

# Лекция

# Криптосистемы с открытым ключем

- Лектор: профессор Яковлев В.А.

# Хронология развития систем ЭЦП

- 1976 г. – открытие М. Хэлменом и У. Диффи асимметричных криптографических систем;
- 1978 г. – Р. Райвест, А. Шамир, Л. Адельман – предложили первую систему ЭЦП, основанную на задаче факторизации большого числа;
- 1985 г. – Эль Гамаль предложил систему ЭЦП, основанную на задаче логарифмирования в поле чисел из  $p$  элементов;
- 1991 г.- Международный стандарт ЭЦП ISO/IEC 9796 (вариант РША);
- 1994 г. – Стандарт США FIPS 186 (вариант подписи Эль Гамалья);
- 1994 г. – ГОСТ Р 34.10-95 (вариант подписи Эль Гамалья);
- 2000 г. – Стандарт США FIPS 186 – 2;
- 2001 г. – ГОСТ Р 34.10-01 (ЭЦП на основе математического аппарата эллиптических кривых).

# Односторонняя функция

Пусть  $X$  и  $Y$  дискретные множества. Функция  $y=f(x)$ , где  $x \in X$ ,  $y \in Y$  называется односторонней (однонаправленной),

если  $y$  легко вычисляется по любому  $x$ , а обратная функция  $x=f^{-1}(y)$  является трудно вычислимой.

Пример ОФ.

$y=a^x \pmod{p}$ , где  $p$ - простое число,  $x$  - целое число,  $a$  - примитивный элемент поля Галуа  $GF(p)$ . То есть  $a$  такое число, что все его степени  $a^i \pmod{p}$ ,  $i=1,2,\dots,p-1$ , принимают все значения в множестве чисел от 1 до  $p-1$ .

# Пример односторонней функции функции

Пусть  $p=7$ ,  $a=3$ .

Проверим, что  $a$  примитивный элемент -

$a^1 = 3(\text{mod } 7)$ ,  $a^2 = 2(\text{mod } 7)$ ,  $a^3 = 6(\text{mod } 7)$ ,  $a^4 = 4(\text{mod } 7)$ ,

$a^5 = 5(\text{mod } 7)$ ,  $a^6 = 1(\text{mod } 7)$ .

Если  $x=4$ , то  $y=3^4(\text{mod } 7)=4$ .

Сложность нахождения функции возведения в степень  $N_v = O(2 \log p)$ .

Обратная функция  $x = \log_a y$  (функция дискретного логарифмирования) трудно вычислима.

Если  $p$  - сильно простое число, то  $N_{\log} = O((p)^{1/2})$ .

$$p = 2^{1000}$$

# Оценки сложности вычислений прямой и обратной функций

- Пусть  $p = 2^{1000}$  1000 разрядное двоичное число, тогда для решения задачи возведения в степень числа  $x$  по mod  $p$  потребуется примерно  $2000 = 2 \cdot 10^3$  операций, а для нахождения логарифма такого числа потребуется примерно  $p^{1/2} = 2^{500} \sim 10^{170}$  операций, что вычислительно невозможно осуществить ни за какое реально обозримое время.

# Односторонняя функция с потайным ХОДОМ

Это не просто ОФ, обращение которой невозможно, она содержит потайной ход (trapdoor), который позволяет вычислять обратную функцию, если известен секретный параметр - ключ.

$y=f(x,s)$  – легковычислима;

$x=f^{-1}(y)$  – трудновычислима;

$x=f^{-1}(y,s)$ - легковычислима.

# Общий принцип построения криптосистемы с открытым ключем

A - генерирует пару ключей:  
SK(A) - секретный ключ,  
PK(A) - открытый ключ.

B - генерирует пару ключей:  
SK(B) - секретный ключ,  
PK(B) - открытый ключ.

Открытые ключи помещаются в общедоступную базу PK(A), PK(B)

Шифрование.  
A выбирает открытый ключ PK(B)  
Осуществляет шифрование  
 $E_A = f(M_A, PK(B))$

Расшифрование.  
 $M_A = g(E_A, SK(B))$

$E_A$

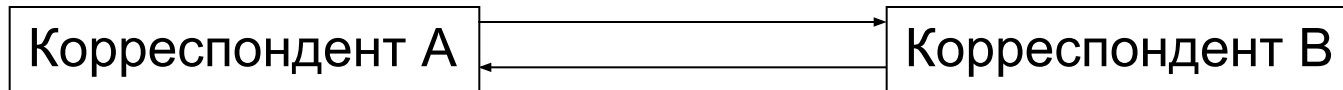
# Требования к системам с открытым ключем

1. Вычисление пары ключей  $PK, SK$  должно быть просто решаемой задачей;
2. При известном ключе шифрования  $PK$  вычисление криптограммы  $E=f(M,PK)$  должно быть простым;
3. При известном ключе расшифрования  $SK$  восстанавливает сообщение  $M=g(E,SK)$  должно быть простым;
4. При известном ключе шифрования  $PK$  вычисление ключа расшифрования  $SK$  должно быть сложным;
5. При известном ключе шифрования  $PK$ , но неизвестном ключе расшифрования  $SK$  вычисление  $M$  по известной криптограмме  $E$  должно быть весьма сложным.



# Система шифрования Эль-Гамала

Пусть  $p$  - простое число;  $a$  - примитивный элемент.



## Генерирование пары открытых ключей

А - генерирует число  $x_A$ ,  
вычисляет открытый ключ  
 $y_A = a^{x_A} \pmod{p}$ . (SK =  $x_A$ , PK =  $y_A$ ).

$y_A$  передается корр. В.

## Шифрование сообщения

Пусть корр. В хочет послать корр. А сообщение  $m < p$ .

Генерирует случайное число  $k < p$ .  
Формирует криптограмму  $E = (c_1, c_2)$   
 $c_1 = a^k \pmod{p}$ ,  $c_2 = m \cdot (y_A^{-1})^k$ .

Отправляет  $E$  корр. А.

# Система шифрования Эль-Гамала

## Расшифрование сообщения.

Корр.А вычисляет  $c_1^x \pmod{p} = a^{kx} \pmod{p}$ ,

Затем находит

$$c_2 a^{kx} \pmod{p} = m \cdot (y_A^{-1})^k a^{kx} \pmod{p} = m \cdot a^{-xk} a^{kx} \pmod{p} = m$$

Замечание.

Как найти  $y_A^{-1}$  ?

$$y_A^{p-2} \pmod{p} = y_A^{p-1} \pmod{p} \cdot y_A^{-1} \pmod{p} = y_A^{-1} \pmod{p}$$

# Стойкость системы Эль-Гамала

1. Раскрытие секретного ключа эквивалентно решению задачи дискретного логарифмирования.
2. Нахождение  $m$  без знания ключа возможно, если случайное число  $k$  используется дважды и в одном случае нарушитель знает открытый текст

$$c_2 = m \cdot (y_A^{-1})^k \pmod{p}, \quad c'_2 = m' \cdot (y_A^{-1})^k \pmod{p}$$

Зная  $c_2, c'_2$  и  $m$  несложно найти  $m'$   $m' = c'_2 \cdot m \cdot c_2^{-1} \pmod{p}$

$k$  должно меняться случайным образом при шифровании нового сообщения.

# Пример системы Эль-Гамала

$p=11$ ,  $a=4$ ,  $a$ - примитивный элемент  $GF(2^p)$

Пусть  $x=3$  – закрытый ключ

$y=4^3(\bmod 11)=64(\bmod 11)=9$  открытый ключ

$y$

$y$

Шифрование сообщения  $m=6$

Генерирование СЧ  $k=4$

Вычисление:

$$C_1 = a^k(\bmod p) = 4^4(\bmod 11) = 256(\bmod 11) = 3$$

$$y^{-1} = y^{p-2}(\bmod p) = 9^9(\bmod 11) = 9^2 9^2 9^2 9^2 9(\bmod 11) = 4 * 4 * 4 * 4 * 9(\bmod 11) = 5 * 5 * 9(\bmod 11) = 5$$

$$C_2 = m y^{-1k}(\bmod p) = 6 * 5^4(\bmod 11) = 6 * 3 * 3(\bmod 11) = 10$$

$C_1, C_2$

$C_1, C_2$

Расшифрование

$$C_1^x(\bmod p) = 3^3(\bmod 11) = 5$$

$$C_2 * C_1^x(\bmod p) = 10 * 5(\bmod 11) = 50(\bmod 11) = 6$$

# Система RSA (1978г.)

**Генерирование ключей.**

Случайно выбираются два простых числа  $p$  и  $q$ . Находится модуль  $N=pq$ . Находится функция Эйлера  $\phi(N)=(p-1)(q-1)$ .

Выбираем число  $e$  такое, что  $\text{НОД}(e, \phi(N))=1$ .

Находим  $d$ , как обратный элемент к  $e$ ,  $de=1(\text{mod } \phi(N))$ .

Объявляем  $d=SK$ ,  $(e,N)=PK$ . PK сообщается всем корреспондентам.

**Шифрование.**

Корр. А передает зашифрованное сообщение корр. В  
(использует открытый ключ корр. В)

$$E=m^e(\text{mod}N)$$

**Расшифрование.**

Корр. В расшифровывает принятую криптограмму от корр. А, используя свой секретный ключ.

$$m=E^d(\text{mod}N)$$

# Доказательство обратимости операции дешифрования операции шифрования

Покажем, что  $E^d(\text{mod } N) = (m^e)^d(\text{mod } N) = m$

По т. Эйлера  $m^{\phi(N)} \equiv 1(\text{mod } N)$  для любого  $m$  взаимно простого с  $N$ .

Умножая обе части сравнения на  $m$ , получаем сравнение

$m^{\phi(N)+1} \equiv m(\text{mod } N)$  справедливое уже для любого целого  $m$ .

Перепишем соотношение  $ed \equiv 1(\text{mod } \phi(N))$  в виде  $ed = 1 + k\phi(N)$

для некоторого целого  $k$ .

Тогда  $E^d = (m^e)^d = m^{1+k\phi(N)} = m^{1+\phi(N)} m^{(k-1)\phi(N)} =$   
 $= m \cdot m^{(k-1)\phi(N)} = m^{1+(k-1)\phi(N)} = m^{1+\phi(N)} m^{(k-2)\phi(N)} =$   
 $\dots = m^{1+\phi(N)} = m$

Что и требовалось доказать.

# Пример системы RSA

$$p=3, q=11 \quad N=33 \quad \varphi(N) = 20$$

Генерирование ключей

$$e=7, \text{НОД}(7,20)=1$$

$$d=7^{-1}(\text{mod}20) = 3$$

Шифрование

$$m=6 \quad E=m^e(\text{mod}N)=6^7(\text{mod}33)=6^2 6^2 6^2 6^1(\text{mod}33)=3*3*3*3*2=30$$

Расшифрование

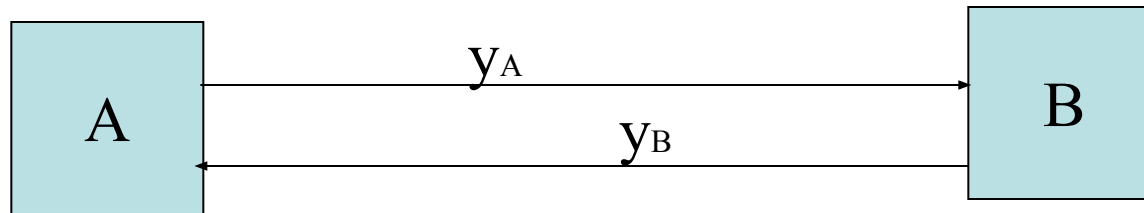
$$E^d(\text{mod}N)=30^3(\text{mod}33)=900*30(\text{mod}33)=9*30(\text{mod}33)=6$$

# Оценки стойкости системы RSA

1. Нахождение чисел  $p$  и  $q$  по известному модулю  $N$ . Задача факторизации имеет сложность  $O((N)^{1/2})$ .
2. Будем последовательно возводить полученную криптограмму в степень равную значению открытого ключа т.е.  $(((((E^e)^e) \dots)^e)^e$ . Если при некотором шаге окажется, что  $E_i = E$ , то это означает, что  $E_{i-1} = m$ . Доказывается, что данная атака требует непереборно большого числа шагов.
3. Поиск слабых ключей, для которых  $m^{e'} = m$ , т.е. возведение в степень не меняет сообщения. Эта атака имеет малую вероятность успеха, если  $p$  и  $q$  выбираются среди сильно простых чисел. Сильно простое число, это число, для которого  $p-1$  не содержит в разложении маленьких сомножителей, и имеет в разложении хотя бы один большой сомножитель.
- 4.



# Алгоритм формирования ключей на основе однонаправленных функций (алгоритм Диффи-Хеллмана)



**А генерирует большое случайное число  $x_A$ ,  $1 \leq x_A \leq p-1$ ,  $p$  - простое число. Число  $x_A$  сохраняется в секрете. Вычисляет число  $y_A = \alpha^{x_A} \pmod{p}$ , где  $\alpha$  - примитивный элемент поля  $GF(p)$ , которое передает корреспонденту В.**

**В генерирует  $x_B$ , аналогичным образом вычисляет число  $y_B$ , которое передает корреспонденту А.**

**А, приняв от В  $y_B$ , вычисляет**

$$K_A = (y_B)^{x_A} \bmod p = (\alpha^{x_B})^{x_A} \bmod p = \alpha^{x_B x_A} \bmod p .$$

**В, приняв  $y_A$ , вычисляет**

$$K_B = (y_A)^{x_B} \bmod p = (\alpha^{x_A})^{x_B} \bmod p = \alpha^{x_A x_B} \bmod p .$$

$$K_A = K_B = K .$$

**Ключ  $K$  может быть использован в симметричной системе шифрования.**

# Гибридные системы шифрования

