УРОК-ПРАКТИКУМ
В 10 КЛАССЕ

Пирамида. Решение задач по теме «Пирамида».

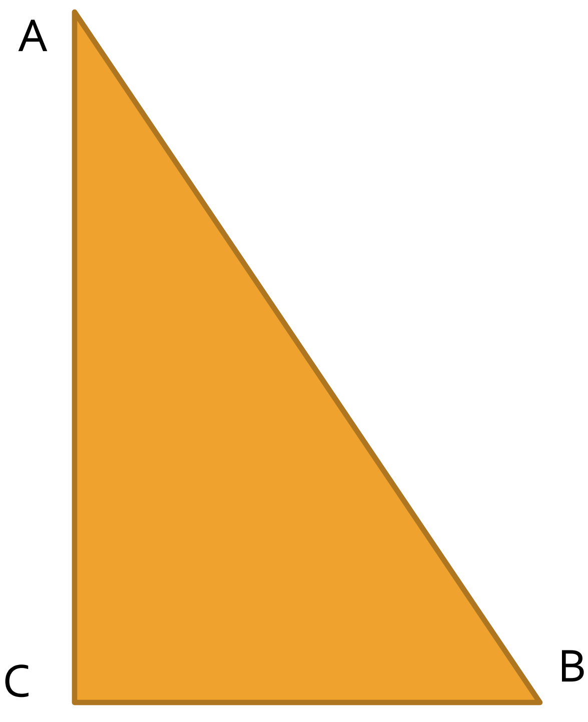
УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
ОГУРЦОВА АЛЛА ЮРЬЕВНА

Цели урока

- Изучить мнемонический прием.
- Вывести формулы перехода основных углов в правильных пирамидах.
- Научиться применять мнемонический прием для доказательства зависимостей между углами в правильной пирамиде и решения задач.

Устная работа

Дан прямоугольный треугольник АВС.
Найдите:

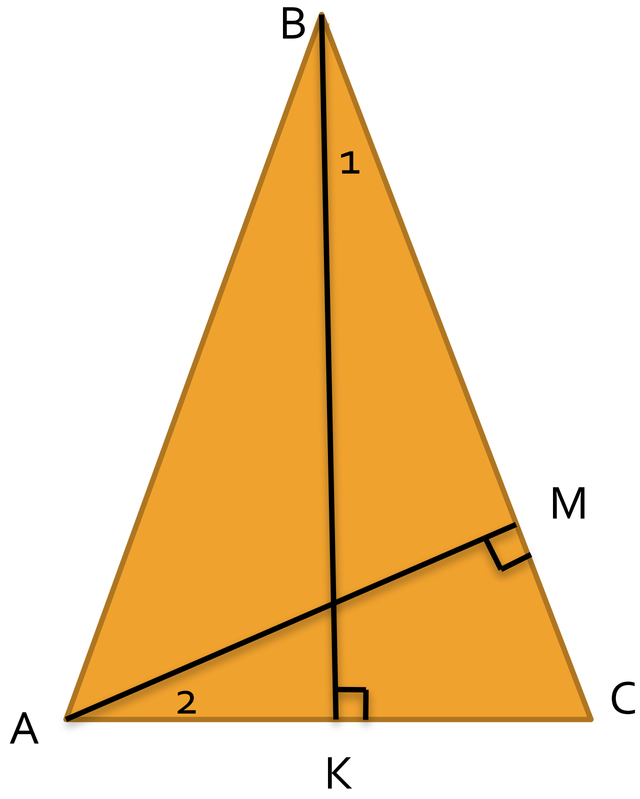


$\sin A = BC/AB$

$\cos A = AC/AB$

$\mathrm{tg}\, A = BC/AC$

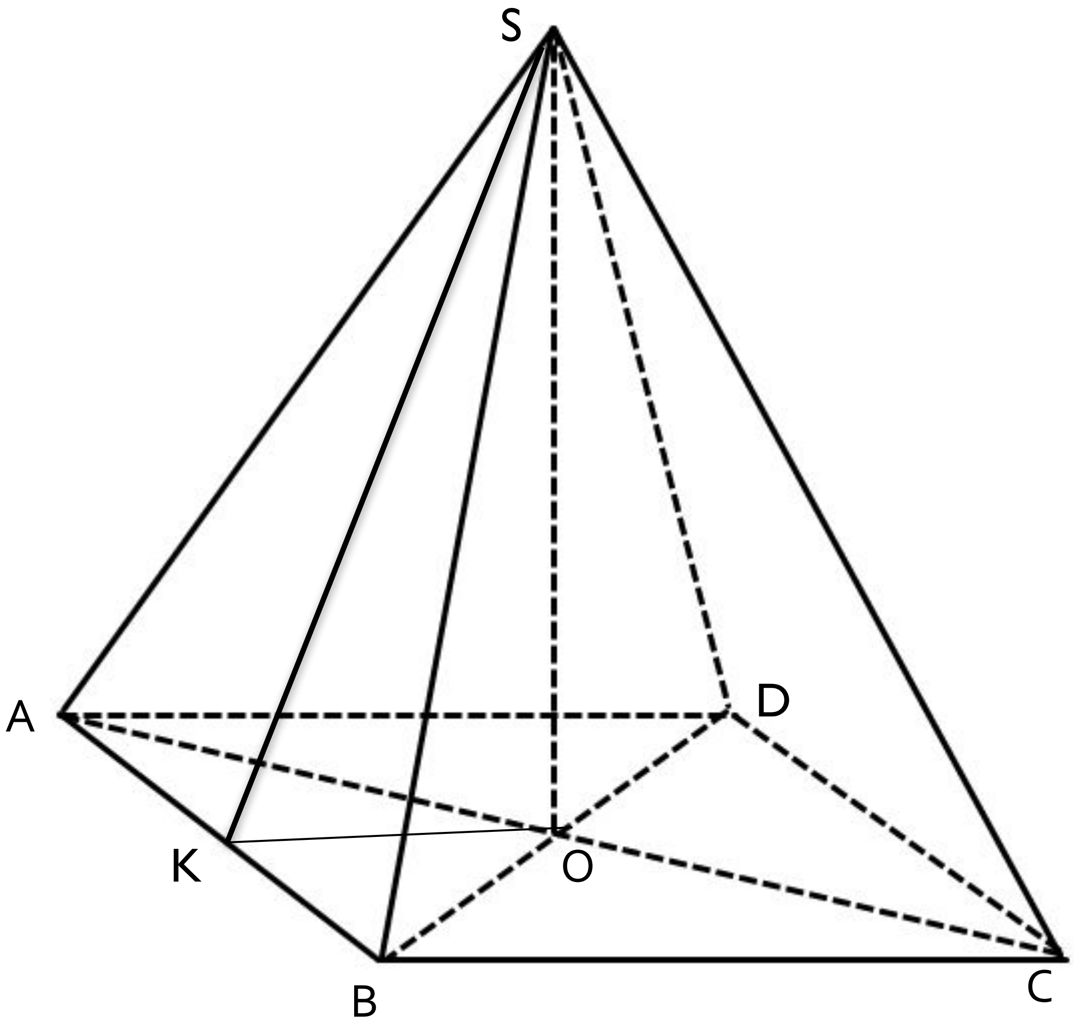
2) Треугольник АВС равнобедренный. Проведены высоты к снованию и боковой стороне. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.



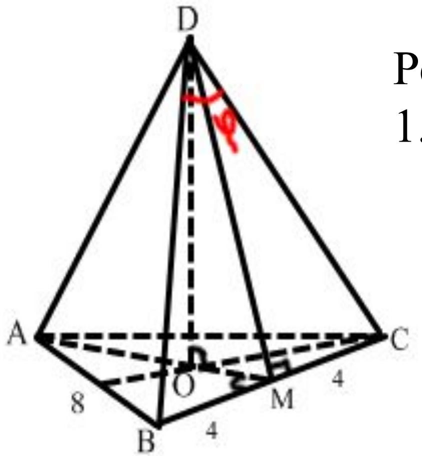
$\Delta AMC \sim \Delta BKC$ (по двум углам)

$\angle 1 = \angle 2$

Основные элементы пирамиды



№ 255 В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен φ найдите высоту пирамиды.



Решение:

1. Из ΔBCD найдем боковое ребро DC по теореме косинусов: получим

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot CD \cdot \cos\varphi$$

$$64 = 2 \cdot BD^2 - 2 \cdot BD^2 \cos\varphi$$

$$64 = 4 \cdot BD^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$BD = \frac{4}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

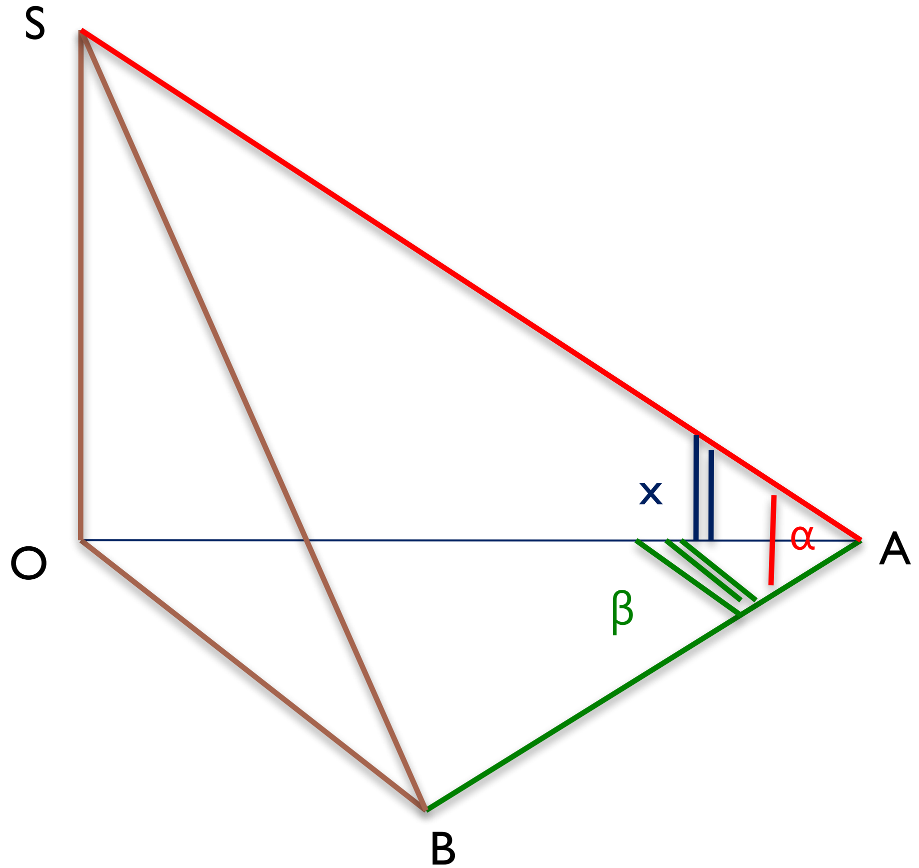
2. Из ΔCDO определим высоту пирамиды DO=H= $\sqrt{DC^2 - OC^2}$, где OC – радиус окружности, описанной около основания ΔABC.

3. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin 60^0} = 2OC$, OC= $\frac{8}{\sqrt{3}}$

4. $H = \sqrt{\frac{16}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{64}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{4}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}}{3 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}{3\sin^2\frac{\varphi}{2}}} =$

$= 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$

Ответ: $\frac{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$

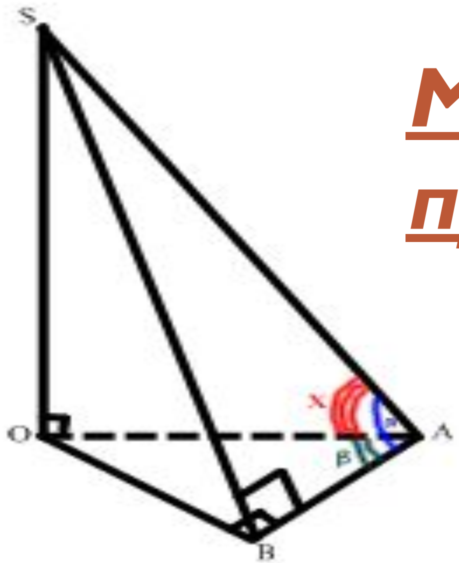

S
x
α
O
A
β
B

МНЕМОНИКА

Биссектриса — это крыса (бегает по углам и делит их пополам)
Медиана — это обезьяна (лазает по сторонам, делит их пополам)

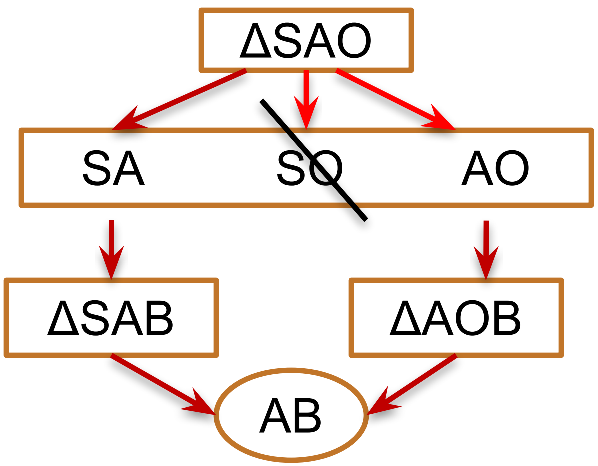
Три закона Ньютона:
1) не пнёшь — не полетит
2) как пнёшь, так и полетит
3) как пнёшь, так и получишь

Мнемонический прием:



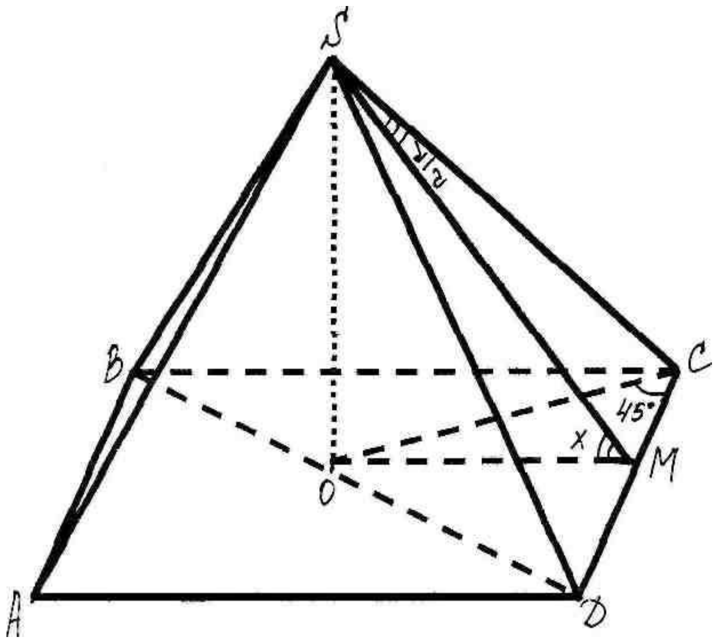
$$\cos x = \frac{AO}{SA}$$

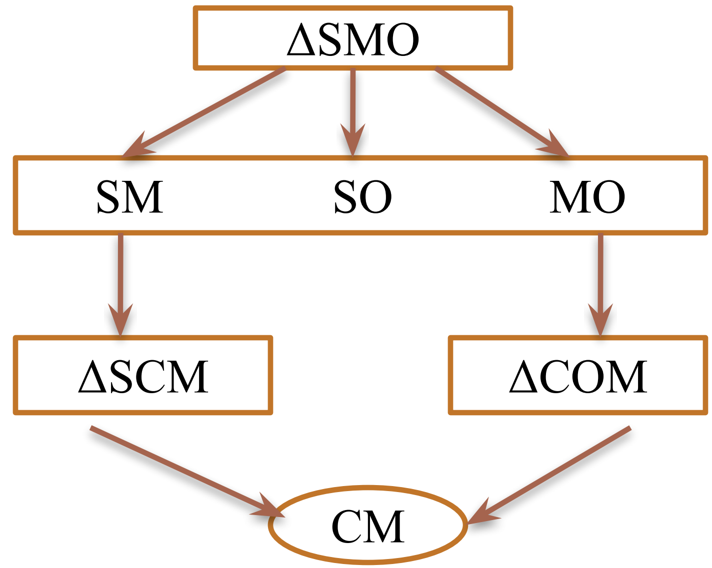
1. Запишем наименования треугольника, в котором находится искомый угол.
2. Из трех букв S, A, O составим различные пары. Получили три отрезка.
3. Зачеркнем тот, который не является общим для треугольников, имеющих данные углы.
4. Добавим по букве, чтобы получить наименование треугольника, включающего один из данных углов: α или β.
5. Найдем отрезок, состоящий из общих букв.
6. Для нахождения искомой зависимости разделим числитель и знаменатель на найденный отрезок.



$$\cos x = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{AO}{AB}}{\frac{SA}{AB}} = \frac{\frac{1}{\cos\beta}}{\frac{1}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при ребре основания (четырехугольная пирамида)

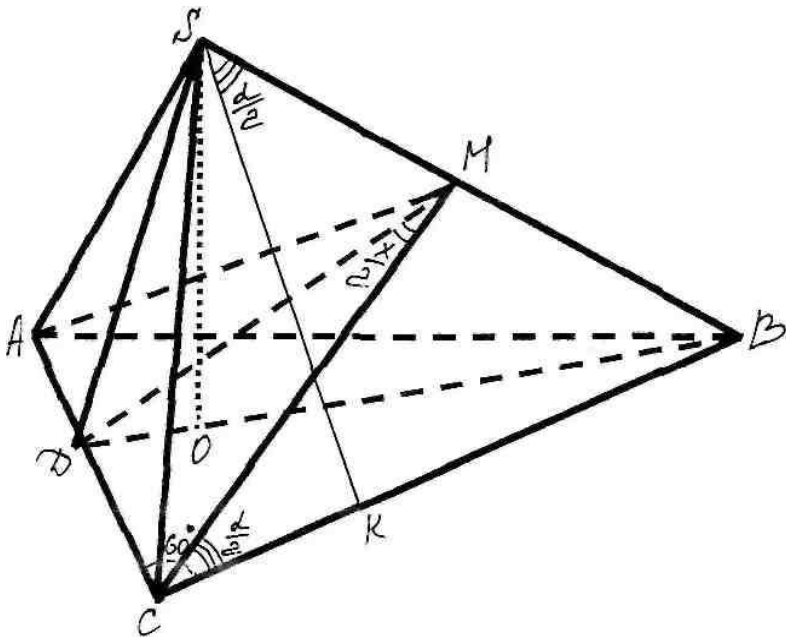


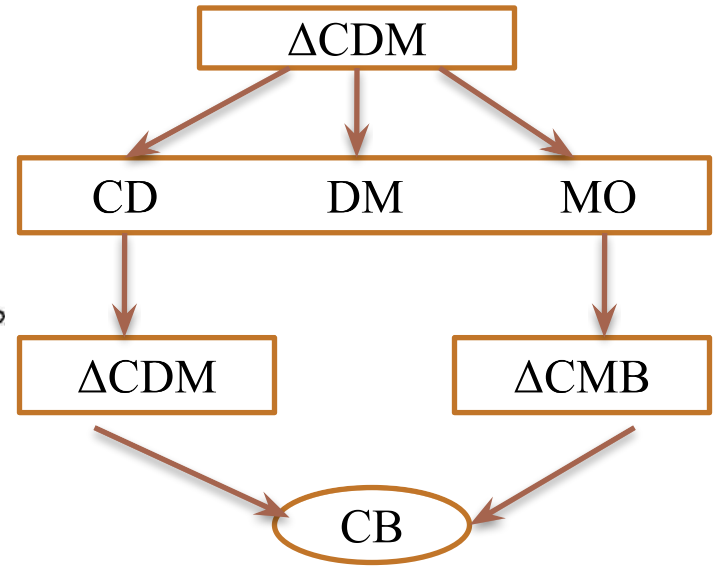


$$\cos x = \frac{MO}{SM} = \frac{\frac{MO}{CM}}{\frac{SM}{CM}} = \frac{tg 45^\circ}{ctg \frac{\alpha}{2}} = tg \frac{\alpha}{2}.$$

$$\cos x = tg \frac{\alpha}{2}.$$

Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при боковом ребре

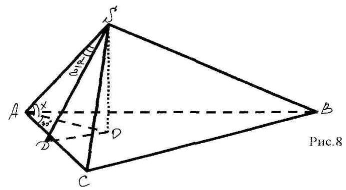
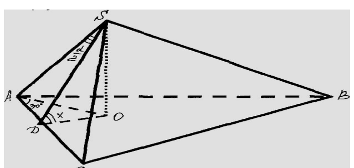
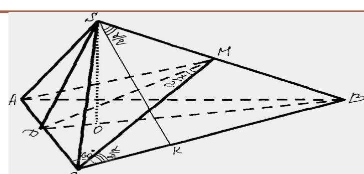




$$\sin\frac{x}{2}=\frac{DC}{CM}=\frac{\dfrac{DC}{CB}}{\dfrac{CM}{CB}}=\frac{\cos 60^\circ}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

РАБОТА В ГРУППАХ

Переходы	N=3	N=4
Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом между боковым ребром и плоскостью основания		
		
Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при ребре основания		
		$\cos x = tg\frac{\alpha}{2}$
Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при боковом ребре		
	$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$	

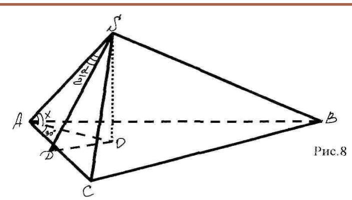
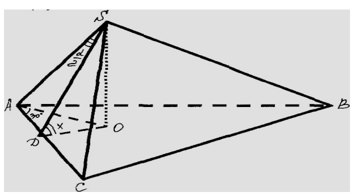
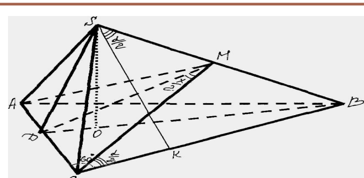
$$\cos x = \frac{tg\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos x = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

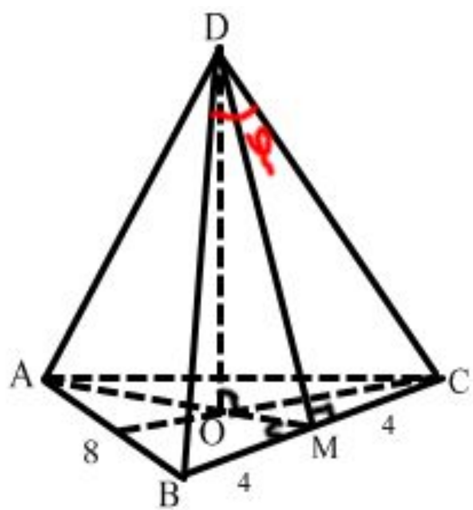
$$\cos x = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$$

РАБОТА В ГРУППАХ

Переходы	N=3	N=4
Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом между боковым ребром и плоскостью основания		
	$\cos x = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$	$\cos x = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$
Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при ребре основания		
	$\cos x = \dfrac{tg\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$	$\cos x = tg\frac{\alpha}{2}$
Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при боковом ребре		
	$\sin\frac{x}{2} = \dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$	$\sin\frac{x}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$

Вернемся к задаче 255

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен φ найдите высоту пирамиды.



1. Из ΔABC найдем $OM = \frac{1}{2} \cdot CO = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

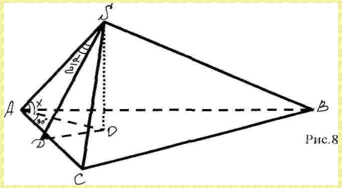
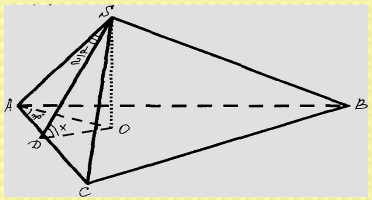
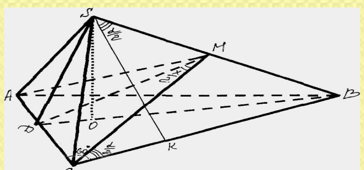
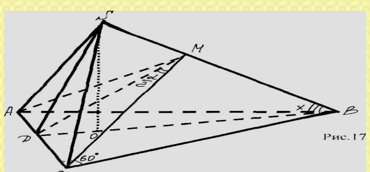
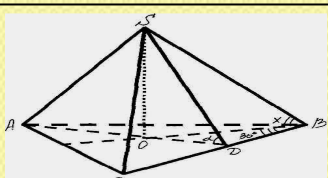
2. Применим формулу перехода для ∟DMO=X:

$cosx = \frac{tg\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{MO}{DM}$, отсюда $DM = \frac{OM}{cosx} = \frac{4}{tg\frac{\varphi}{2}}$.

3. По теореме Пифагора DO= $\sqrt{\frac{16}{tg^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{16}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{\tan^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}} =$

$= \frac{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \tan^2\frac{\varphi}{2}}}{\tan\frac{\varphi}{2}}$.

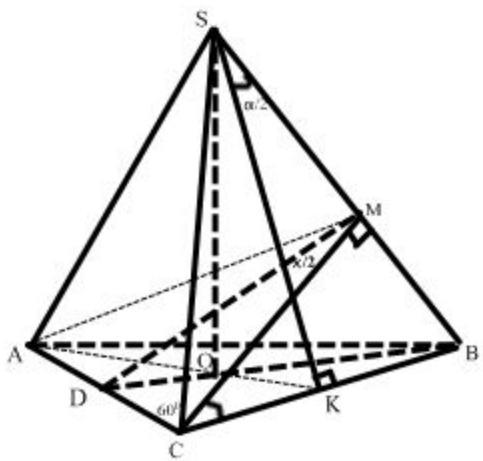
Ответ: $\frac{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \tan^2\frac{\varphi}{2}}}{\tan\frac{\varphi}{2}}$

Переходы	3	4	6	n
Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом между боковым ребром и плоскостью основания				
	$\cos x = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$	$\cos x = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$	$\cos x = 2\sin\frac{\alpha}{2}$	$\cos x = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$
Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при ребре основания				
	$\cos x = \frac{tg\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$	$\cos x = tg\frac{\alpha}{2}$	$\cos x = \sqrt{3}tg\frac{\alpha}{2}$	$\cos x = \frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\pi}{n}}$
Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при боковом ребре				
	$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$	$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$	$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$	$\sin\frac{x}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$
Зависимость между углом при боковом ребре и плоскостью основания правильной пирамиды				
	$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}ctg\frac{\alpha}{2}$	$\sin x = ctg\frac{\alpha}{2}$	$\sin x = \sqrt{3}ctg\frac{\alpha}{2}$	$\sin x = ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\pi}{n}$
Зависимость между углом при ребре основания и углом между боковым ребром и плоскостью основания				
	$tgx = \frac{1}{2}tg\alpha$	$tgx = \frac{1}{\sqrt{2}}tg\alpha$	$tgx = \frac{\sqrt{3}tg\alpha}{2}$	$tgx = tg\alpha\cos\frac{\pi}{n}$

№ 256 г) В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна m, а плоский угол при вершине равен α. Найти двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

Решение:

Пусть линейный угол двугранного угла будет равен X.



ΔAMC равнобедренный, значит ∟DMC=½X.

Применим формулу перехода:

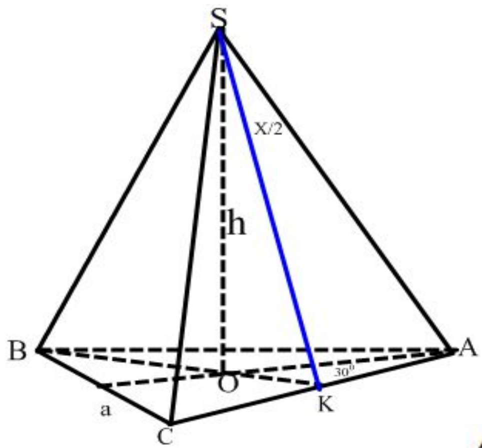
$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

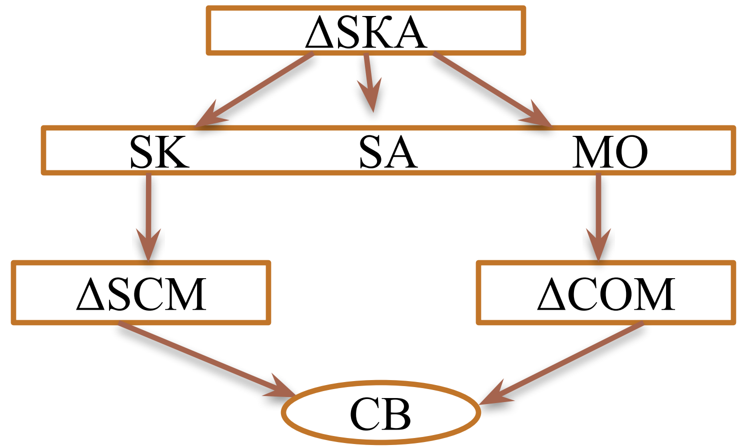
Отсюда: $$\frac{x}{2} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$$ или

$$X = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right) = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Ответ: $2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$

№ 254 (б) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна а, а высота равна h. Найти плоский угол при вершине пирамиды.





Из ΔSKA: $sin\frac{x}{2} = \frac{AK}{SA} = \frac{\frac{AK}{KO}}{\frac{SA}{KO}} = \frac{tg60^0}{\frac{SA}{KO}}$, $SA = \sqrt{h^2 + AO^2}$, где AO= $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, OK = $\frac{1}{2}$AO = $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Тогда $sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{3a}{2\sqrt{9h^2 + 3a^2}}$ и отсюда $\frac{x}{2} = arcsin\left(\frac{3a}{2\sqrt{9h^2 + 3a^2}}\right)$

Значит $x = 2arcsin\left(\frac{3a}{2\sqrt{9h^2 + 3a^2}}\right)$

Ответ: $x = 2arcsin\left(\frac{3a}{2\sqrt{9h^2 + 3a^2}}\right)$

Рефлексия

- Изучили мнемонический прием.
- Вывели формулы переда основных углов в правильных пирамидах.
- Научились применять мнемонический прием для доказательства зависимостей между углами в правильной пирамиде и решения задач.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- Задача № 254 (б,г,д) – решить двумя способами – традиционно и с помощью мнемонического приема или формул перехода;
- Изучить теоретический материал урока (см. опорные схемы урока) и мнемонический прием, а так же ознакомиться с презентацией к уроку (см. электронную папку учителя);
- Дополнительная информация по теме урока содержится в презентации «Это интересно» (см. электронную папку учителя).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ