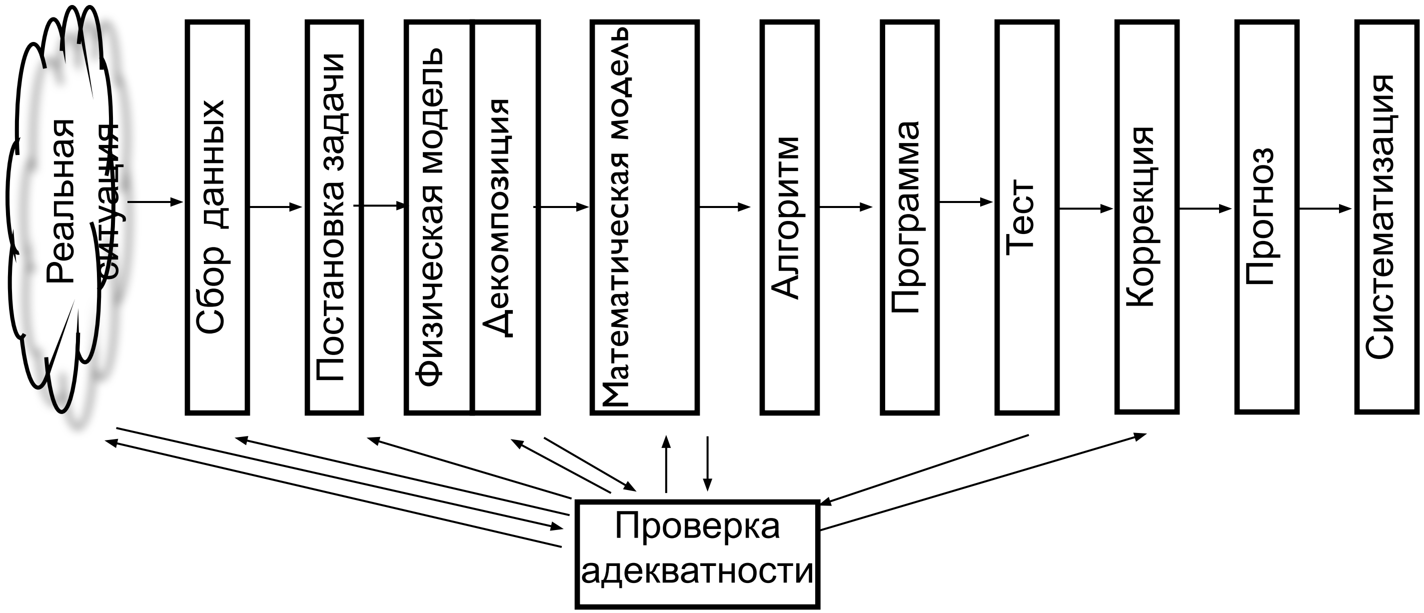
Математическое моделирование. Численные методы и использование ЭВМ в решении прикладных задач

Процесс мат. моделирования



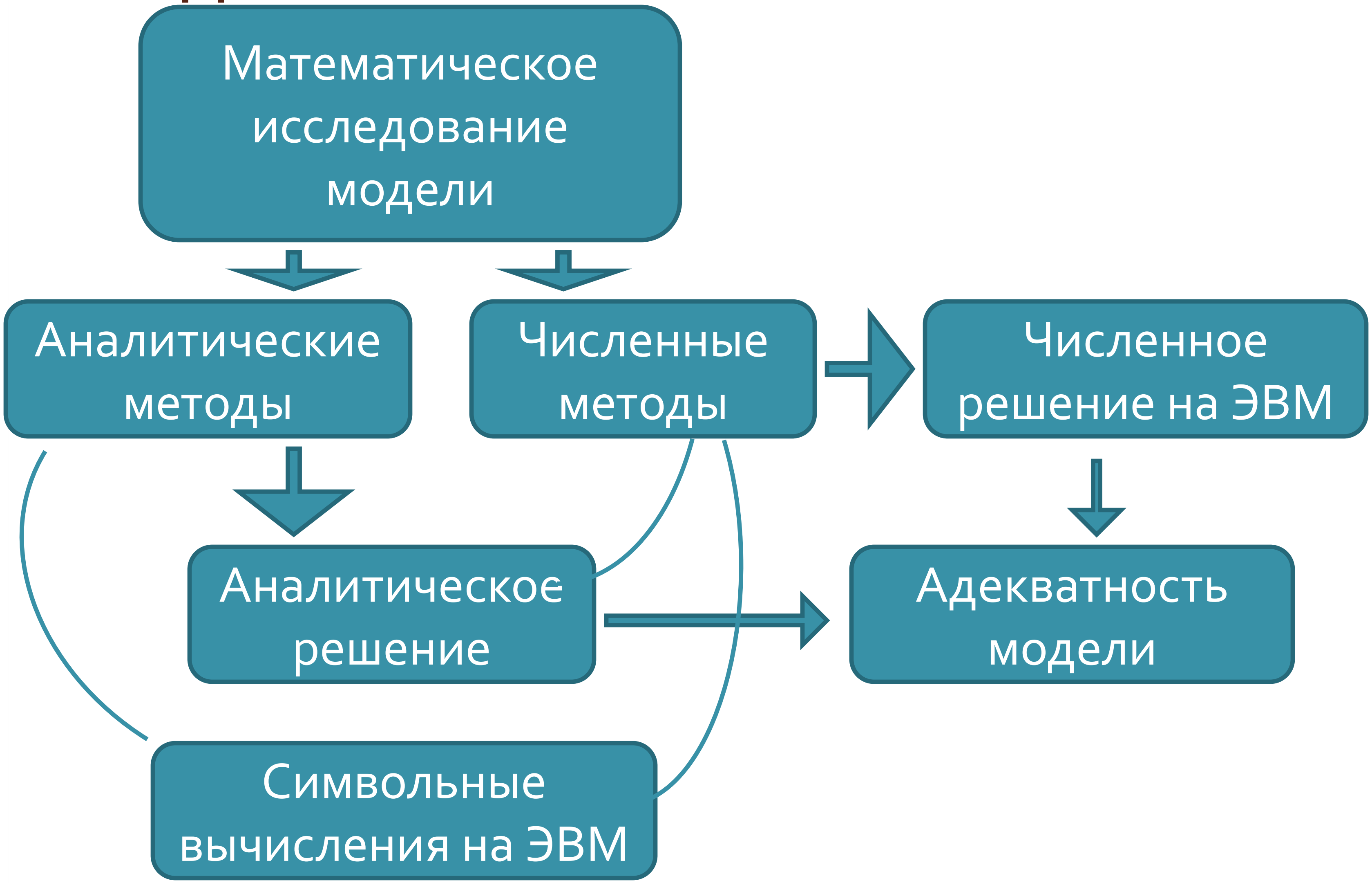
Формулировка математической модели явления

- Математическая модель любого изучаемого явления, по причине его чрезвычайной сложности, должна охватывать важнейшие для рассматриваемой задачи стороны процесса, его существенные характеристики и формализованные связи, подлежащие учёту.
- Как правило, *математическая модель* изучаемого физического явления формулируется в виде *уравнений математической физики.* Чаще всего это нелинейные, многомерные системы уравнений, содержащие большое число неизвестных и параметров.
- Если математическая модель выбрана недостаточно тщательно, то какие бы мы не применяли методы для дальнейших расчётов, полученные результаты будут ненадежны, а в отдельных случаях и совершенно неверны.

Проведение математического исследования

- На этом этапе моделирования, в зависимости от сложности рассматриваемой модели, применяют различные подходы к её исследованию и различный смысл вкладывается в понятие решения задачи.
- Для наиболее грубых и несложных (относительно) моделей удаётся получить их аналитическое – общее – решение.
- Для более точных и сложных моделей основными методами решения являются численные методы решения с необходимостью требующие проведения большого объёма вычислений на ЭВМ. Эти методы позволяют добиться хорошего количественного и даже качественного результата в описании модели. Но, правда, у них есть и принципиальные недостатки – как правило, речь идёт о рассмотрении некоторого частного решения.

Математическое исследование модели



- Использование ЭВМ в процессе математического исследования модели требует специфических, численных методов, т.е. такой "интерпретации" математической модели, которая может быть реализована на ЭВМ - назовём её *дискретной* (или *вычислительной*) моделью. Поскольку ЭВМ выполняет только арифметические и логические операции, то для реализации вычислительной модели требуется разработка соответствующего *вычислительного алгоритма*, собственно *программирование*, *расчет* на ЭВМ, *обработка* результатов расчета.

Источники погрешности решения

1. Математическая модель
2. Исходные данные
3. Приближенный метод
4. Погрешности вычислений

1. Погрешность мат. модели

- Математические формулировки редко точно отражают реальные явления, обычно они дают лишь более или менее идеализированные модели. Как правило, при изучении тех или иных явлений мы вынуждены допустить некоторые упрощения, что и вызывает появление погрешностей решения

2. Погрешности исходных данных

- Вызваны наличием в математических формулах числовых параметров, значения которых могут быть определены лишь приближенно. Это, например, все физические константы или экспериментальные результаты, используемые в модели

3. Погрешности метода

- Поскольку аналитически решить задачу невозможно, ее приходится заменять некоторой приближенной задачей, дающей близкие результаты. Например, интеграл заменяют суммой, производную – разностью, функцию – многочленом и т.д. Еще один источник – применение бесконечных итерационных процессов, принудительно прерываемых (например, $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$)

4. Погрешности вычислений

- При вычислениях на ЭВМ неизбежны погрешности, связанные с ограниченностью разрядной сетки машины – погрешности округлений ($\delta_{max} = 0.5\alpha^{1-k}$, α – основание системы счисления) и с переводом чисел из одной системы счисления в другую

Числа с плавающей точкой

- Современные компьютеры позволяют обрабатывать целые числа и числа с плавающей точкой.
- Множество целых чисел бесконечно, но из-за ограниченной разрядной сетки мы можем оперировать только с конечным подмножеством. При 4-х байтах на число диапазон доступных чисел составляет ~ от $-2 \cdot 10^9$ до $2 \cdot 10^9$

Числа с плавающей точкой

- При решении научно-технических задач в основном используются вещественные числа. Пример: 273.9
  $2739 \cdot 10^{-1}$
  $2.739 \cdot 10^{2}$
  $0.2739 \cdot 10^{3}$
- Последняя запись – *нормализованная форма* числа с плавающей точкой. Общий вид:
  $D = \pm m \cdot 10^{n}$, $m = 0.d_1 d_2 \ldots d_k$, $d_1 \neq 0$
- m – мантисса, n – порядок числа

Понятие погрешности

- *Абсолютная погрешность* – разность между истинным значением числа и приближенным. Если а – приближенное значение х: $\Delta x = |a - x|$
- *Относительная погрешность* – отношение абсолютной погрешности к приближенному значению $\delta x = \Delta x / a$

Предельная погрешность

- Очень часто истинное значение x неизвестно и приведенные выражения невозможно использовать. В этом случае используют верхнюю оценку модуля абсолютной погрешности, называемую *предельной погрешностью* Δa:
  $\Delta x \leq \Delta a$
- В дальнейшем Δa принимается в качестве абсолютной погрешности

Правила округления

Округление до *n* значащих цифр – отбрасывание всех цифр справа от *n*-й

1. Если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся цифры остаются без изменения (8,3 ≈ 8)
2. Если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре добавляется 1 (8,6 ≈ 9)

Правила округления

3. Если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных имеются ненулевые, то к последней оставшейся цифре добавляется 1 ($8,501 \approx 9$)
4. Если первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные – нули, то последняя оставшаяся остается неизменной, если она четная, и увеличивается, если нечетная ($6,5 \approx 6$, но $7,5 \approx 8$)

Правила округления

- При применении правил округления погрешность не превосходит половины десятичного разряда последней оставленной цифры

Действия над приближенными числами

1. При сложении и вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются:
   $\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b$
2. При умножении и делении чисел их относительные погрешности складываются:
   $\delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b$
   $\delta(a / b) = \delta a + \delta b$
3. При возведении числа в степень его относительная погрешность умножается на показатель степени
   $\delta(a^k) = k\delta a$

Пример

$a = 2520$, $b = 2518$, $a - b = 2$

$\Delta a = \Delta b = 0.5$

$\delta a = 0.5/2520 \approx 0.0002$ (0.02%)

$\delta b = 0.5/2518 \approx 0.0002$ (0.02%)

Относительная погрешность разности

$\delta(a - b) = (0.5 + 0.5)/2 = 0.5$ (50%)

Уменьшение погрешностей

- Избегать вычитания близких по значению чисел
- Применять правильный порядок вычислений
- Правильно использовать ряды для вычисления функций

Порядок вычислений

S = 0.2764+0.3944+1.475+26.46+1364=1393

Компьютер округляет после каждого сложения, поэтому законы коммутативности выполняются не всегда. При обратном порядке сложения получим

S = 1364+26.46+1.475+0.3944+0.2764= 1391

Использование рядов

$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$

$\sin \pi/6$ (30º) = $0.5236 - 0.2392 \cdot 10^{-1} + 0.3279 \cdot 10^{-3} = 0.5$

$\sin 13\pi/6$ (360º+30º) = $\sin 6.807 \approx 0.5167$

$\sin 49\pi/6$ (4x360º+30º) = $\sin 25.6563 \approx 129$