

# «Показательные уравнения и неравенства»



*Маргиева Нелли Александровна  
Учитель математики  
Республиканского физико-математического  
лицея-интерната.*

# «Показательные уравнения и неравенства»



Цель урока: обобщение знаний о способах решения показательных уравнений и неравенств, подготовка к ЕГЭ.

# «Показательные уравнения и неравенства»

- ▣ Повторение теоретического материала
  - показательные уравнения
  - показательные неравенства
- ▣ Повторение некоторых способов решения уравнений и неравенств
- ▣ Работа в группах
- ▣ Тест
- ▣ Проверка теста
- ▣ Домашнее задание
- ▣ Оценка своей работы

# Показательные уравнения

1.  $a^x = b \quad (a > 0, a \neq 1)$

- если  $b > 0$ , то  $x = \log_a b$

- если  $b \leq 0$ , то решений нет

2.  $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$



## Показательные неравенства

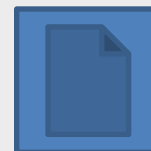
Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств

$$a^x > a^b \quad \text{или} \quad a^x < a^b$$

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

- если  $a > 1$ , то  $f(x) > g(x)$
- если  $0 < a < 1$ , то  $f(x) < g(x)$



Укажите промежуток, на котором  
лежит корень уравнения

$$3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39.$$



Решение:

$$3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39,$$

$$9 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x + 3^x = 39,$$

$$13 \cdot 3^x = 39,$$

$$3^x = 3,$$

$$x = 1.$$

Из данных промежутков только промежуток  $(0; 2)$  содержит найденный корень.

Ответ:

(1)  $[-2; 0]$ ; (2)  $[2; 4]$ ; (3)  $(4; 9]$ ; (4)  $(0; 2)$ .

Номера правильных ответов  $4$



Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$4^x + 2^{x+1} = 3.$$





*Решение:*

$$4^x + 2^{x+1} = 3,$$

$$4^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0,$$

Сделаем замену переменных. Пусть  $y = 2^x$ . Уравнение принимает вид  $y^2 + 2y - 3 = 0$ .

Полученное уравнение имеет корни  $-3; 1$

Сделаем обратную замену:  $\begin{cases} 2^x = -3, \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ .

Из данных промежутков только промежуток  $[0;1)$  содержит найденный корень.

*Ответ:*

(1)  $[\log_2 6; 3)$ ;

(2)  $[0;1)$ ;

(3)  $[3;4)$ ;

(4)  $[5;5)$ .

Номера правильных ответов.

2



Найдите область определения  
функции

$$y = \sqrt{5^{3x+1} - 1}.$$



*Решение:*

Составим неравенство  $5^{3x+1} - 1 \geq 0$ . Решив его, получим:

$$x \in [-1/3; +\infty)$$

|| Подробнее.  $5^{3x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 5^{3x+1} \geq 1 \Leftrightarrow 5^{3x+1} \geq 5^0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/3$

*Ответ:*

**(1)**  $(-\infty; -1/3]$ ; **(2)**  $[1/3; +\infty)$ ; **(3)**  $[-1/3; +\infty)$ ; **(4)**  $(-\infty; -1/3)$ .

Номера правильных ответов.

3



Найдите область определения  
функции

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7}} - 1.$$



Решение:

Составим неравенство  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7} - 1 \geq 0$  Решив его, получим:

$$x \in (-\infty; 7/3]$$

Подробнее.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7} \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7} \geq 3^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x - 7 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 7/3.$$

Ответ:

(1)  $[7/3; \infty)$ ; (2)  $(-\infty; -7/3]$ ; (3)  $(-\infty; 7/3]$ ; (4)  $(-\infty; 7/3)$ .

Номера правильных ответов.

3



# Способы решения показательных уравнений и неравенств

- Уравнивание оснований
- Вынесение общего множителя за скобку
- Введение вспомогательной переменной  
(замена переменной)





# Работа в группах



1. Составить и решить уравнение и неравенство
2. Найти ошибку в решении (Бланк №2)



Укажите промежуток, содержащий корень уравнения

$$(0,125)^{2-\frac{x}{3}} = 16$$

Решение.

$$(0,125)^{2-\frac{x}{3}} = 16,$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{2-\frac{x}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4},$$

$$6 - x = -4,$$

$$x = 10.$$

- 1) (9;11)   2) (9;10)   3) (3;5]   4) [0;3]





Укажите множество решений неравенства

$$(1,5)^{x-1} > \frac{4}{9}.$$

Решение.

$$(1,5)^{x-1} > \frac{4}{9},$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x} > \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$1-x < 2,$$

$$x > -1.$$

1)  $(-1; +\infty)$  2)  $(-\infty; -1)$  3)  $(3; +\infty)$  4)  $(-\infty; 3)$



# Тест

- Выберите уровень задания на Бланке №3 и приступайте к его выполнению.
- Время на выполнения задания **6 минут**.



# Ответы теста

I уровень:

1)

2)

3)

4)

5)

II уровень:

1)

2)

3)

4)

5)

# Критерии:

## I уровень

5 заданий - «4»

4 задания - «3»

3 задания - «2»

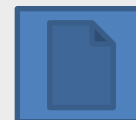
## II уровень

5 заданий - «5»

4 задания - «4»

3 задания - «3»

2 задания - «2»



C 1. Решите уравнение  $3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 11 = \left(\sqrt{2 - 2x^2}\right)^2 + 2x^2$ .

Возможная запись решения ученика.

$$3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 11 = \left(\sqrt{2 - 2x^2}\right)^2 + 2x^2.$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 11 = 2 - 2x^2 + 2x^2, \\ 2 - 2x^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0, \\ 1 - x^2 \geq 0; \end{cases}$$

$$3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$$

$$y = 3^x, y > 0, \text{ тогда } 3y^2 - 28y + 9 = 0,$$

$$y = 9 \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{3}$$

$$3^x = 9 \quad \text{или} \quad 3^x = \frac{1}{3}$$

$$x = 2 \quad \text{или} \quad x = -1$$

т.к.  $1 - x^2 \geq 0$ , то  $x = -1$

Ответ:  $-1$



- Задание с использованием показательных функций, показательных уравнений и неравенств являются весьма популярными заданиями во всех вариантах ЕГЭ.
- *Некоторые наиболее часто встречающиеся виды трансцендентных функций, прежде всего показательные, открывают доступ ко многим исследованиям.*

*Л. Эйлер*



# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Учебно-методический комплект:
- Математика. Алгебра и математический анализ. *Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О.С., Мордкович А.Г.* 11 класс. Учебное пособие.
- Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. Контрольные и самостоятельные работы под редакцией М.Л.Галицкого и др.

