Математика и проектирование

Проект по теме: “Трисекция угла”

Выполнила: *ученица 8 класса В*
МОУ СОШ № 13 г.Тамбова
Бакушкина Маргарита Александровна
Учитель: Кирина Елена Викторовна
Адрес: 392032 г.Тамбов
Б.-Энтузиастов, 30 В кв. 24
Д.т. (4752) 45 54 94 e-mail: elkirina@rambler.ru

Цели:

- ✔ познакомиться с историей развития решения задачи деления угла на три равные части;
- ✔ поиск решения задачи наиболее удобным способом;
- ✔ сконструировать циркуль – трисектор.

Краткое содержание:

- *Вступление;*
- *Постановка проблемы;*
- *Исторические сведения;*
- *Методы доказательства;*
- *Решение задачи о трисекции угла циркулем и линейкой;*
- *Простейший трисектор;*
- *Циркуль- трисектор;*
- *Практическое применение циркуля – трисектора;*
- *Вывод;*
- *Литература.*

Вступление.

Задачи на геометрические построения – одни из самых популярных в школьной математике. История геометрических построений насчитывает несколько тысяч лет, и уже древние достигли здесь большого искусства. Нам известны 3 знаменитые задачи древности: о квадратуре круга, трисекции угла и удвоении куба. Лишь в конце прошлого века была доказана их неразрешимость. В своей работе я рассмотрела задачу о трисекции угла. Она возникла из потребностей архитектуры и строительной техники. При составлении рабочих чертежей, разного рода украшений, многогранных колоннад, при строительстве, внутренней и внешней отделки храмов, надгробных памятников древние инженеры, художники встретились с необходимостью уметь делить окружность на три равные части, а это часто вызывало затруднения.

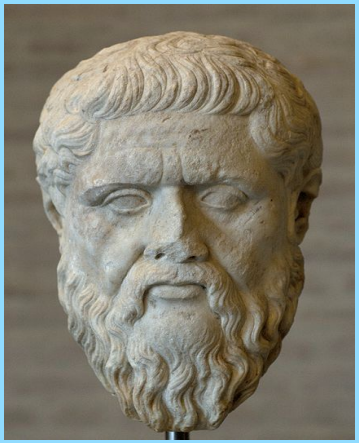
Постановка проблемы.

С глубокой древности известна одна из знаменитых задач древности – задача о трисекции угла. Она сыграла важную роль в истории математики. В конце концов было доказано, что эту задачу невозможно решить, пользуясь только циркулем и линейкой. Но уже сама постановка задачи - "доказать неразрешимость" – была смелым шагом вперёд. Вместе с тем предлагалось множество решений при помощи нетрадиционных инструментов. Всё это привело к возникновению и развитию совершенно новых идей в геометрии и алгебре. Немало преуспели в нестандартных и различных приближённых решениях любители математики. Задача кажется доступной любому: вводит в заблуждение простая формулировка.

Исторические сведения.

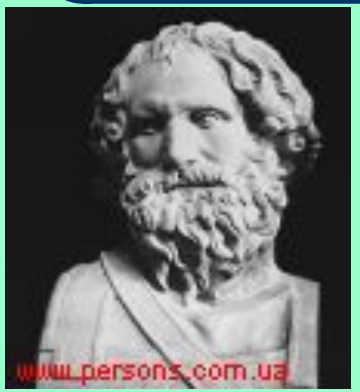
Платон.

Платон, живший в 428 – 328 годах до нашей эры, считается одним из величайших философов Греции. Геометрия ко времени Платона уже была очень развита. Было решено много весьма и весьма сложных задач, доказаны сложнейшие теоремы.



В конце прошлого века было доказано, что в такой постановке данная задача не может быть решена, хотя, если использовать другие геометрические инструменты или использовать при построении геометрические места точек, отличные от прямой, либо дуги окружности. То эта задача легко решается. Однако принятые у греков правила игры не позволяли пользоваться при решении задачи ничем, кроме циркуля и линейки. Платон даже обосновал это ссылкой на авторитет богов. Так что проблема решена не была, но по ходу дела геометрия была основательно разработана.

Архимед.



Архимед (?287-212 гг. до нашей эры) родился в городе Сиракузы на острове Сицилия. Он автор многочисленных открытий, гениальный изобретатель, известный во всем греческом мире благодаря конструкции многих механизмов: машины для орошения полей, водоподъемного механизма, системы рычагов, блоков для поднятия больших тяжестей (кранов), военных метательных аппаратов. Он соорудил систему блоков, с помощью которой один человек смог спустить на воду огромный корабль "Сиракосия". Крылатыми стали произнесенные тогда слова Архимеда: "Дайте мне точку опоры, и я поверну Землю". Архимед погиб от меча римского легионера. На своей могильной плите Архимед завещал выгравировать шар и цилиндр - символы его геометрических открытий.

Методы доказательства.

Существуют различные способы построения трисектрисы угла:

- *При помощи циркуля и линейки без засечек (трисекция угла в 900, 450, 22,50,… p /2n, где nI N (все эти углы образуют бесконечно малую геометрическую прогрессию со знаменателем q =1/2),трисекция угла в 1800,3600).*
- *Квадратрисса Гиппея;*
- *Конхоида Никомеда;*
- *Спираль Архимеда;*
- *С помощью простейшего трисектора;*
- *При помощи циркуля-трисектора.*

Решение задачи о трисекции угла циркулем и линейкой.

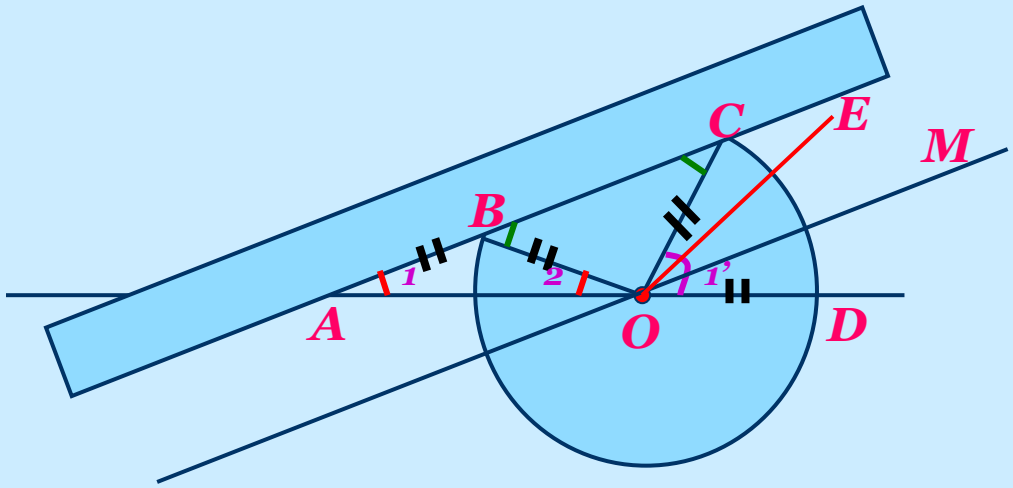
Пусть на чертеже отрезок AB равен радиусу окружности: AB =OB=OC=OD.

Тогда $\angle BAO = \angle BOA = \alpha, \angle CBO = \angle BCO = 2\alpha$ *(угол CBO – внешний угол треугольника ABO),* $\angle COD = 3\alpha$ *(как внешний угол треугольника ACO).*

Отсюда вытекает следующий способ деления произвольного угла на три равные части. Сделаем на линейке две отметки A и B. Радиусом AB опишем окружность с центром в вершине O данного угла (который нужно разделить на три части). Точки пересечения её со сторонами угла обозначим C и D.

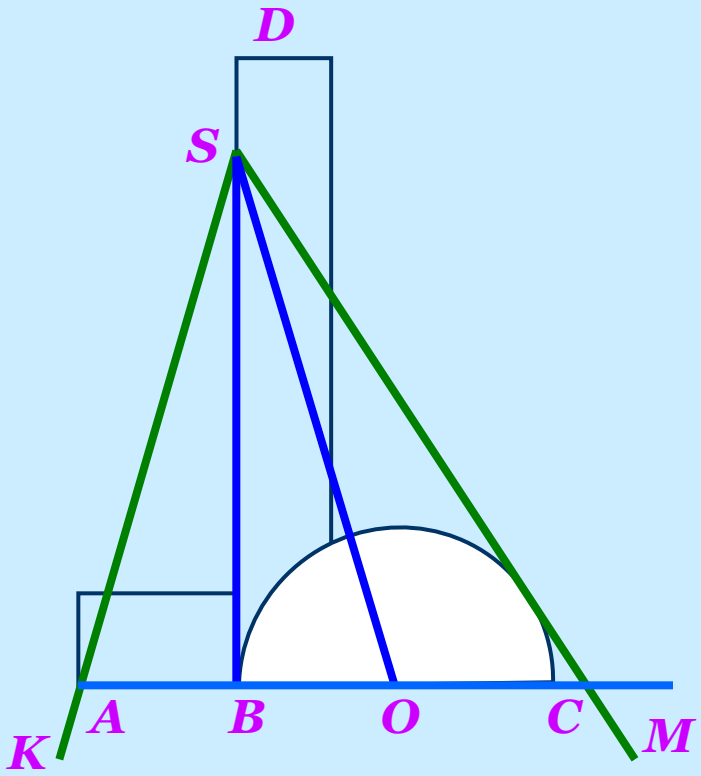
Будем двигать линейку так, чтобы её край всё время проходил через точку C, а точка A скользила по прямой OD, пока точка B не попадёт на окружность. Когда это произойдёт, мы получим расположение, изображённое на чертеже, так что угол BAO окажется равным 1/3 угла COD. Прямая OM параллельна AC, , а угол COM разделим с помощью циркуля пополам.

$$\angle 1 = \angle 1'$$



Простейший трисектор.

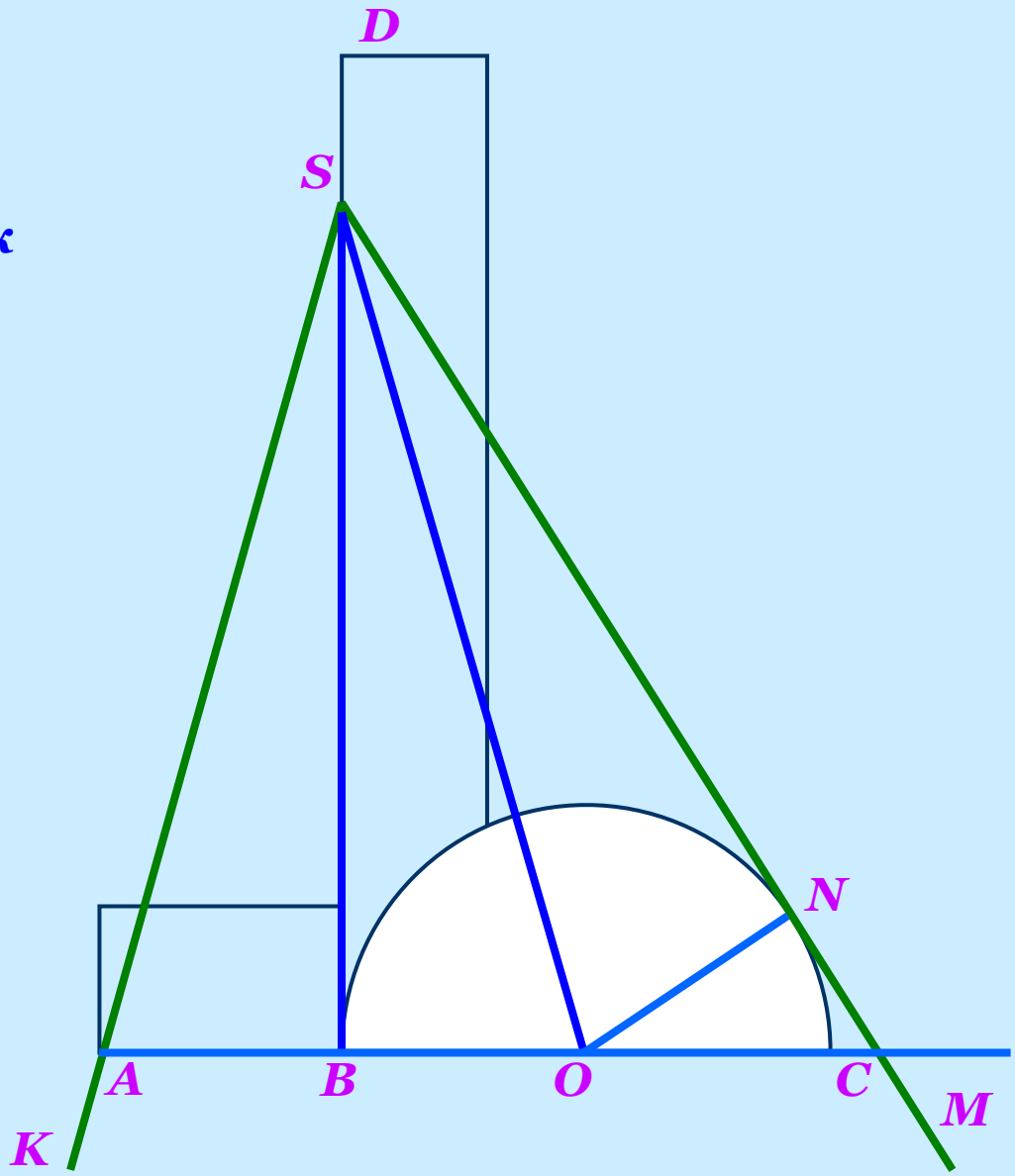
На сегодняшний день придумано много механических способов для построения трисектрисы угла. Такие приборы называются трисекторами.
Простейший трисектор можно легко изготовить из плотной бумаги, картона или тонкой жести. Он будет служить подсобным чертежным инструментом.
На чертеже трисектор изображен в натуральную величину (заштрихованная фигура).
Примыкающая к полукругу полоска AB равна длине радиуса полукруга. Край полоски BD составляет прямой угол с AC; он касается полукруга в точке B; длина полоски BD произвольная. На этом же рисунке показано применение трисектора.



Например, требуется разделить угол KSM. Поместим трисектор так, чтобы вершина угла S находилась на линии BD, одна сторона угла прошла через точку A, а другая сторона коснулась полукруга. Возможность такого вложения нашего трисектора в данный угол является следствием одного простого свойства точек лучей, делящих данный угол на 3 равные части: если из любой точки O луча SO провести отрезки $ON \perp SM, OA \perp SB$, то будем иметь: AB=OB=ON. Затем проведём прямые SB и SO, и деление данного угла на 3 равные части закончено.

Доказательство:

1. соединим отрезком центр полукруга O с точкой касания N.
2. Рассмотрим треугольник ASO: так как $SB \perp AC$ и AB=BO, то треугольник ASO – равнобедренный, значит прямоугольные треугольники ASB и OSB равны.
3. Прямоугольные треугольники BSO и NSO равны по гипотенузе и катету (SO – общая сторона, BO=ON).
4. Значит треугольники ASB, OSB и NSO – равны.
5. Из равенства этих треугольников следует, что углы ASB, BSO и OSN равны между собой, что и требовалось доказать.



Такой способ трисекции угла не является чисто геометрическим; его можно назвать механическим.

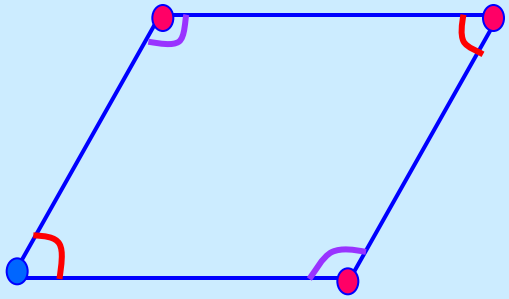
Циркуль - трисектор.

Попытки расширить инструментарий оказали большое влияние на древнегреческую математику, привели и к первым исследованиям конических сечений, и к исследованию сложных кривых, и к построению интересных инструментов.

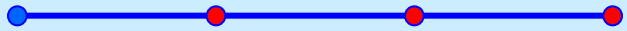
Рассмотрим шарнирный механизм, являющийся параллелограммом с двумя закрепленными шарнирами. Из курса школьной математики нам известно, что противоположные углы параллелограмма равны. Это верно для любого параллелограмма, а значит и для любого изгибания нашего механизма.

А для любого ли изгибания?

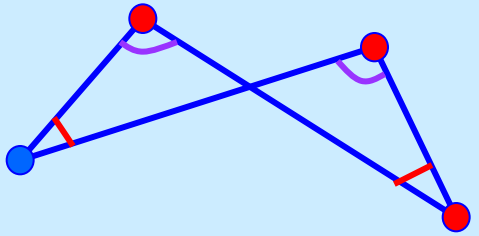
У нашей системы есть одна особая точка — когда все звенья легли на одну прямую. Из этой точки бифуркации механизм может выйти, снова став параллелограммом, а может перейти в фигуру, которая называется антипараллелограмм.



Противоположные углы параллелограмма равны.



Точка бифуркации.

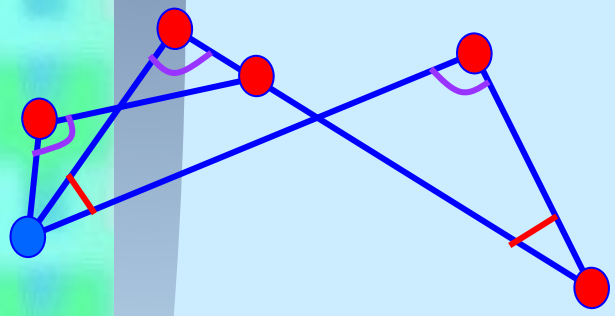


Антипараллелограмм. Равенство углов.

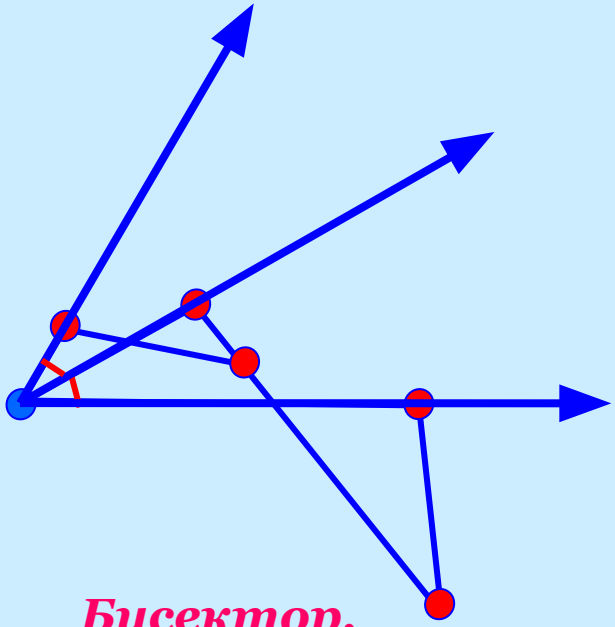
От параллелограмма антипараллелограмм унаследовал то, что две противоположные стороны равны между собой, и две накрест лежащие стороны также равны между собой. Оказывается, у нашей фигуры есть и соотношение на углы — у антипараллелограмма они попарно равны!

Прибавим к нашему антипараллелограмму более маленький, но подобный первому. У них есть один общий угол, а значит углы при красном шарнире — тоже равны.

Вытягивая направляющие прямые, получаем плоский шарнирный механизм, который можно применять для построения биссектрисы любого угла.



Второй антипараллелограмм. Равенство углов.

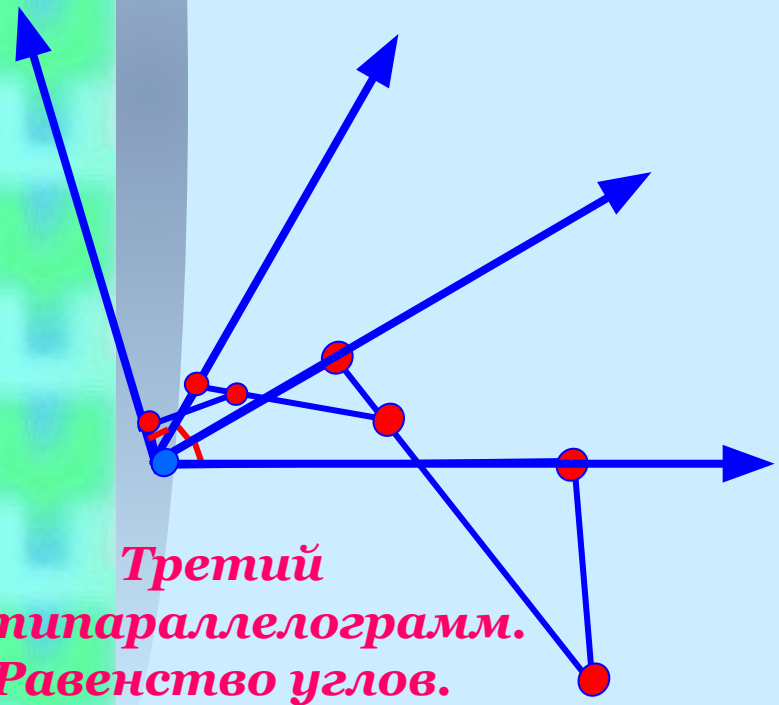


Бисектор.

Можно прибавить еще один подобный антипараллелограмм. По тем же соображениям его угол при красном шарнире будет равен уже двум имеющимся.

Получившийся плоский шарнирный механизм является трисектором углов — решает задачу о делении произвольного угла на три равные части!

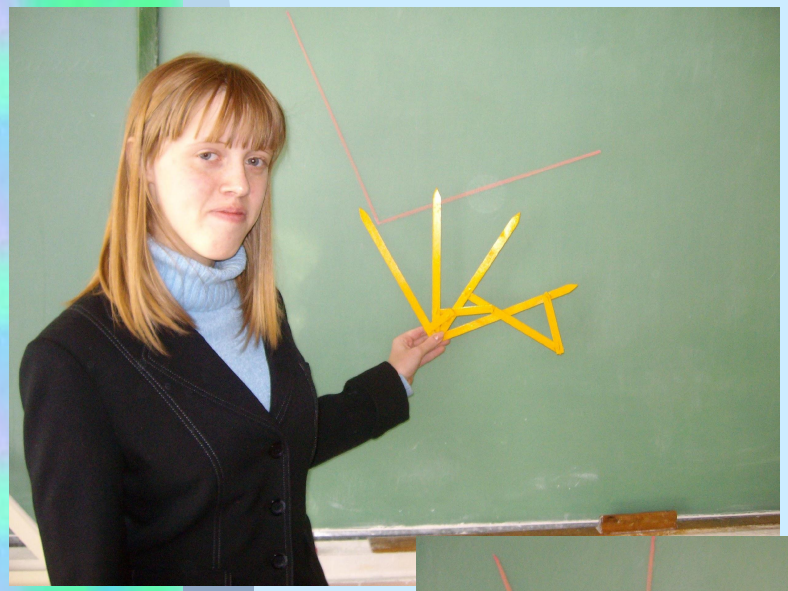
Однако, очевидно, использованный алгоритм построения можно продолжать и дальше, получая шарнирные механизмы, точно делящие произвольный угол на любое наперед заданное число частей.

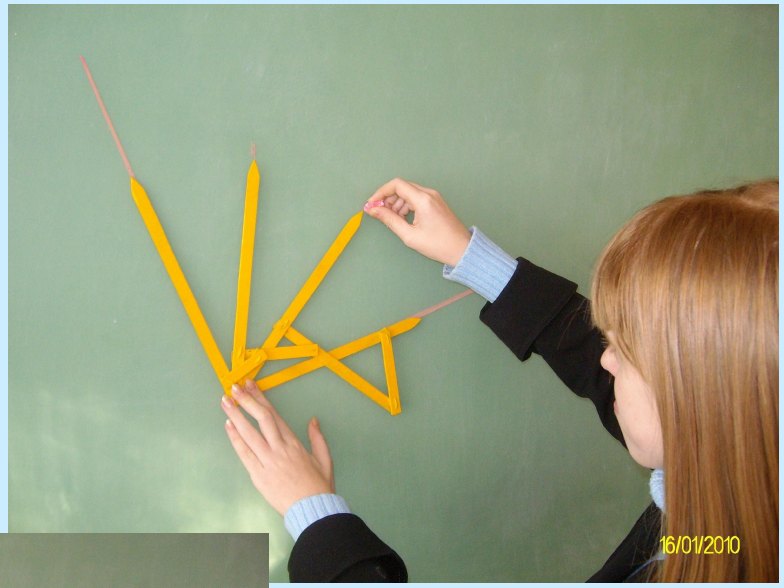


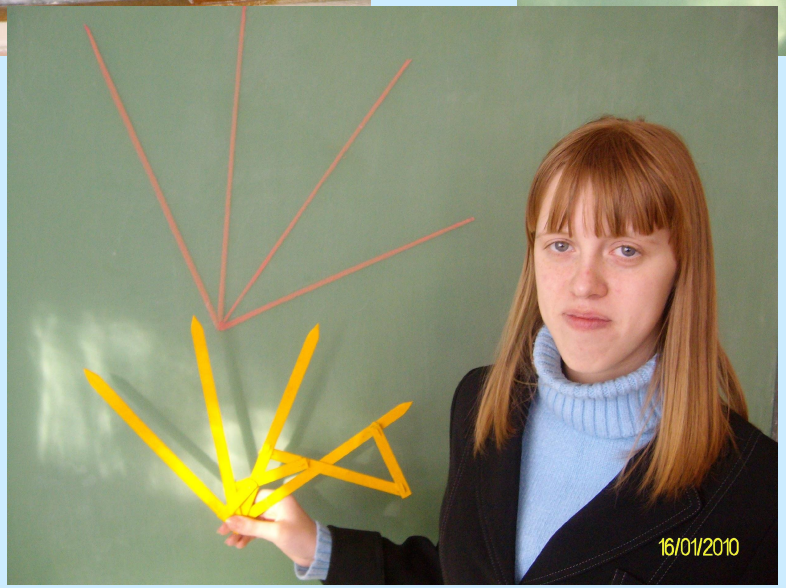
Третий антипараллелограмм. Равенство углов.

Трисектор.

Практическое применение циркуля- трисектора.







Вывод

При выяснении возможности планиметрической задачи на построение пользуются следующим критерием: построение отрезка циркулем и линейкой возможно тогда и только тогда, когда его длина выражается через длины данных отрезков в виде конечной комбинации четырёх арифметических действий и извлечения арифметического квадратного корня. С помощью этого критерия доказано, что знаменитая задача древности – трисекция угла- неразрешима с помощью циркуля и линейки.

Работая над проектом я исследовала способы построения трисектрисы угла и сконструировала простейший трисектор.

Литература

- Перельман Я.И. «Занимательная геометрия» Государственное издательство технико-теоретической литературы Москва-1950-Ленинград
- Прасолов В.В. «Популярные лекции по математике. Три классические задачи на построение» М.,» Наука», 1992
- Энциклопедия элементарной математики. Книга IV. геометрия:.М.:Физматлит, 1963
- Интернет-ресурсы:
  http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/istoria/istmat1.htm
  http://ru.wikipedia.org
  http://этюды