; y_0) – середина отрезка ***AB***. Найдем координаты x_0 и y_0.

Найдем координату x_0.

1) Пусть отрезок ***AB*** не параллелен оси ***Oy***, т. е. $x_1 \neq x_2$. Проведем через точки ***A***, ***B*** и ***C*** прямые, параллельные оси ***Oy***, которые пересекают ось ***Ox*** в точках A_1 (x_1; 0), B_1 (x_2; 0) и C_0 (x_0; 0) соответственно. Тогда по теореме Фалеса точка C_0 (x_0; 0) – середина отрезка A_1B_1, т. е. $A_1C_0 = C_0B_1$ или $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2|$. Отсюда следует, что либо $x_0 - x_1 = x_0 - x_2$, либо $x_0 - x_1 = -(x_0 - x_2)$. Так как $x_1 \neq x_2$, то первое равенство невозможно, а значит, верно второе равенство, из которого получаем, что

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

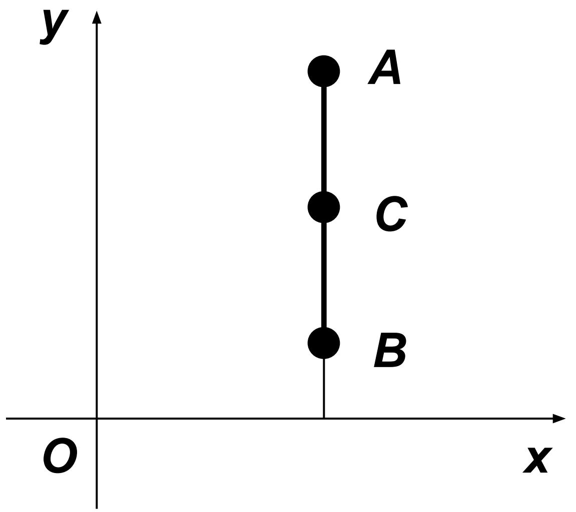


Рис. 1

2) Пусть отрезок ***AB*** параллелен оси ***Oy***, т. е. $x_1 = x_2$. В этом случае все точки A_1, B_1, C_0 имеют одну и ту же абсциссу, а следовательно, формула

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

верна и в этом случае (рис. 1).

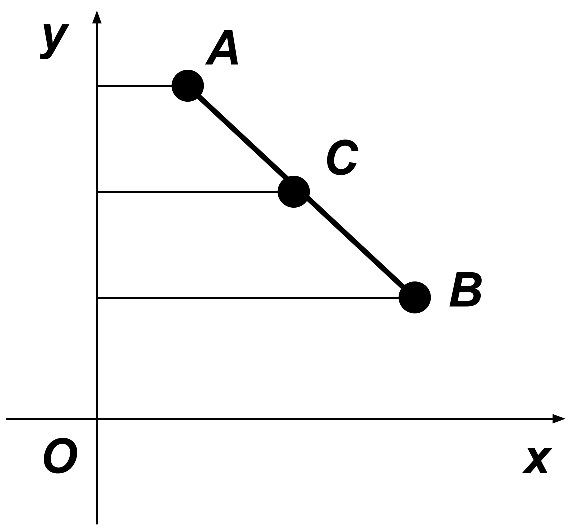
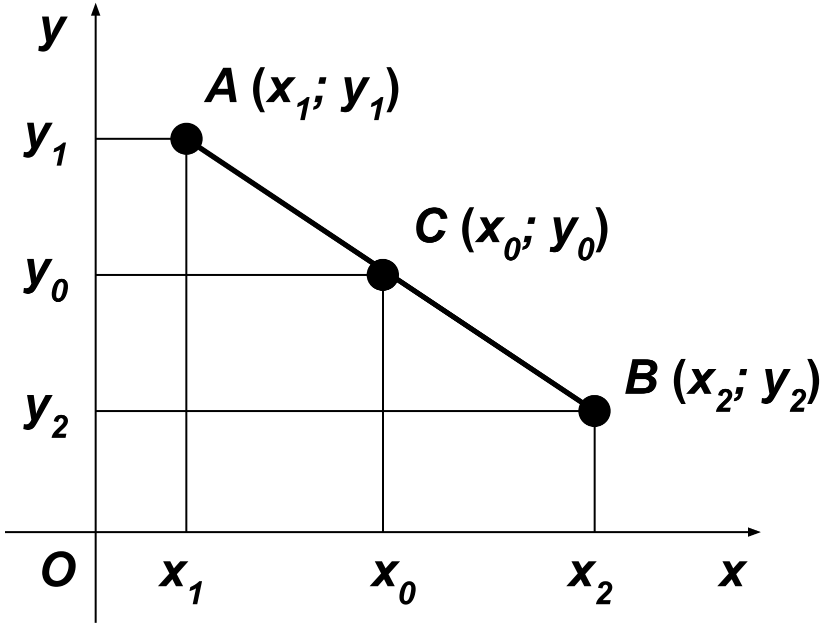


Рис. 2

Координата y_0 точки C_0 находится аналогично. В этом случае рассматриваются прямые, параллельные оси ***Ox*** (рис. 2), а соответствующая формула имеет вид

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Середина ***C*** отрезка ***AB***, где ***A*** $(x_1; y_1)$, ***B*** $(x_2; y_2)$:

$$C(x_0; y_0)$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Задача. Концами отрезка служат точки ***A*** **(*–8; –5*)**, ***B*** **(*10; 4*)**. Найдите координаты точек ***C*** и ***D***, которые делят отрезок ***AB*** на три равные части.

Решение.

Пусть точки ***C*** и ***D*** имеют координаты $(x_C;\ y_C)$ и $(x_D;\ y_D)$.

1) Найдем абсциссы точек C и D.

Так как точка ***C*** – середина отрезка ***AD***, то выполняется равенство

$$x_C = \frac{x_D - 8}{2},$$

так как точка ***D*** – середина отрезка ***CB***, то

$$x_D = \frac{10 + x_C}{2}.$$

Решив систему $\begin{cases} 2x_C = x_D - 8, \\ 2x_D = 10 + x_C, \end{cases}$

находим $x_C = -2$, $x_D = 4$.

2) *Найдем ординаты точек* ***C*** *и* ***D***.

Для нахождения ординат точек ***C*** и ***D*** воспользуемся равенствами

$$y_C = \frac{y_D - 5}{2}; \qquad y_D = \frac{y_C + 4}{2}.$$

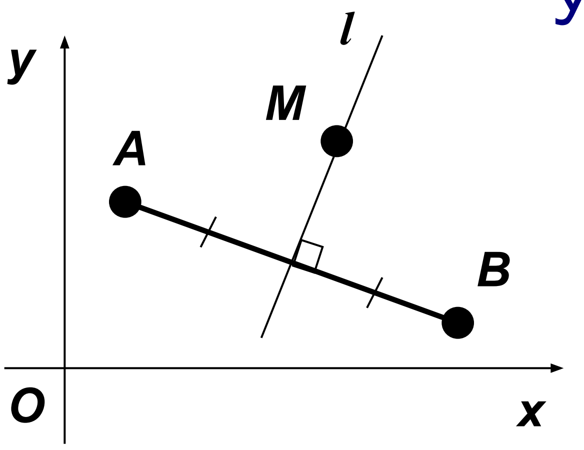
Решив систему

$$\begin{cases} \boldsymbol{2y_C = y_D - 5}, \\ \boldsymbol{2y_D = y_C + 4}, \end{cases}$$

находим $\boldsymbol{y_C = -2}$, $\boldsymbol{y_D = 1}$.

Ответ: *C* (*–2; –2*), *D* (*4; 1*).

Уравнение прямой



Выведем уравнение прямой, проходящей через две точки, координаты которых известны.

Пусть на плоскости дана прямая l и выбрана прямоугольная система координат. Рассмотрим две различные точки $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$ такие, что прямая l является серединным перпендикуляром для отрезка AB.

1) Если точка $M\ (x; y)$ лежит на прямой l, то $AM = BM$. Следовательно, координаты точки M удовлетворяют уравнению

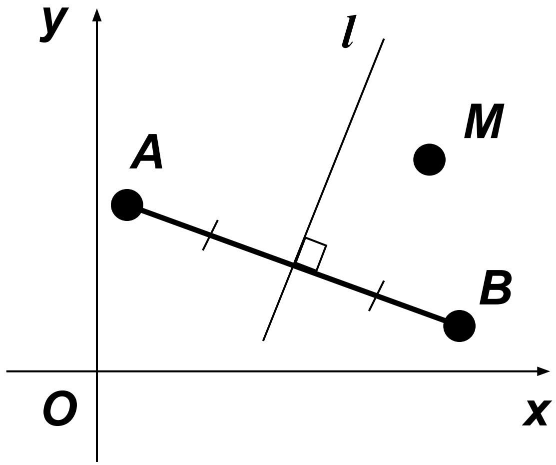
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2,$$

которое после преобразования принимает вид

$$ax + by + c = 0,$$

где $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$, $c = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2$. Заметим, что хотя бы один из коэффициентов a, b уравнения $ax + by + c = 0$ не равен нулю, т. к. точки A и B различные, а значит, хотя бы одна из разностей $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$ не равна нулю.

Таким образом, если точка M лежит на прямой l, то ее координаты удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, где коэффициенты a и b одновременно не равны нулю.



2) Если точка ***M*** (***x; y***) не лежит на прямой l, то ***AM ≠ BM*** и $AM^2 \neq BM^2$, а следовательно, координаты точки ***M*** не удовлетворяют уравнению ***ax + by + c = 0***.

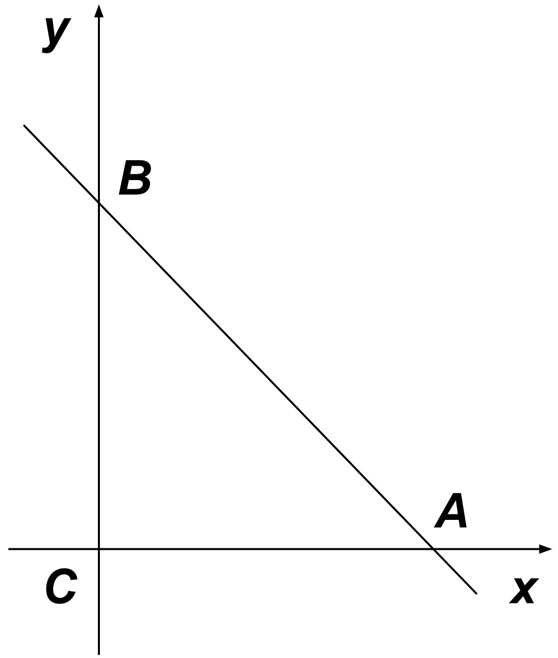
Таким образом, ***уравнением прямой*** в прямоугольной системе координат является уравнение первой степени

$$\boxed{ax + by + c = 0},$$

где ***a*** и ***b*** одновременно не равны нулю.

- ✔ Если ***a = 0***, то $y = c_1$ – прямая || ***Ox***.
- ✔ Если ***b = 0***, то $y = c_2$ – прямая || ***Oy***.
- ✔ Если ***c = 0***, то прямая проходит через ***O*** (***0; 0***).

Задача. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ***ACB*** с прямым углом при вершине ***C***. Найдите множество точек ***M*** плоскости, для каждой из которых выполняется условие $AM^2 + BM^2 = 2CM^2$.



Решение.

Рассмотрим систему координат, начало которой совпадает с вершиной ***C***, а вершины ***A*** и ***B*** расположены на осях ***Ox*** и ***Oy***, как показано на рисунке. Если катет данного треугольника равен ***a***, тогда $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(0; a)$ – координаты точек ***C***, ***A*** и ***B*** в выбранной системе координат соответственно. Пусть $(x; y)$ – координаты точки ***M***, принадлежащей искомому множеству точек.

Воспользуемся формулой для нахождения расстояния между точками, если известны их координаты:

$$AM=\sqrt{(x-a)^2+y^2},\quad BM=\sqrt{x^2+(y-a)^2},\ CM=\sqrt{x^2+y^2}.$$

По условию задачи $\boldsymbol{AM^2+BM^2=2CM^2}$, следовательно,

$$(x-a)^2+y^2+x^2+(y-a)^2=2(x^2+y^2).$$

Отсюда получаем уравнение $\boldsymbol{x+y-a=0}$.

Если точка $\boldsymbol{M\ (x;\ y)}$ не принадлежит искомому множеству точек, то $\boldsymbol{AM^2+BM^2\neq 2CM^2}$, а значит, координаты точки $\boldsymbol{M}$ не удовлетворяют уравнению $\boldsymbol{x+y-a=0}$. Таким образом, $\boldsymbol{x+y-a=0}$ есть уравнение искомого множества точек и это множество есть прямая, на которой лежит гипотенуза ***AB*** данного треугольника.

Заключение

Суть координатного метода заключается в том, что введение системы координат позволяет записать условие задачи в координатах и решать ее, используя знания по алгебре.