

Пределы. Непрерывность функций

Автор: Королёв Иван, 11 «А» класс

Руководитель: Степанищева Зоя Григорьевна

Введение

Цель работы:

1. Совершенствовать уровень своей математической подготовки.
2. Овладеть некоторыми вопросами математического анализа.

Задачи исследования:

1. Изучить определения и свойства предела, непрерывность функции.
2. Выработать навыки нахождения пределов, построения графиков разрывных функций.

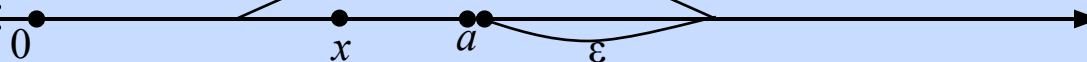
Актуальность темы:

Изучение данной темы предусматривает межпредметную связь математики и физики. Понятие предела непосредственно связано с основными понятиями математического анализа – производная, интеграл и др.

Предел переменной величины

Пределом переменной величины x называется постоянное число a , если для каждого наперед заданного произвольно малого положительного числа ε можно указать такое значение переменной x , что все последующие значения будут удовлетворять неравенству $|x - a| < \varepsilon$. Если число a есть предел переменной величины x , то пишут: $\lim x = a$.

В терминах геометрических определение предела может быть сформулировано следующим образом: постоянное число a есть предел переменной x , если для любой наперед заданной как угодно малой окрестности с центром в точке a и радиусом ε найдется такое значение x , что все точки, соответствующие последующим значениям переменной, будут находиться в этой окрестности:



Предел переменной величины

Рассмотрим несколько примеров переменных, стремящихся к пределу.

Пример 1. Доказать, что переменная $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ имеет предел, равный единице.

Составим разность между переменной и ее пределом:

$|x_n - 1| = |(1 + \frac{1}{n}) - 1| = \frac{1}{n}$. Для любого ε все последующие значения переменной $\frac{1}{n}$ начиная с номера n , где $n > \frac{1}{\varepsilon}$, будут удовлетворять условию $|x_n - 1| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать, что переменная $w_n = (-1)^n$ при неограниченном возрастании n не имеет предела.

Действительно, при возрастании n , переменная w_n не стремится ни к какому числу, попеременно принимая значения 1 и -1 , т. е. не имеет предела.

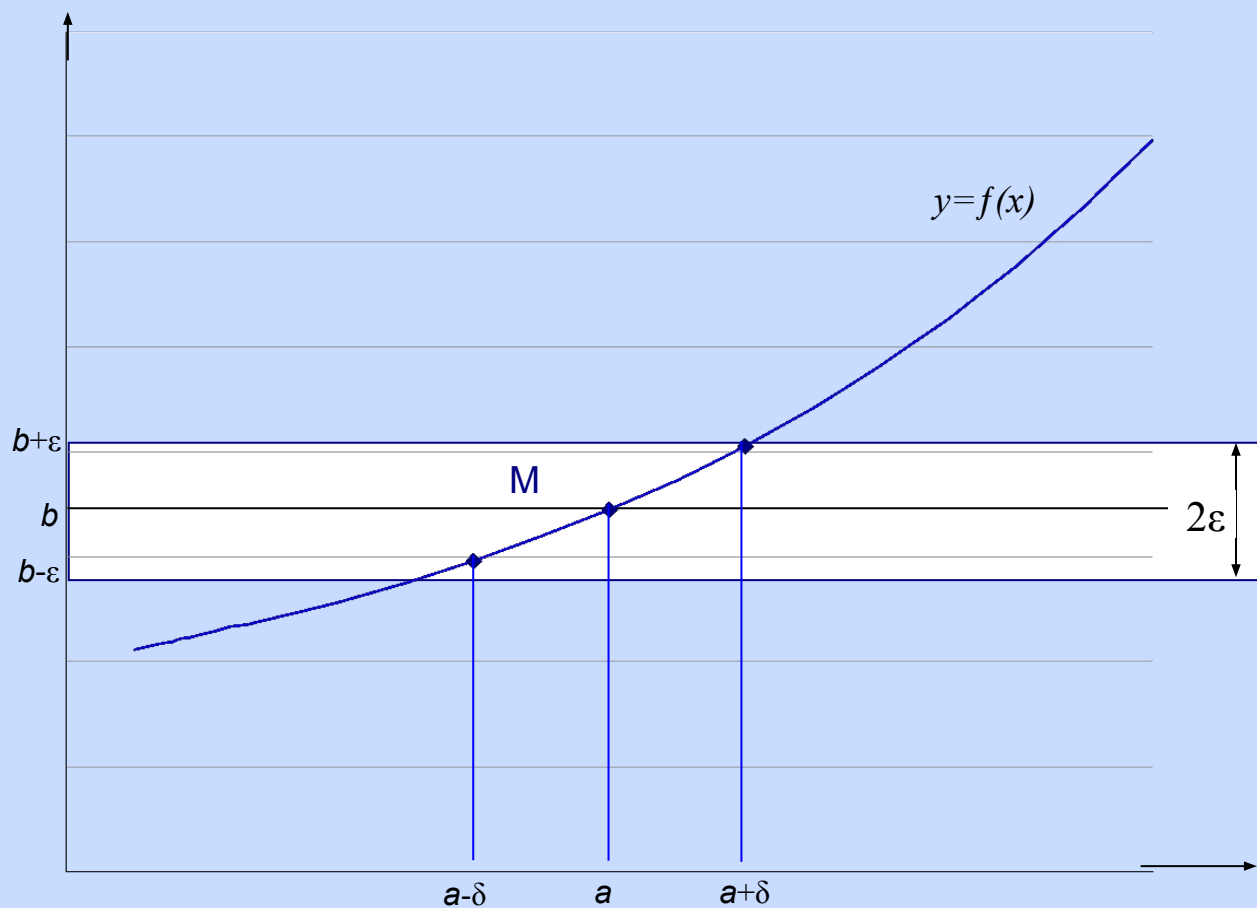
Предел функции

Пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ называется число b , если для любого положительного ε можно указать такое положительное число δ , что для любого x , удовлетворяющего неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае пишут:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Если $x \rightarrow a$ и $x < a$, то употребляют запись $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1$; если же $x \rightarrow a$, но $x > a$, то пишут $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2$. Числа b_1 и b_2 называются соответственно левым и правым пределом функции $y = f(x)$.

Предел функции



Основные свойства пределов

Свойство 1. Предел суммы нескольких переменных равен сумме пределов этих переменных:

$$\lim(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \lim a_1 + \lim a_2 + \dots + \lim a_n.$$

Свойство 2. Предел произведения нескольких переменных равен произведению пределов этих переменных:

$$\lim(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) = \lim a_1 \cdot \lim a_2 \cdot \dots \cdot \lim a_n.$$

Свойство 3. Предел частного двух переменных равен частному пределов этих переменных, если предел знаменателя отличен от нуля: $\lim \frac{a}{b} = \frac{\lim a}{\lim b}$ если $\lim b \neq 0$.

Свойство 4. Предел степени равен пределу основания, возведенного в степень предела показателя: $\lim a^b = (\lim a)^{\lim b}$.

Основные свойства пределов

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{a \rightarrow 0} (1 + a)^{\frac{1}{a}} = e$

Далее я решил привести некоторые часто встречающиеся типы примеров, рассмотренных мной в ходе работы:

1.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{2}{3}$$

2.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n(n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n + 1} = 2$$

Основные свойства пределов

$$\begin{aligned} 3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x - 1}{3x + 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x} - 1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{2x - 2}{3x + 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x} - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\left(1 + \frac{2x - 2}{3x + 1} \right)^{\frac{3x + 1}{2x - 2}} \right)^{\frac{2x - 2}{(3x + 1)(\sqrt{x} - 1)}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(3x + 1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x} + 1)}{3x + 1}} = e \end{aligned}$$

Основные свойства пределов

$$\begin{aligned} 5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{\sec x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x \cdot \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\frac{x}{2} \cos x \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} = 4 \cdot 1 = 4 \end{aligned}$$

$$6. \quad \lim_{u \rightarrow 2} \left(\frac{u-2}{u^2-4} + 2^{-\frac{1}{(u-2)^2}} \right) = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u-2}{(u-2)(u+2)} + \lim_{u \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{(u-2)^2}} = \frac{1}{4} + \lim_{u \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{(u-2)^2}} = \frac{1}{4}$$

Пусть $u=2+a$, $a \rightarrow 0$.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{a^2}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2^{\frac{1}{a^2}}} = 0$$

Непрерывность функций

Функция называется непрерывной в точке x_0 , если она определена в некоторой окрестности этой точки и существует предел функции при $x \rightarrow x_0$, равный значению самой функции в этой точке. Функция называется непрерывной в некоторой области, если она непрерывна в каждой точке этой области. Точка x_0 , принадлежащая области определения функции, называется точкой разрыва, если в этой точке нарушается условие непрерывности. Если существуют конечные левый и правый пределы функции в точке x_0 , а функции определена в этой точке, но эти три числа не равны между собой, то точка x_0 называется точкой разрыва I рода. Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются точками разрыва II рода.

Непрерывность функций

Пример 1. Рассмотрим функцию

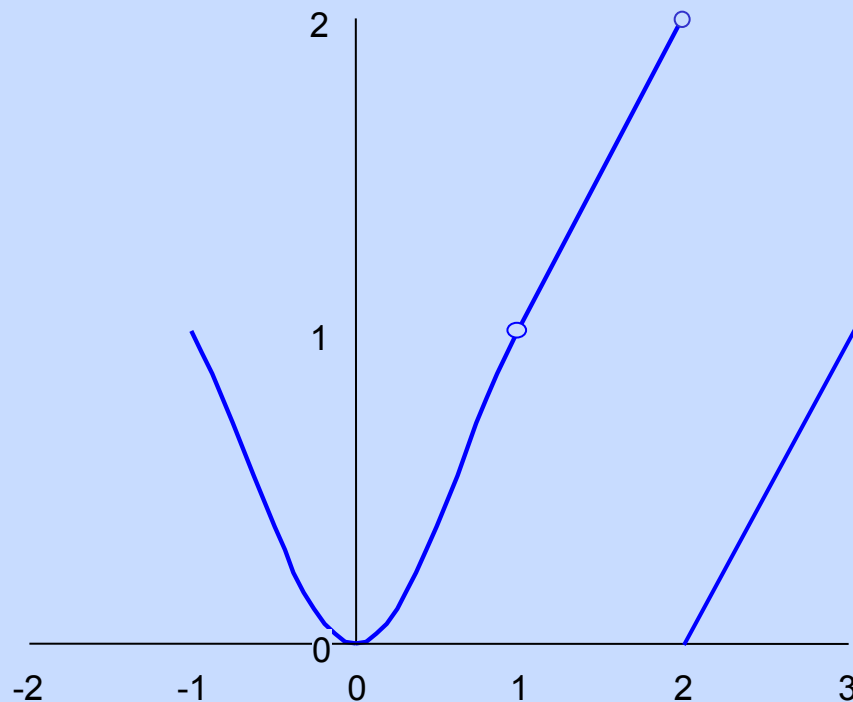
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 1 \\ x, & 1 < x < 2 \\ x - 2, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x - 2) = 0$$



Непрерывность функций

Пример 2. Определить точки разрыва функции $f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}}$

Данная функция имеет разрыв в точке $x=3$. Рассмотрим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \infty$$

Функция имеет конечный предел слева, предел же справа является бесконечным. Точка $x=3$ будет точкой разрыва II рода.

