

# III ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ



***Работу выполнили:*** Шабалина  
Мария и Ганджалаян Жанна

***Преподаватель геометрии:***  
Хайбрахманова Г.Ф.

# Цель работы:

- ВСПОМНИТЬ, ЧТО ТАКОЕ ПИРАМИДА
- НАУЧИТЬСЯ ПОЛЬЗОВАТЬСЯ ФОРМУЛОЙ НАХОЖДЕНИЯ ОБЪЁМА ПИРАМИДЫ



# План:

- 1) ЧТО ТАКОЕ ПИРАМИДА
- 2) ТЕОРЕМА
- 3) ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
- 4) СЛЕДСТВИЕ
- 5) ЗАМЕЧАНИЕ
- 6) ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
- 7) ВЫВОД



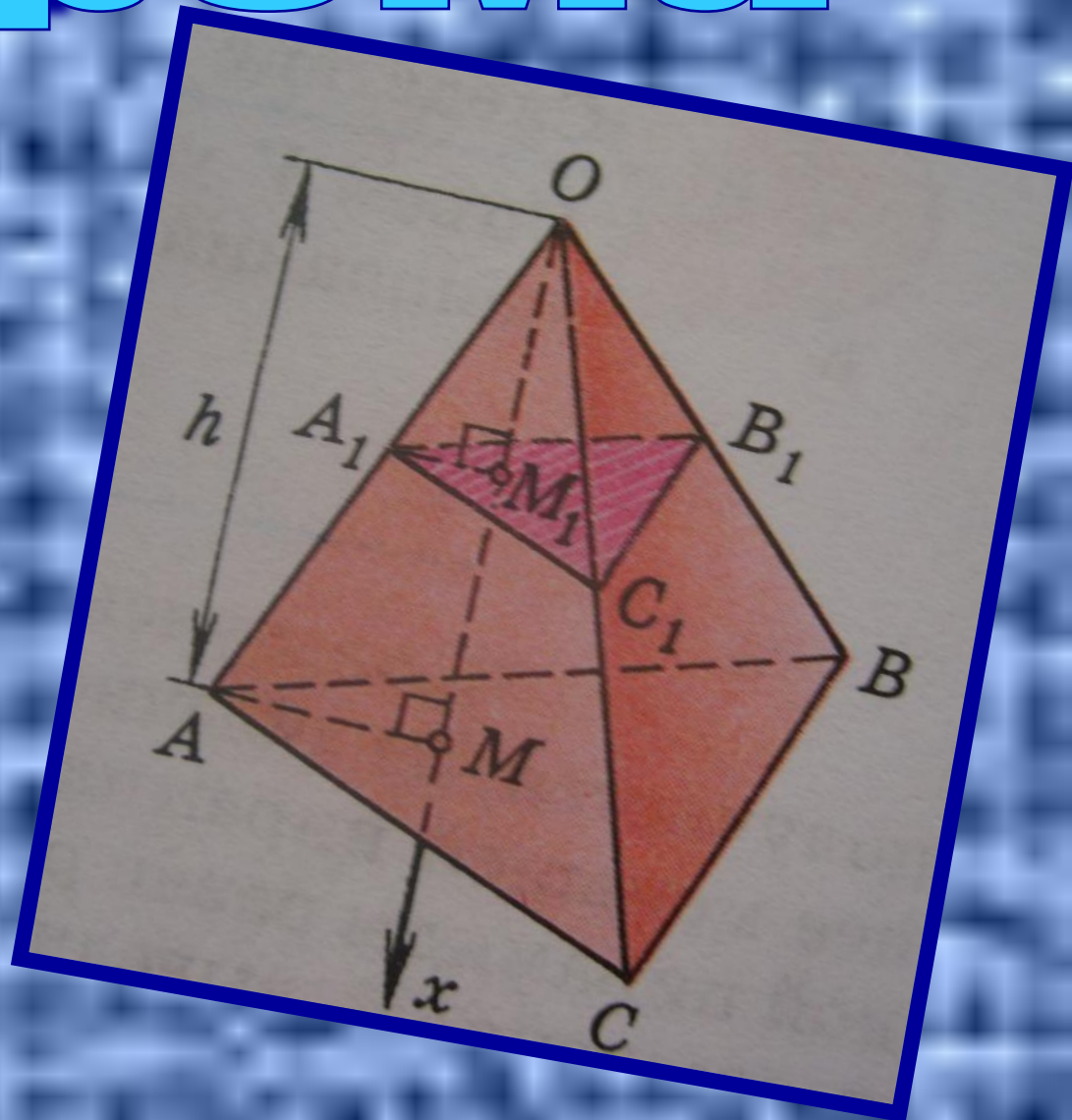
# ПИРАМИДА

- Пирамида – это многогранник, одной из граней которой служит многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной. В зависимости от числа боковых граней делятся на треугольные, четырехугольные и т.д. Перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость ее основания называется высотой.



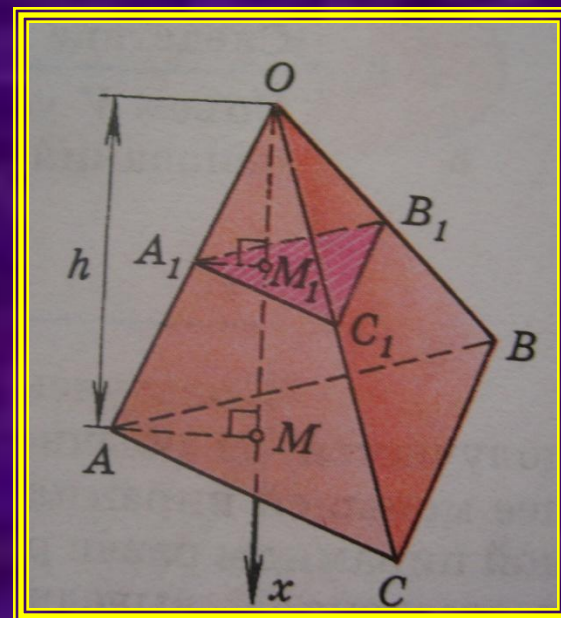
# Теорема

- *Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту*



# Доказательство

- Рассмотрим треугольную пирамиду  $OABC$  с объёмом  $V$ , площадью основания  $S$  и высотой  $h$ . Проведем ось  $Ox$ , где  $OM$  – высота пирамиды и рассмотрим сечение  $A_1B_1C_1$  пирамиды плоскостью, перпендикулярной к оси  $Ox$  и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим через  $x$  абсциссу точки  $M_1$  пересечения этой плоскости с осью  $Ox$ , а через  $S(x)$  – площадь сечения. Выразим  $S(x)$  через  $S, h$  и  $x$ . Треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  подобны.



- $A_1B_1$  параллельна  $AB$ , поэтому треугольники  $OA_1B_1$  и  $OAB$  подобны. Следовательно,  $A_1B_1/AB=OA_1/OA$ . Прямоугольные треугольники  $OA_1M_1$  и  $OAM$  также подобны (они имеют общий острый угол с вершиной  $O$ ). Поэтому  $OA_1/OA=OM_1/OM=x/h$ . Таким образом,  $A_1B_1/AB=x/h$ . Аналогично доказывается, что  $B_1C_1/BC=x/h$  и  $C_1A_1/CA=x/h$ . Итак, треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  подобны с коэффициентом подобия  $x/h$ . Следовательно,  $S(x)/S=x^2/h^2$ , или

$$S(x) = \frac{S}{h^2} x^2$$

- Применяя теперь основную формулу для вычисления объемов тел при  $a=0$ ,  $b=h$ , получаем



$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} S \cdot h.$$



- Докажем теперь терему для произвольной пирамиды с высотой  $h$  и площадью основания  $S$ . Такую пирамиду можно разбить на треугольные пирамиды с общей высотой  $h$ . Выразим объем каждой треугольной пирамиды по доказанной нами формуле и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий множитель  $1/3h$ , получим в скобках сумму площадей оснований треугольных пирамид, т.е. площадь  $S$  основания исходной пирамиды. Таким образом, объем исходной пирамиды равен  $1/3Sh$ . Теорема доказана.

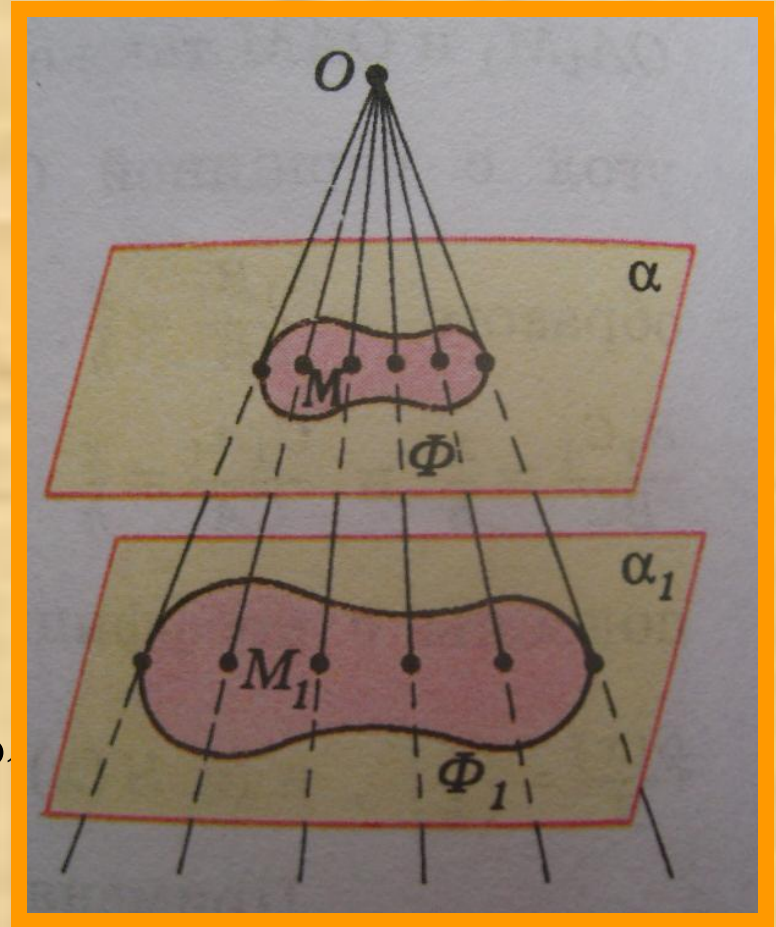
# Следствие

- Объем  $V$  усеченной пирамиды, высота которой равна  $h$ , а площади оснований равны  $S$  и  $S_1$ , вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} h (S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}).$$

# Замечание

В ходе доказательства теоремы об объеме пирамиды мы установили, что в сечении треугольной пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания, получается треугольник, подобный основанию. Оказывается, имеет место и более общее свойство. Рассмотрим какую-нибудь фигуру  $\Phi$ , лежащую в плоскости  $\alpha$ , и точку  $O$ , не лежащую в этой в этой плоскости. Проведем через каждую точку  $M$  фигуры  $\Phi$  прямую  $OM$  и рассмотрим множество  $\Phi_1$  точек пересечения этих прямых с плоскостью  $\alpha_1$ , параллельной плоскости  $\alpha$ . можно доказать, что фигура  $\Phi_1$  подобна фигуре  $\Phi$ . это свойство широко используется на практике. Например, на нем основано устройство кинопроектора, фотоаппарата, телескопа и других оптических приборов.



# ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ

№1 Найдите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12 см, а сторона основания равна 13 см.

№2 В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен  $\alpha$ , а сторона основания  $x$ . найдите объем пирамиды.

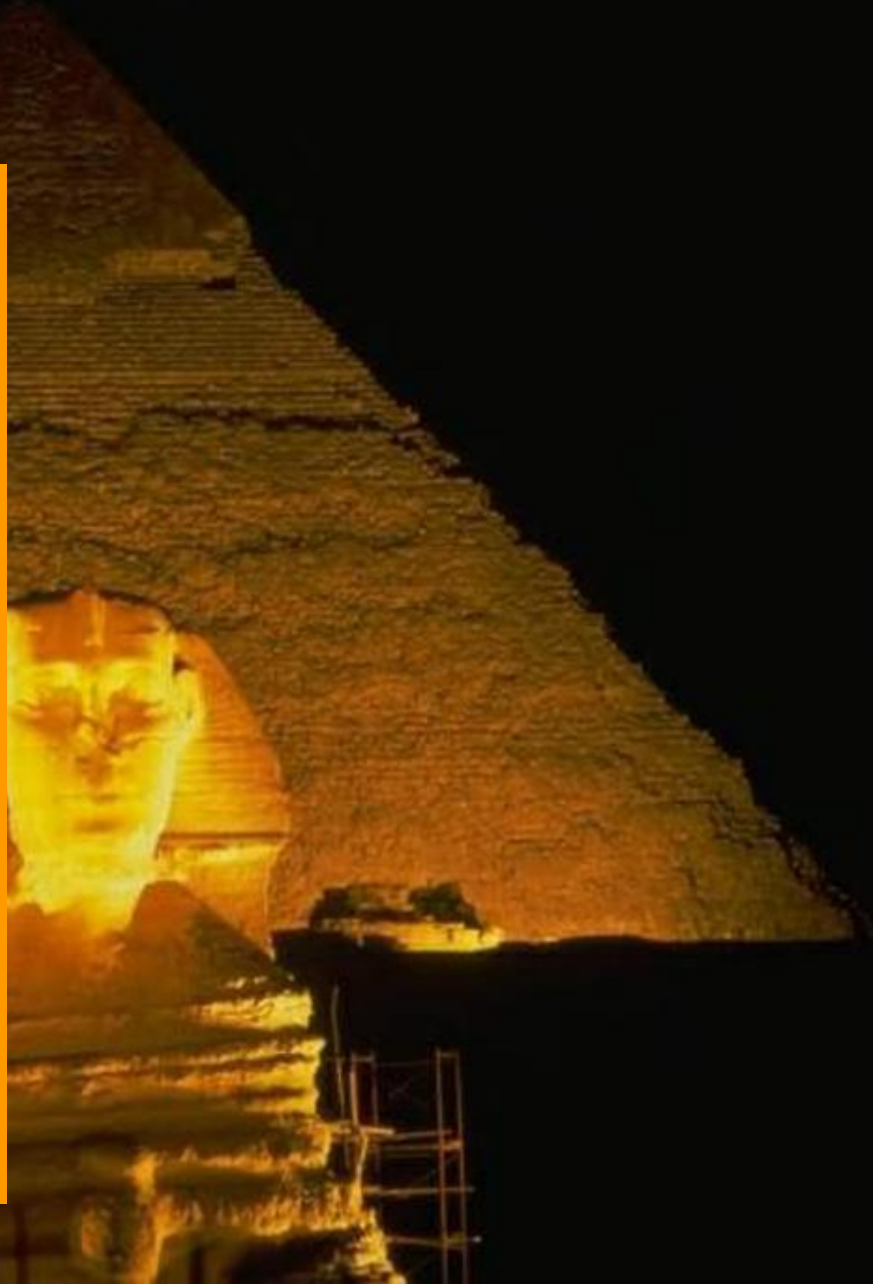
№3 Найдите объем пирамиды с высотой  $h$ , если  $h=2$  м, а основанием служит квадрат со стороной 3 м.

# *Вывод*

- *Мы вспомнили, что такое пирамида, научились пользоваться формулой нахождения объема пирамиды.*



• СПАСИБО ЗА ПРОСМОТР!!!



**The BCÉ!!!**