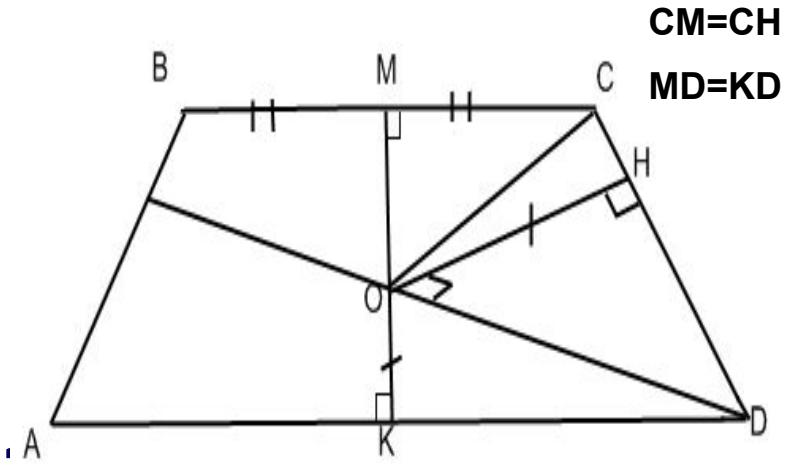
Вписанная и описанная

окружность

Вписанная окружность

1. Центр вписанной окружности – середина серединного перпендикуляра к основаниям
2. Если О- центр вписанной окружности, то $\angle COD = 90^\circ$



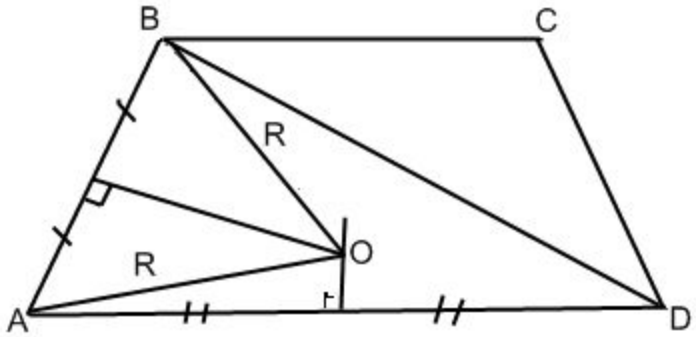
3.Если в трапецию вписана окружность, то AB+CD=BC+AD

4.Если в равнобедренную трпецию вписана окружность, то боковая сторона равна средней линии трапеции

Описанная окружность

R - радиус окружности, описанной около трапеции – равен радиусу окружности, описанной около треугольника, вершинами которого являются любые 3 вершины трапеции.

O – центр описанной окружности около △ABD и трапеции ABCD

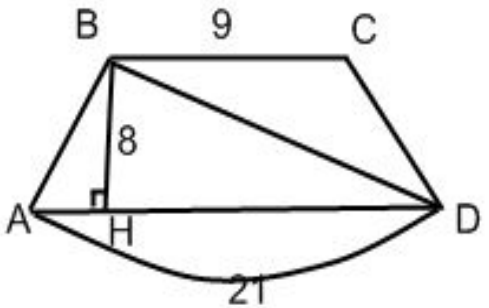


Задачи

В равнобедренной трапеции BC=9, AD=21, высота h=8. Найти диаметр описанной около трапеции окружности.

Решение:

Радиус R описанной окружности около трапеции – это радиус окружности около $\triangle ABD$ D=2R, R= $\frac{abc}{4S}$



AH = $\frac{AD-BC}{2}$ = $\frac{21-9}{2}$ =6

HD =21-6 = 15

$\triangle HBD$: DB = $\sqrt{BH^2+HD^2}=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{286}=17$

$\triangle ABH$: AB= $\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$

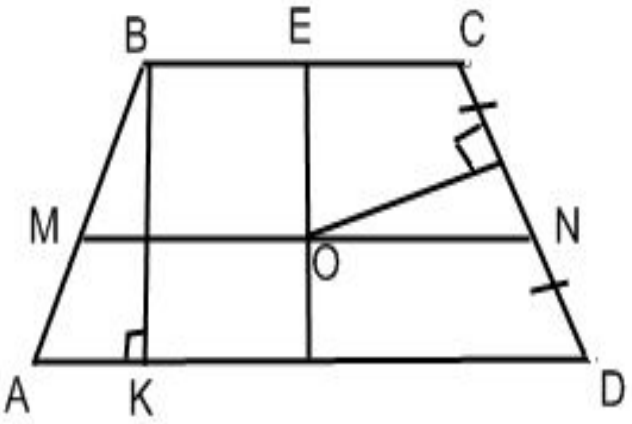
P= $\frac{AB+BD+AD}{2}=\frac{10+17+21}{2}=24$

$$S_{ABD}=\sqrt{P(P-AB)(P-AD)(P-BD)}=\sqrt{24(24-10)(24-21)(24-17)}=\sqrt{24\times14\times3\times7}=3\times7\times4=84$$

D=2R= $\frac{10\times21\times7}{4\times8\times4}\times2=\frac{85}{8}\times2=21{,}25$

Ответ.21,25

Около окружности описана равнобедренная трапеция, средняя линия которой равна 5, и синус угла (острого) при основании равен 0.8. Найти площадь трапеции.



O – центр вписанной окружности – середина серединного перпендикуляра к основаниям трапеции. BK – высота трапеции.

S_{ABCD} =MN $\times$BK

Т.к. окружность вписана в трапецию, то BC+AD=AB+CD

Т.к. AB+CD, то BC+AD=2AB

MN= $\frac{BC+AD}{2} \Rightarrow 2MN = BC + AD$

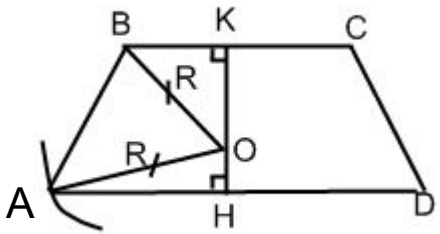
Значит 2MN=2AB=5

$\triangle$ ABK: BK=ABsinA= 5 $\times$0.8=4

S=5$\times$4=20

Ответ. 20

Около трапеции описана окружность, центр которой лежит внутри трапеции. Высота трапеции равна 27, а основания 48 и 30. найти радиус окружности.



КН – высота, КН – срединный перпендикуляр

ОА=ОВ=R

Пусть ОН=х, тогда ОК=КН-ОН=27-х

$$\left.\begin{array}{l} \triangle AOH: AO^2 = OH^2 + AH^2 \\ \triangle BOK: BO^2 = KB^2 + OK^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow OH^2 + AH^2 = KB^2 + OK^2$$

Тогда $x^2 + 24^2 = 15^2 + (27 - x)^2$

$$\cancel{x^2} + 576 = 225 + 729 - 54x + \cancel{x^2}$$

54x=378

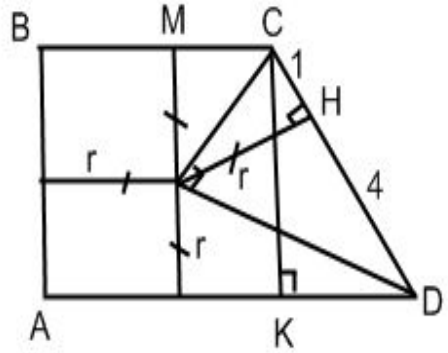
X=7

R=OA= $\sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$

Ответ.25

В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания окружности с боковой стороной делит эту сторону на отрезки 1 см и 4см. Найти периметр трапеции.

$$P_{ABC} = AB + BC + CD + AD$$



CD=CH+HD=1+4=5

O - центр вписанной окружности в трапецию, значит $\angle$COD=90°

Тогда $OH^2 = CH \times HD, OH = r, r^2 = 1 \times 4 = 4$

R=OH=2

Значит AB=2r=2$\times$ 2 =4

$\triangle$ CKD: KD= $\sqrt{CD^2 - CK^2} = \sqrt{25-16} = 3$

MC= CH=1, т.к. O- центр вписанной окружности

BC=BM+CM=2+1=3, AD=AK+KD=3+3=6, P=4+3+5+6=18

Решить самостоятельно

1. Один из углов равнобедренной трапеции равен 60°, а её площадь равна $24\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, вписанной в эту трапецию.

Ответ.3.

2.Окружность описана около равнобедренной трапеции ABCD с основанием AD=15 AC и BD образуют с боковой стороной AB углы $\angle$BAC= α, $\angle$ABD= β, также, что sin $\alpha = \frac{1}{3}, \sin\beta = \frac{5}{9}$. MN средняя линия трапеции. Найти MN.

Ответ.12.

3.Около трапеции описана окружность, центр которой лежит на основании AD. $\angle BAD = 60^{\circ}$ Средняя линия равна 6. Найти радиус описанной окружности.

Ответ.4.

4.Равнобедренная трапеция описана около окружности радиуса 2.

Найти площадь трапеции, если косинус угла при большем основании трапеции равен 0,6

Ответ.20.

5.Средняя линия прямоугольной трапеции равна 9,а радиус вписанной окружности в неё равен 4. Найти большее основание трапеции.

Ответ.12