ГИПОТЕЗА ПУАНКАРЕ И ТЕРСТОНА.

Двумерные многообразия

Пусть X и Y – два множества в евклидовом пространстве произвольной размерности. Если задано отображение $f : X \to Y$, которое каждой точке множества X ставит в соответствие точку множества Y и
1) отображение взаимно-однозначно, то есть различные точки переходят в различные;
2) отображение непрерывно, то есть близкие точки переходят в близкие;
3) обратное отображение f^{-1} непрерывно, то множества X и Y – гомеоморфны, а отображение f называется *гомеоморфизмом*.
Например, внутренность круга гомеоморфна всей плоскости (рис.1)

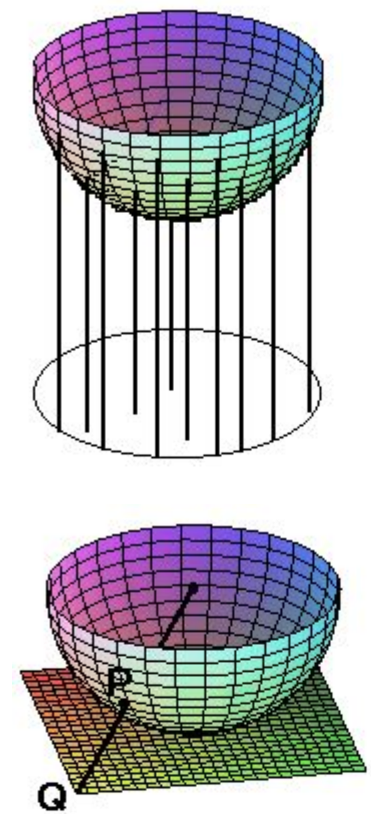


Рис. 1

Двумерные многообразия

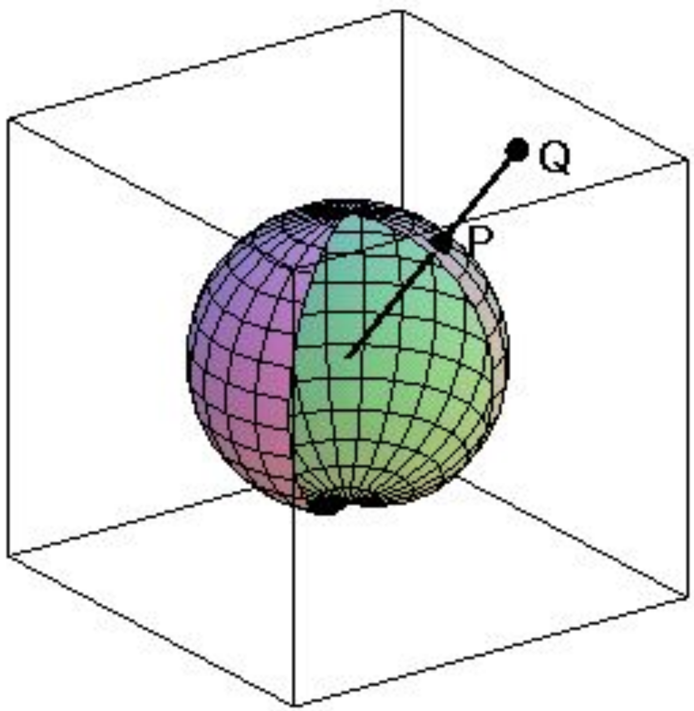


Рис. 2

Например, поверхность куба гомеоморфна сфере (рис.2)

Двумерные многообразия

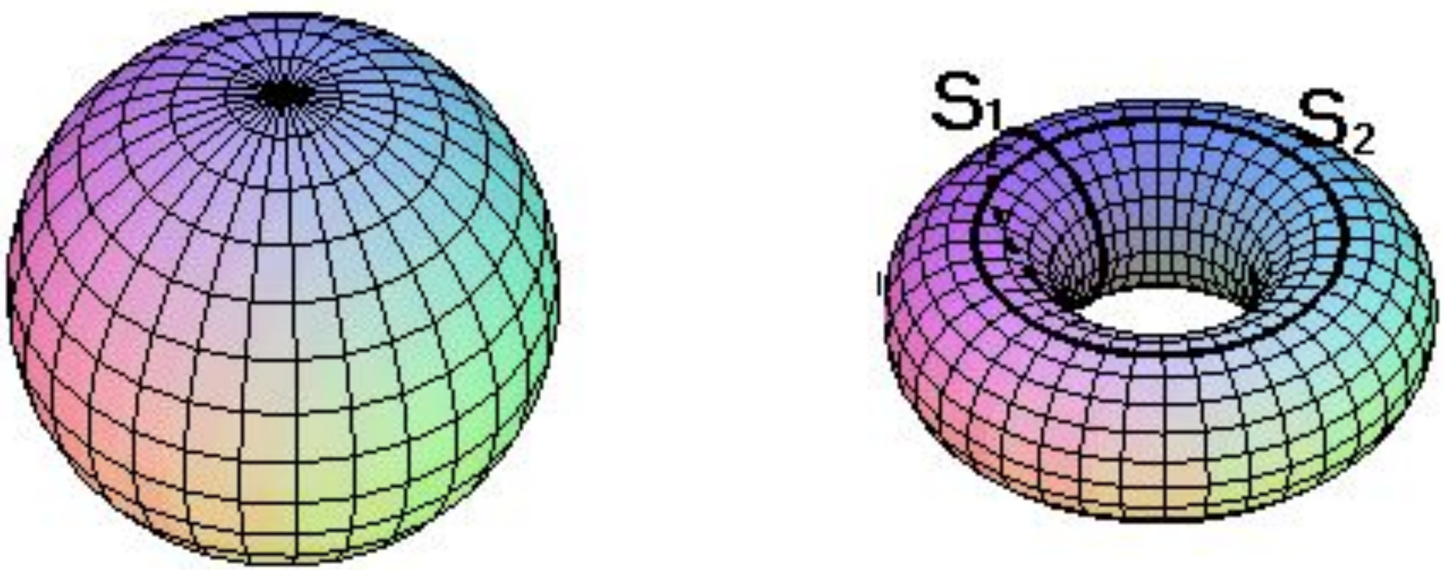


Рис. 3

Двумерные многообразия

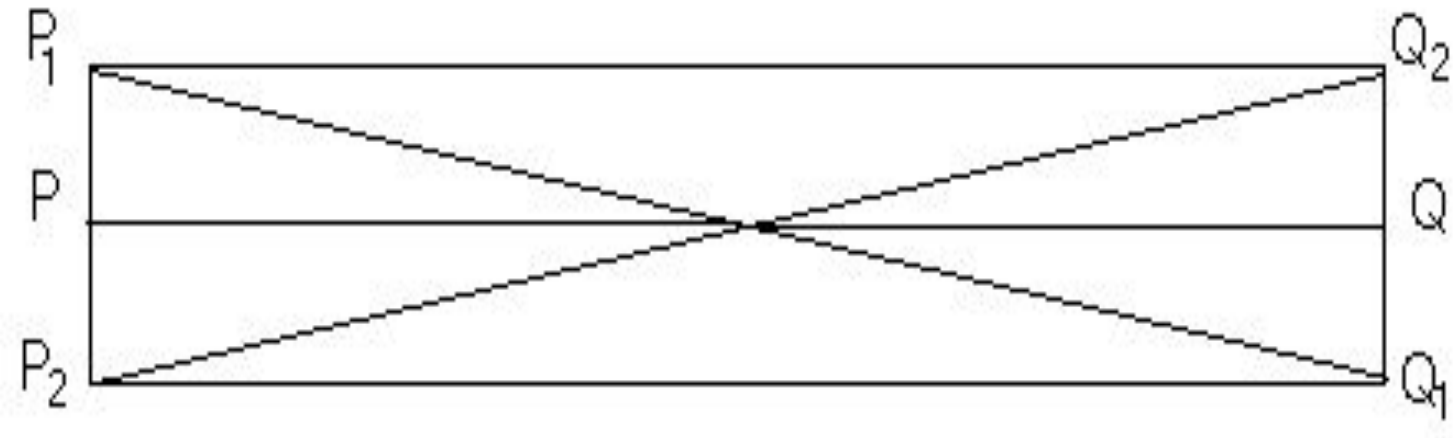


Рис. 4

Двумерные многообразия

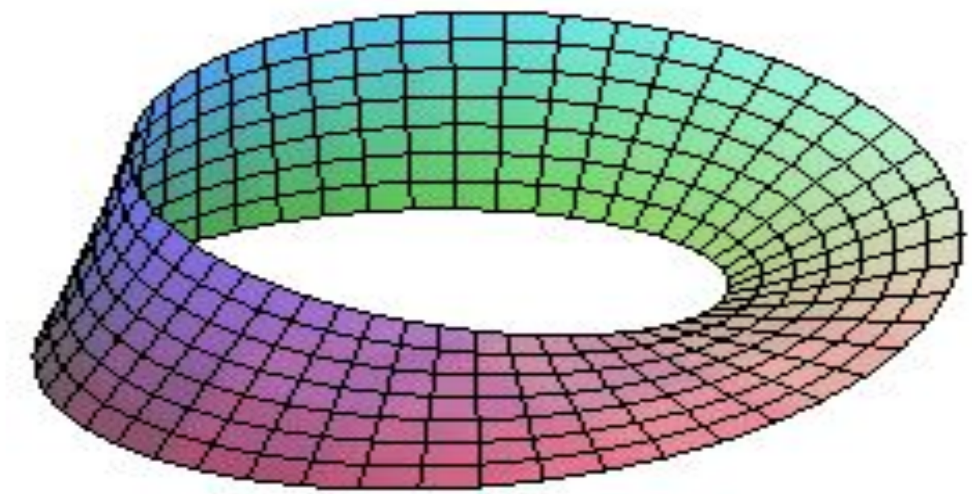


Рис. 5

Двумерные многообразия

Любая компактная двумерная поверхность гомеоморфна либо сфере с *p* ручками, либо сфере с *q* листами Мебиуса, причем сферы с ручками не гомеоморфны сферам с листами Мебиуса, так как второй ряд поверхностей образуют неориенти-руемые поверхности. Сферы с различным числом ручек и различным числом листов Мебиуса также негомеоморфны между собой.

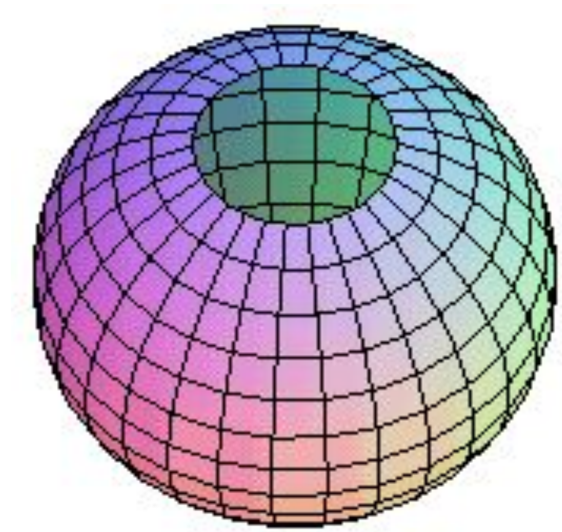


Рис. 6

Двумерные многообразия

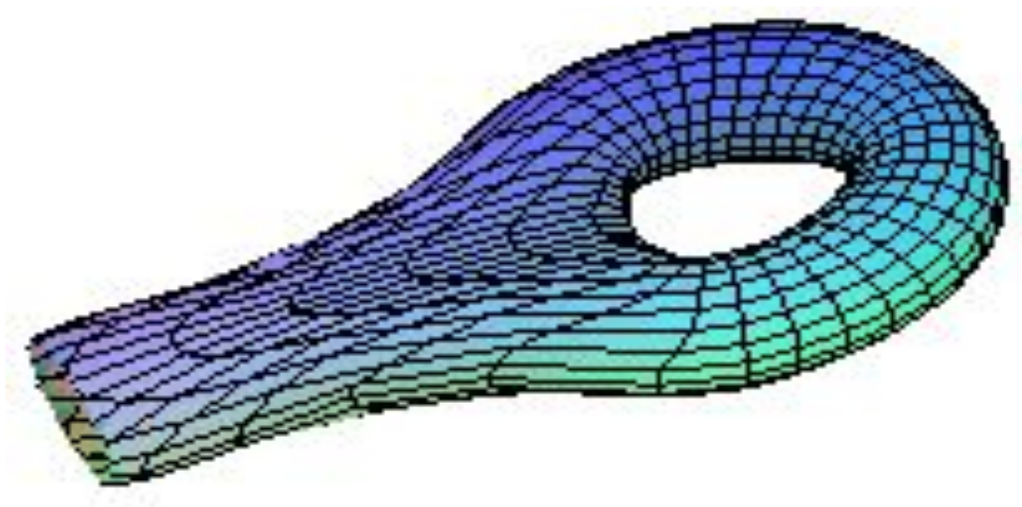


Рис. 7

Двумерные многообразия

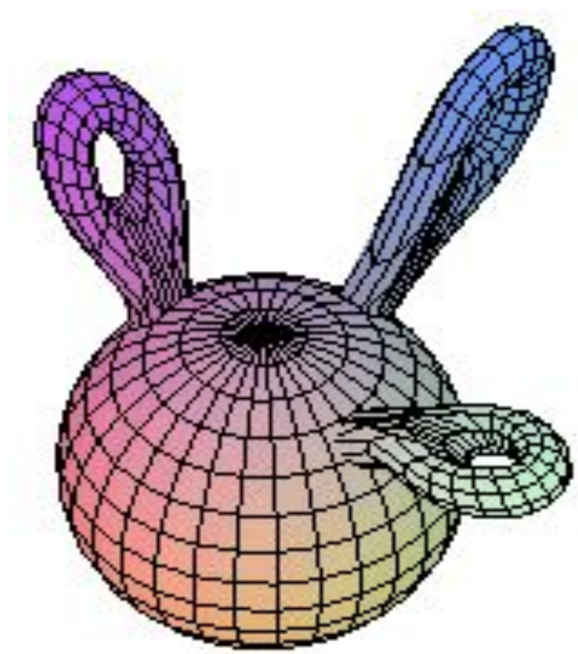


Рис.8

Двумерные многообразия

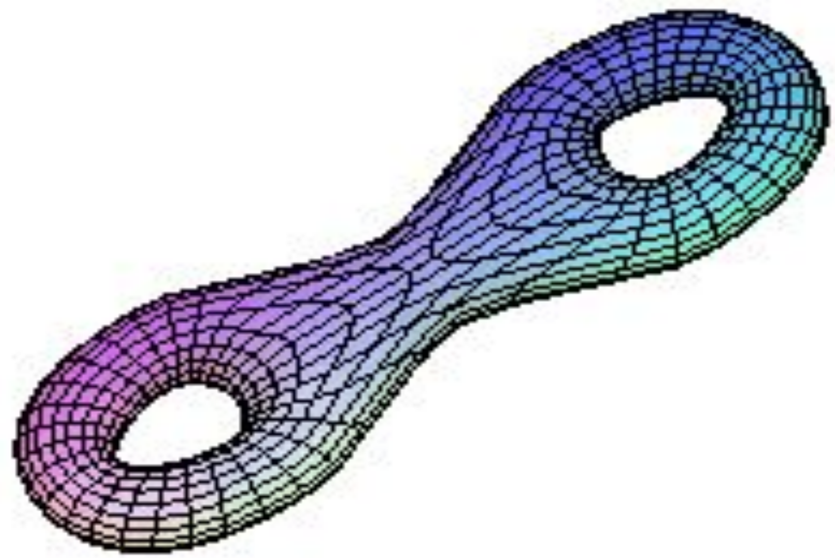


Рис.9

Двумерные многообразия

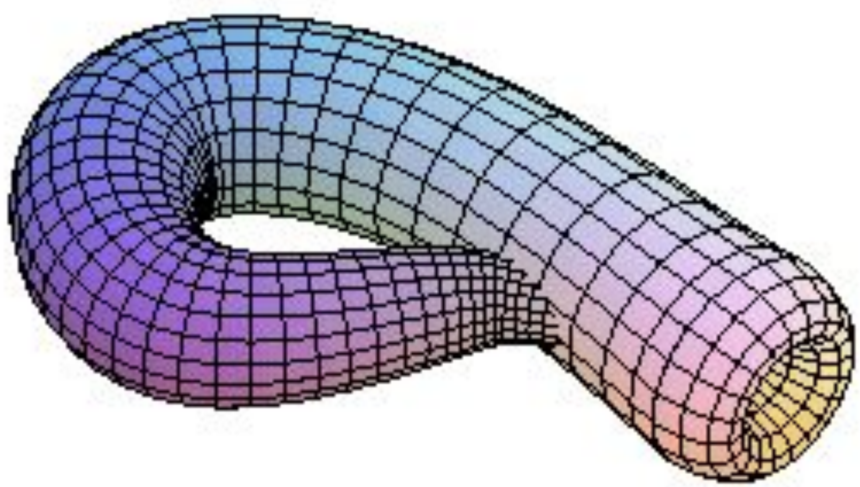


Рис. 10

Фундаментальная группа

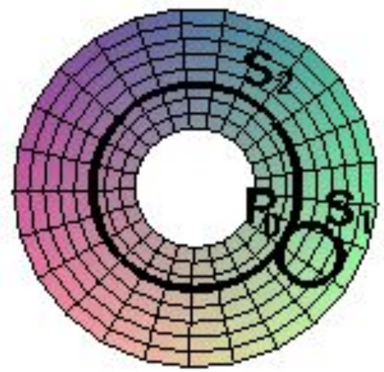


Рис. 11

Две петли γ_1 и γ_2, проходящие через фиксированную точку P, называются *гомотопными*, если их можно непрерывно деформировать одна в другую. И мы уже можем рассматривать класс $[\gamma]$ гомотопных петель.

Трехмерные многообразия

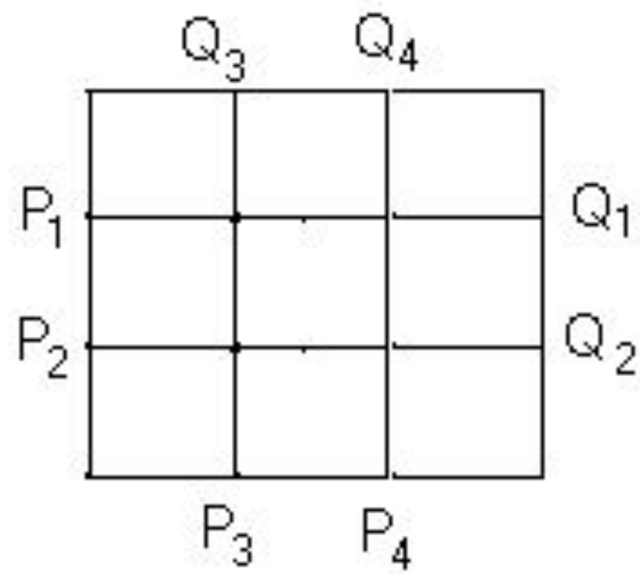


Рис. 12

Трехмерные многобразия

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$$

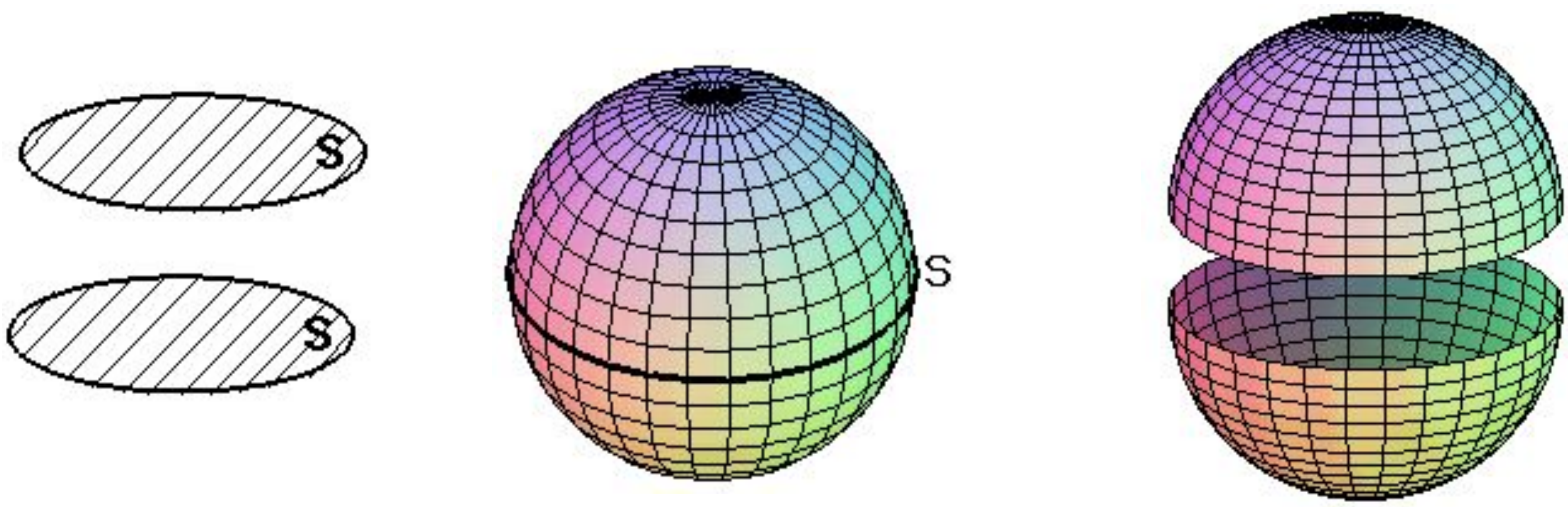


Рис.13

Трехмерные многообразия

Каждое компактное ориентируемое 3-мерное многообразие раскладывается в связную сумму

$$M = (K_1 \# ... \# K_p) \# (L_1 \# ... \# L_q) \#_1^r (S^2 \times S^1),$$

где сомножители K_i, L_j - замкнутые неприводимые трехмерные многообразия, $S^2 \times S^1$ -декартово произведение окружности на двумерную сферу и в связную сумму входит r –компонент. K_i множители имеют бесконечную фундаментальную группу, L_j множители - конечную фундаментальную группу.

Трехмерные многообразия

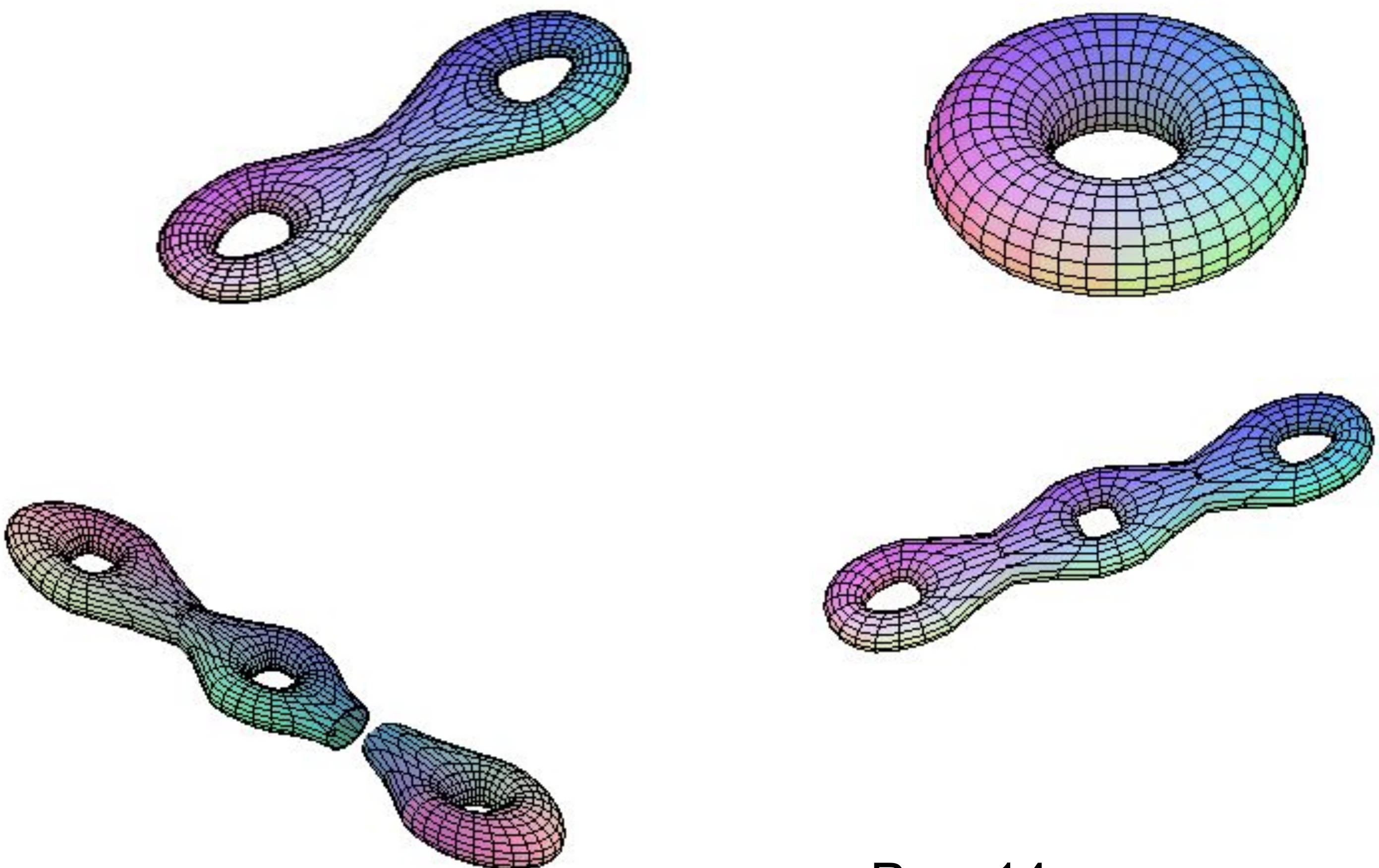


Рис. 14

Трехмерные многообразия

Любое трехмерное компактное неприводимое многообразие можно разрезать конечным числом несжимающихся торов на компактные многообразия, границей которых есть торы.Каждое из этих многообразий или торонеприводимо или является многообразием Зейферта.

Гипотеза Пуанкаре состоит в следующем. Пусть M^3 – компактное трехмерное односвязное многообразие (т.е. любая петля на многообразии стягивается в точку). Верно ли, что это многообразие гомеоморфно трехмерной сфере S^3?

Однородные трехмерные геометрии

В трехмерном случае всего *8 стандартных геометрий*, которые

1) в окрестности каждой точки выглядят одинаково, пространство является однородным;
2) задаются на односвязном многообразии;
3) и для каждой геометрии существует трехмерное компактное многообразие, на котором она задается.

Существование только 8 геометрий приписывается Терстону, но это следует из результатов Бианки. Перечислим их:

1) S^3 – метрика стандартной единичной сферы в E^4 ;
2) E^3 – евклидово пространство;
3) H^3 – трехмерное пространство Лобачевского;

Однородные трехмерные геометрии

Метрики прямого произведения:

4) $S^2 \times R$; 5) $H^2 \times R$;

Возьмем пространство единичных окружностей в касательных пространствах к плоскости Лобачевского H^2. В нем вводится естественная метрика Сасаки. Универсальное накрывающее пространство и есть

6) $\widetilde{SL}(2,R)$; 7) *Nil ;*

Это трехмерная группа Гейзенберга, состоящая из матриц ,

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Однородные трехмерные геометрии

которые образуют группу относительно операции умножения и на ней задана метрика

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$$

8) *Sol* .

Это трехмерная группа, на которой задана метрика

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 + dy^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2$$

Заметим, что только сфера S^3 является односвязным компактным многообразием, на котором задана стандартная геометрия.

Геометрическая гипотеза Терстона

Неприводимое трехмерное замкнутое многообразие разрезается несжимающимися торами на куски, на которых можно задать одну из стандартных геометрий.

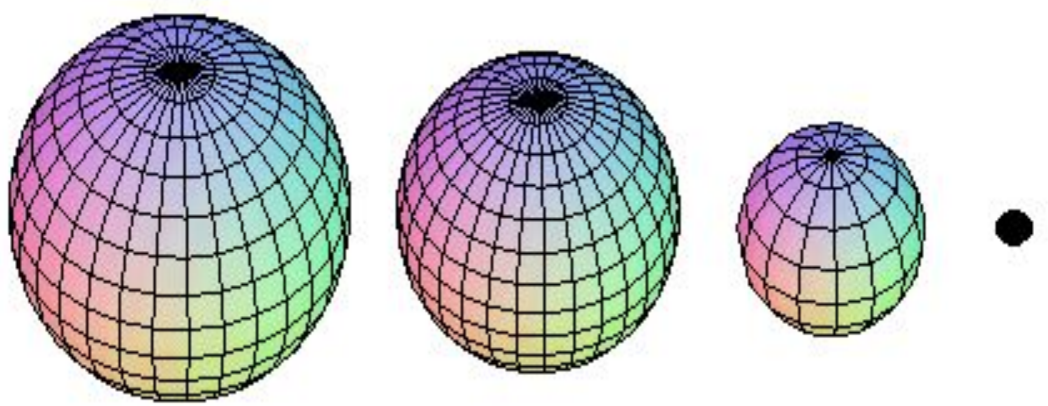
Поток Риччи

Пусть (M^3, g) есть риманово неприводимо компактное многообразие, на котором в локальных координатах u^1, u^2, u^3 метрика задается в виде

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j,$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

Поток Риччи



t=0

$$T = \frac{r^2}{2(n-1)}$$

Рис. 15

Поток Риччи

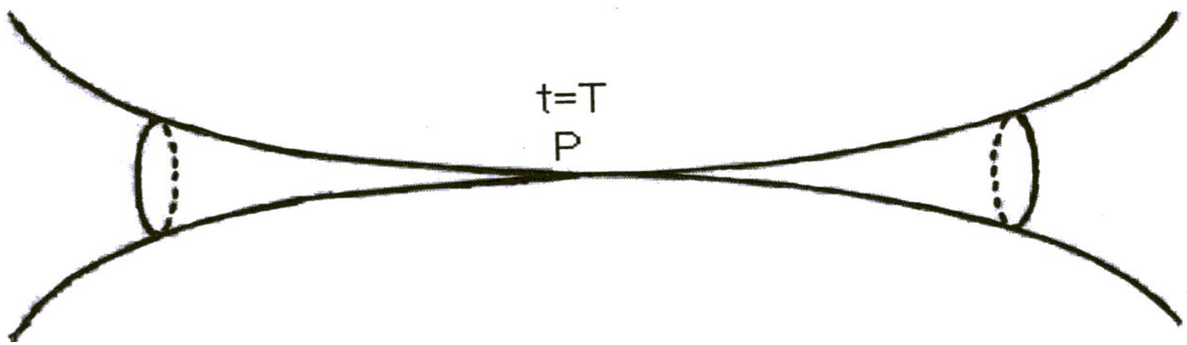


Рис. 16

Поток Риччи

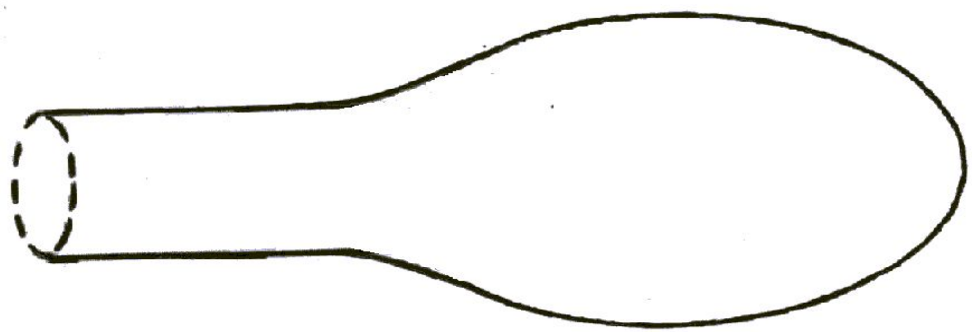


Рис. 17

Поток Риччи

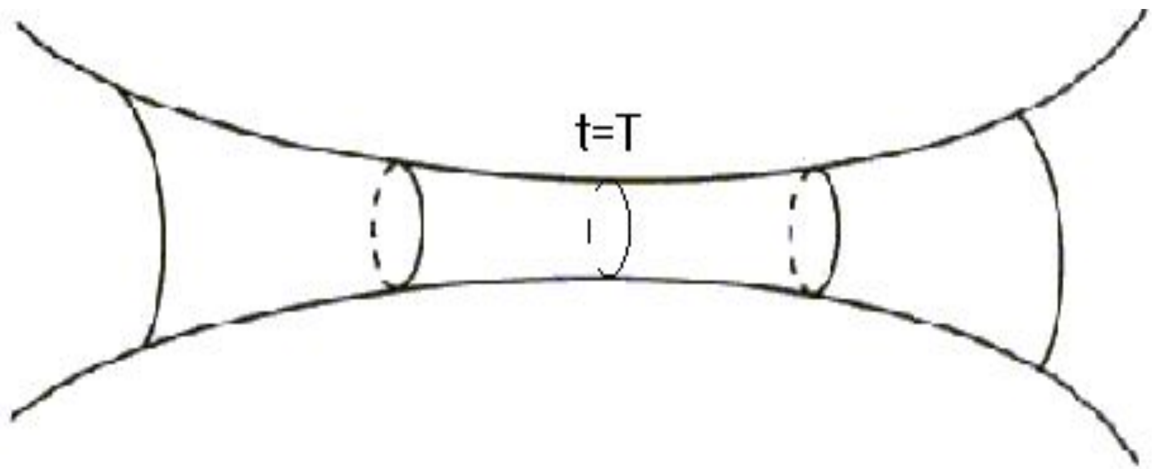


Рис. 18

Поток Риччи

Рис. 19

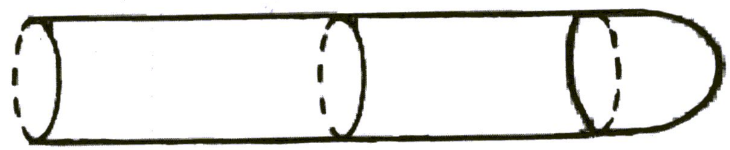


Рис. 20

Поток Риччи

Рис. 21

Sylvia Nasar and David Cruber. Manifold Destiny. A legendary problem and the battle over who soved it. (The new Yorker.) http://www.newyorker.com/fact/content/articles/060828fa_fact2.21.08.2006г. Русский перевод vadda. http:// vadda.livejournal.com