Арксинус. Решение уравнения *sin t = a.*

урок алгебры, 10 класс,
УМК А.Г. Мордкович

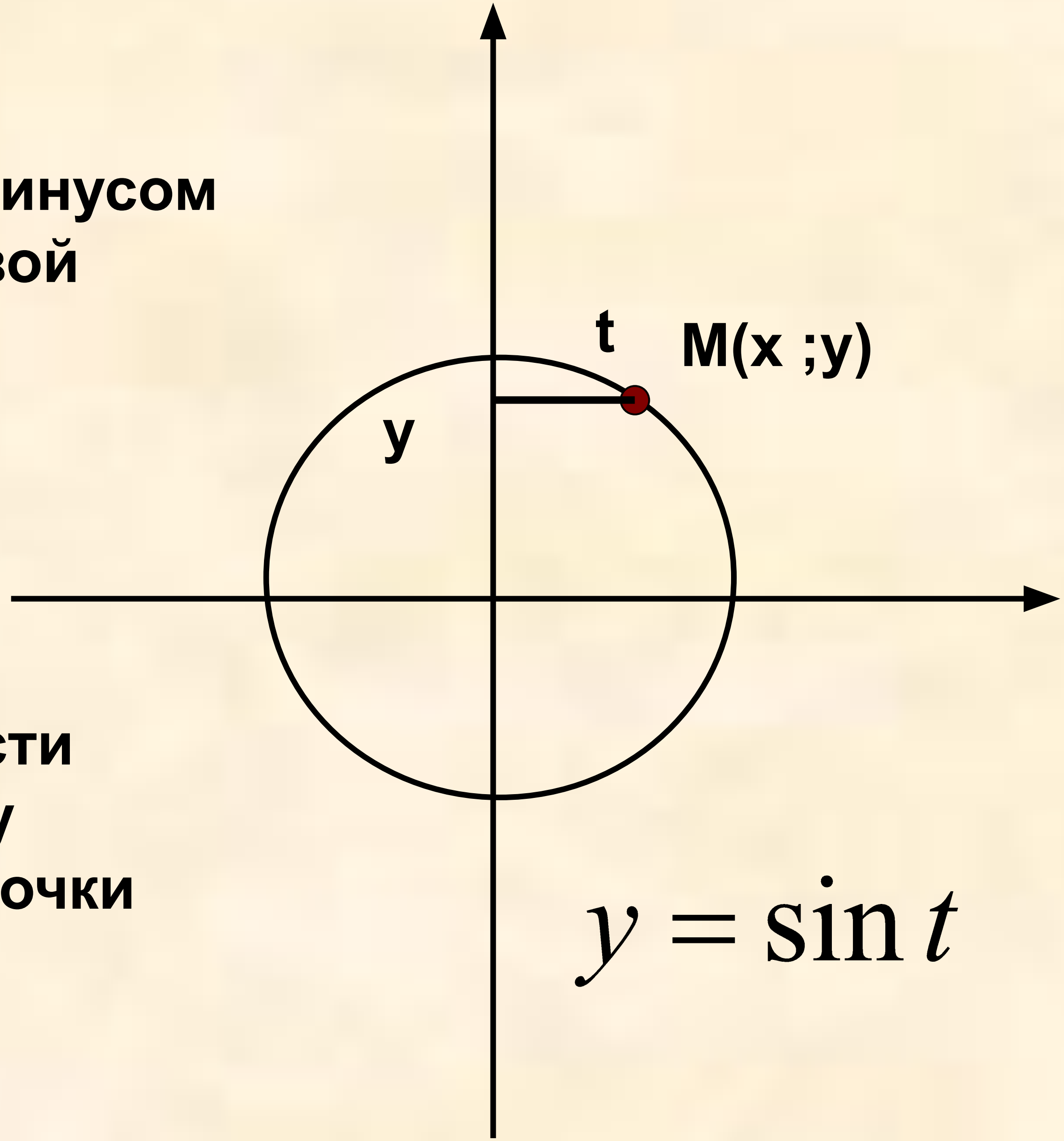
Автор: Лазарчук Владимир Николаевич,
учитель математики и физики
МБОУ СОШ № 4
н.п. Енский Ковдорского района Мурманской области

Цели

- Изучить определение арксинуса числа.
- Изучить формулы решения простейшего тригонометрического уравнения *sin t = a.*

Повторим

Что называется синусом числа t на числовой окружности.



Синусом числа t на числовой окружности называют ординату соответствующей точки окружности

$$y = \sin t$$

Повторим

Решим простейшее уравнение вида *sin t = a* с помощью числовой окружности.

$$\sin t = \frac{1}{2}$$

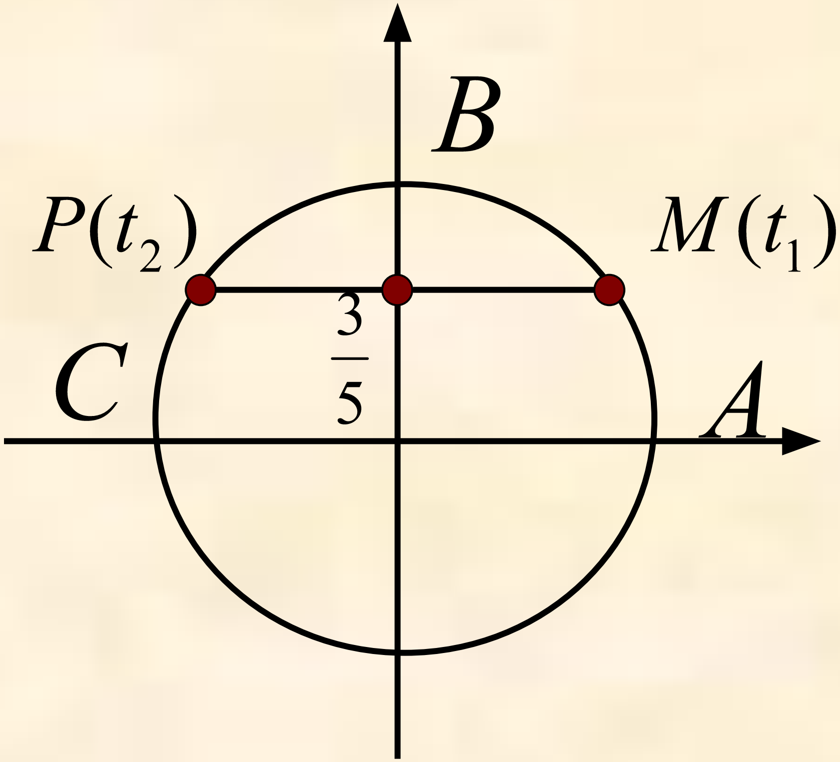
$$t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

Решим уравнение

$$\sin t = \frac{3}{5}$$

С помощью числовой окружности получим решение.



$$t = t_1 + 2\pi k, k \in Z$$

$$t = t_2 + 2\pi k, k \in Z$$

$t_1 -$ *длина дуги* AM

$t_2 -$ *длина дуги* AP

Поскольку AP = AC - PC,

AC = π, а PC = AM, получаем,

что $t_2 = \pi - t_1$

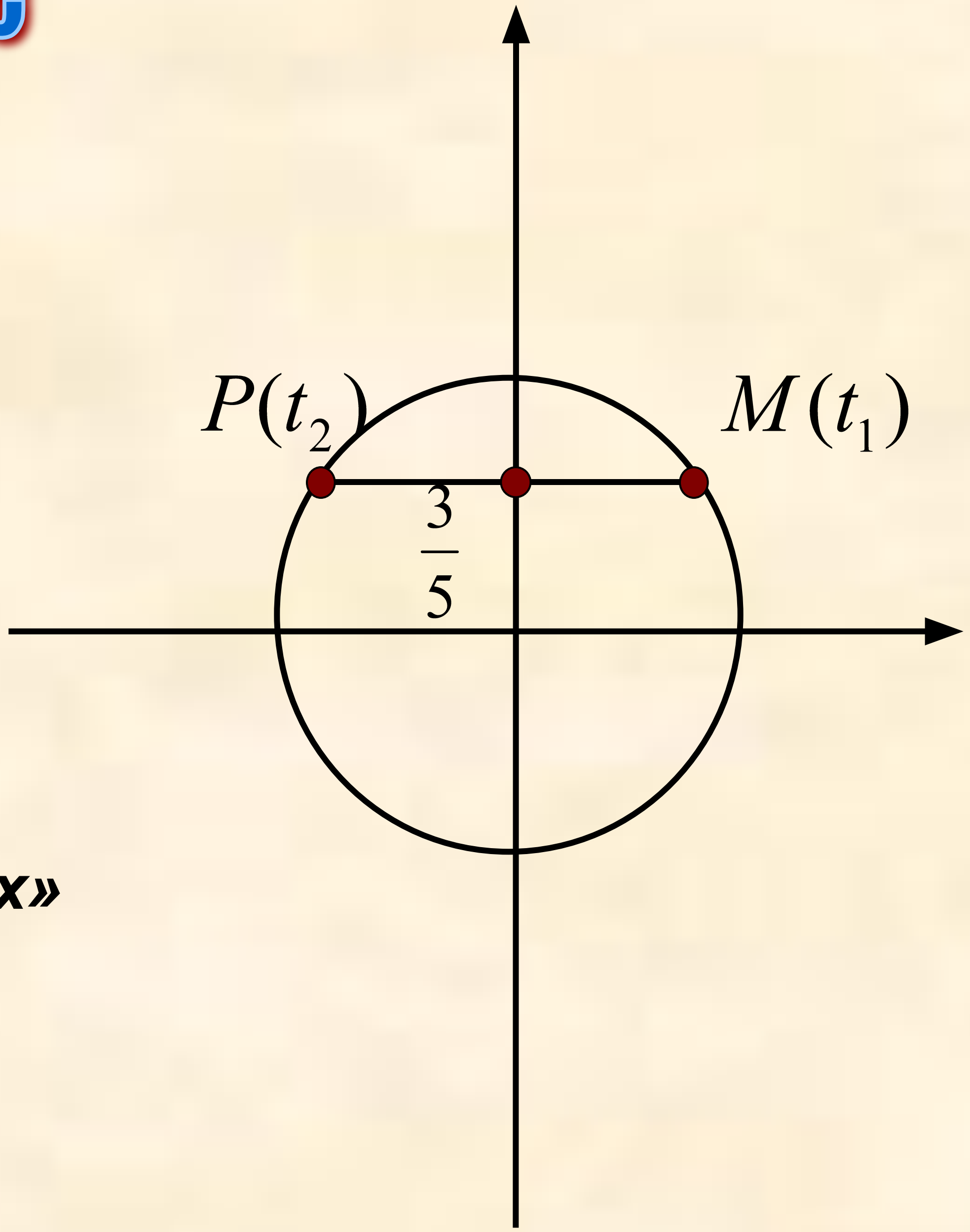
Решим уравнение

? **Что это за число t_1?**

В рассмотрение введён новый символ

$$\arcsin\frac{3}{5}$$

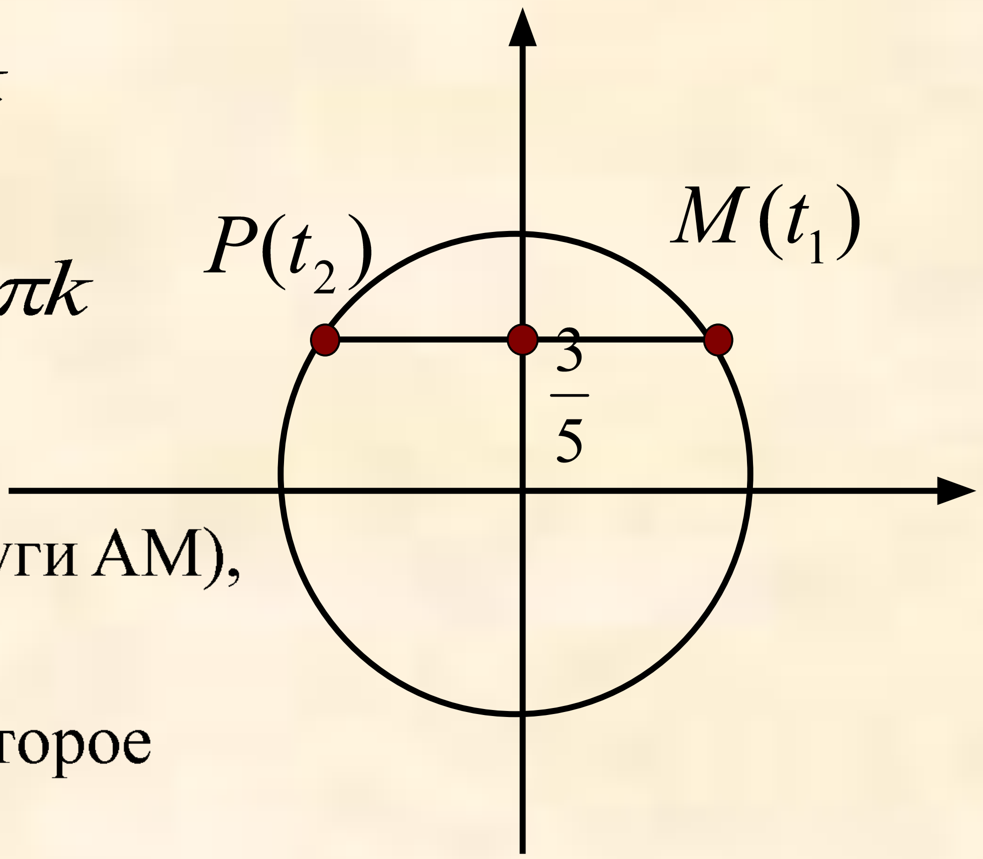
«арксинус трёх пятых»



С помощью введённого символа можно записать корни

$$t_1 = \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k$$

$$t_2 = \pi - \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k$$



$\arcsin\frac{3}{5}$ – это число (длина дуги АМ),

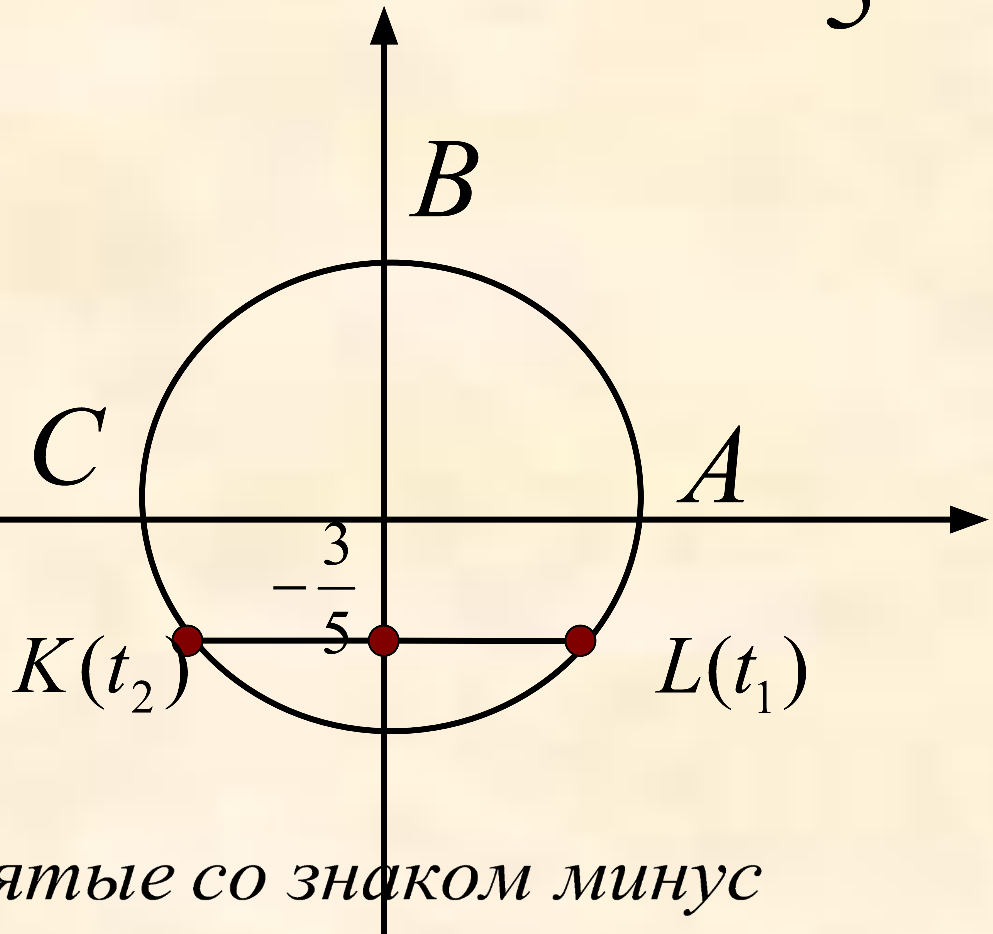
синус которого равен $\frac{3}{5}$ и которое

принадлежит отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Решим уравнение

$$\sin t = -\frac{3}{5}$$

С помощью числовой окружности получим решение.



$$t = t_1 + 2\pi k, k \in Z$$

$$t = t_2 + 2\pi k, k \in Z$$

t_1 – *длина дуги* AL

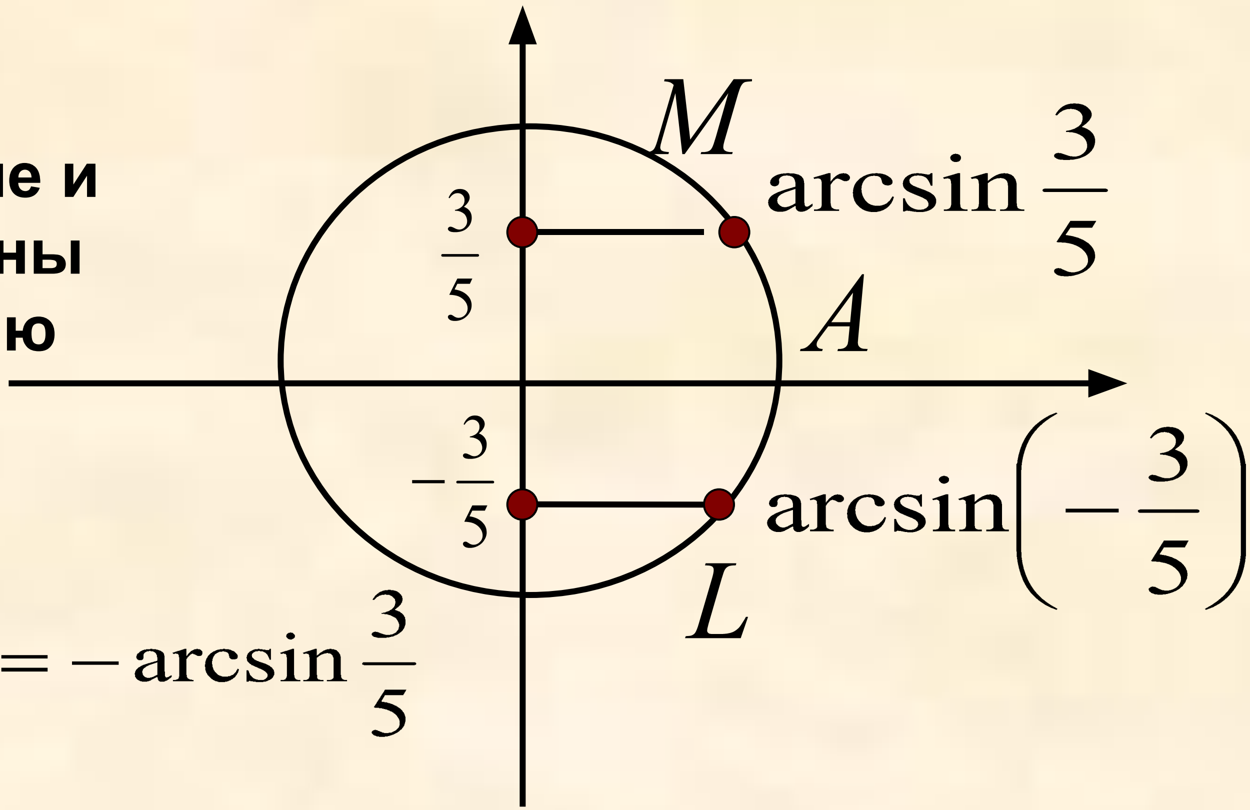
t_2 – *длина дуги* AK*, взятые со знаком минус*

$$t_1 = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

С помощью числовой окружности сравним

$$\arcsin\frac{3}{5} \quad и \quad \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$$

Дуги AM и AL равны по длине и противоположны по направлению

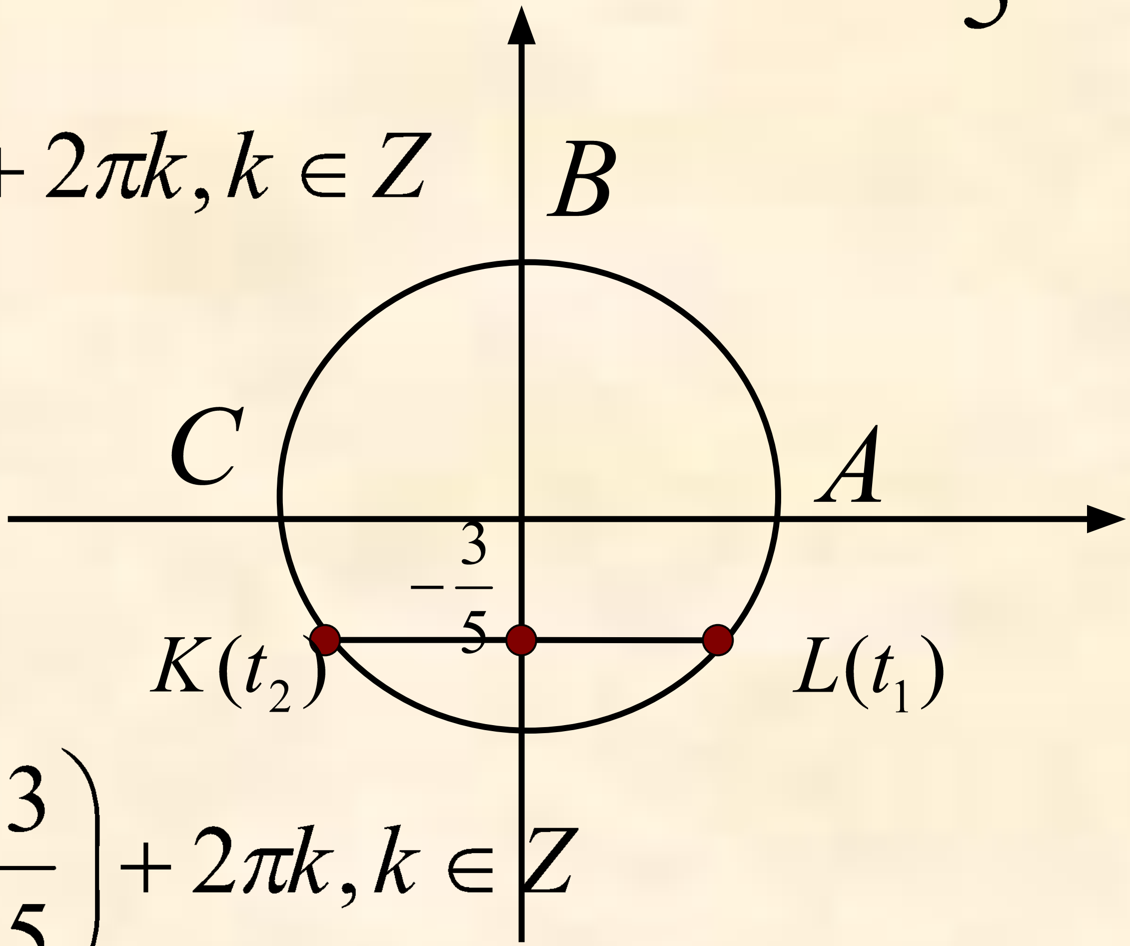


$$\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) = -\arcsin\frac{3}{5}$$

Получим

$$\sin t = -\frac{3}{5}$$

$$t = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi k, k \in Z$$



$$t = \pi - \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi k, k \in Z$$

Определение

Если $|a| \le 1$, *то* $\arcsin a$ (*арксинус* a) – *это* *такое число из отрезка* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, *синус которого равен* a.

$$\text{Если } |a| \le 1, \text{ то}$$

$$\arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a \\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Если $|a| \leq 1$, *то уравнение* $\sin t = a$

имеет две серии решения

$$t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z,$$

$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z.$$

Существует три частных случая решения уравнения *sin t = a*

$$\sin t = 0, \qquad t = \pi k;$$

$$\sin t = 1, \qquad t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$\sin t = -1, \qquad t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Пример 1.

Вычислить:

$$a)\ \arcsin\frac{1}{2}$$

$$\textit{Пусть}\ \arcsin\frac{1}{2}=t.\ \textit{Тогда}\ \sin t=\frac{1}{2}\ \textit{и}\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

$$\textit{Значит},\ t=\frac{\pi}{6},\ \textit{поскольку}\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ \textit{и}\ \frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

Пример 1. **Вычислить:**

$$б)\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$Пусть\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=t. Тогда\ \sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ и\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

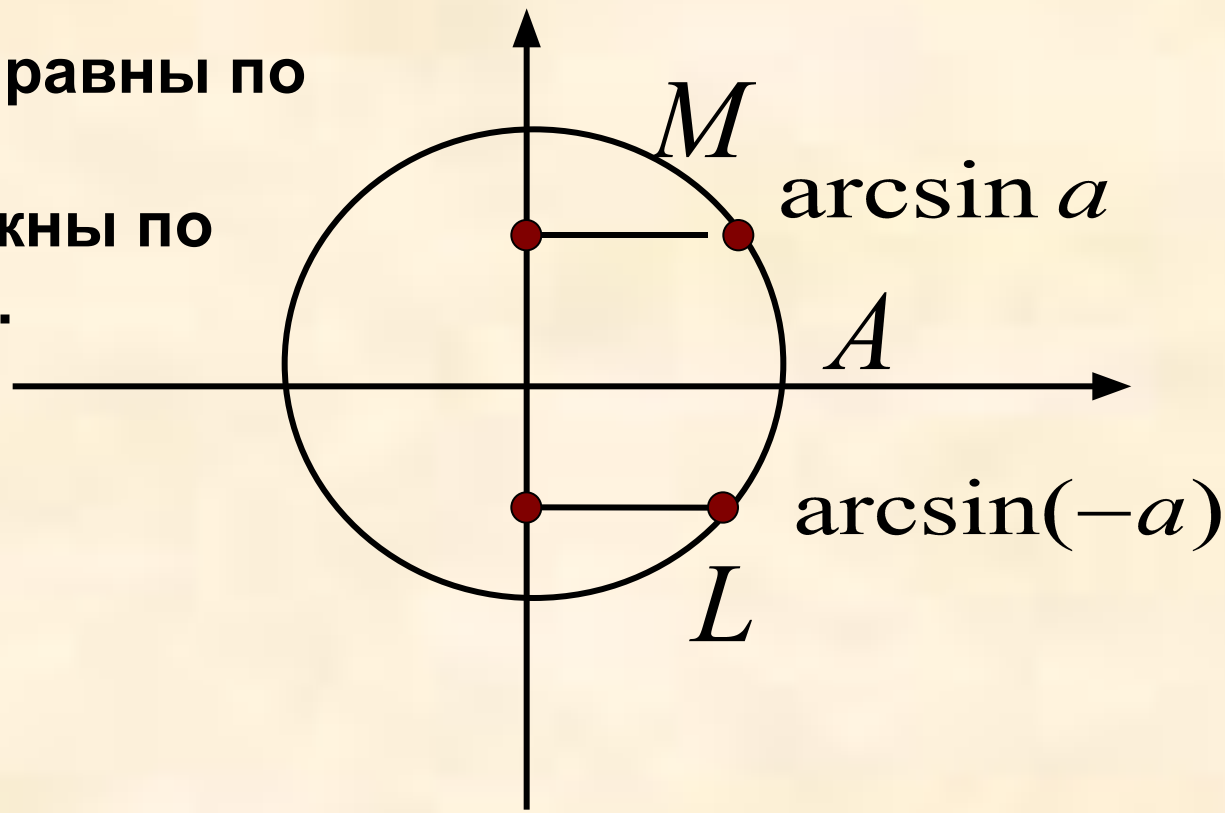
$$Значит,\ t=-\frac{\pi}{4}, поскольку\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ и\ -\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

Для любого $a \in [-1;1]$, *справедлива формула*

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

Дуги AM и AL равны по модулю и противоположны по направлению.



Пример 2. **Решить уравнение**

$$a)\ \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k,\ t = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k.$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

Пример 2. **Решить уравнение**

$$б)\ \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k,\ \ t = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$$

$$t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z,\ \ t = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

Пример 2. **Решить уравнение**

$$в)\ \sin t = \frac{7}{12}$$

$$t = \arcsin\frac{7}{12} + 2\pi k,\ t = \pi - \arcsin\frac{7}{12} + 2\pi k, k \in Z$$

$$г)\ \sin t = 1{,}2$$

Т.к. $1{,}2 > 1$, *то уравнение* $\sin t = 1{,}2$ *не имеет корней.*

Принята общая формула решения тригонометрического уравнения sin t = a

$$t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z,$$

$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z.$$

$$t = \arcsin a + \pi 2k, k \in Z,$$

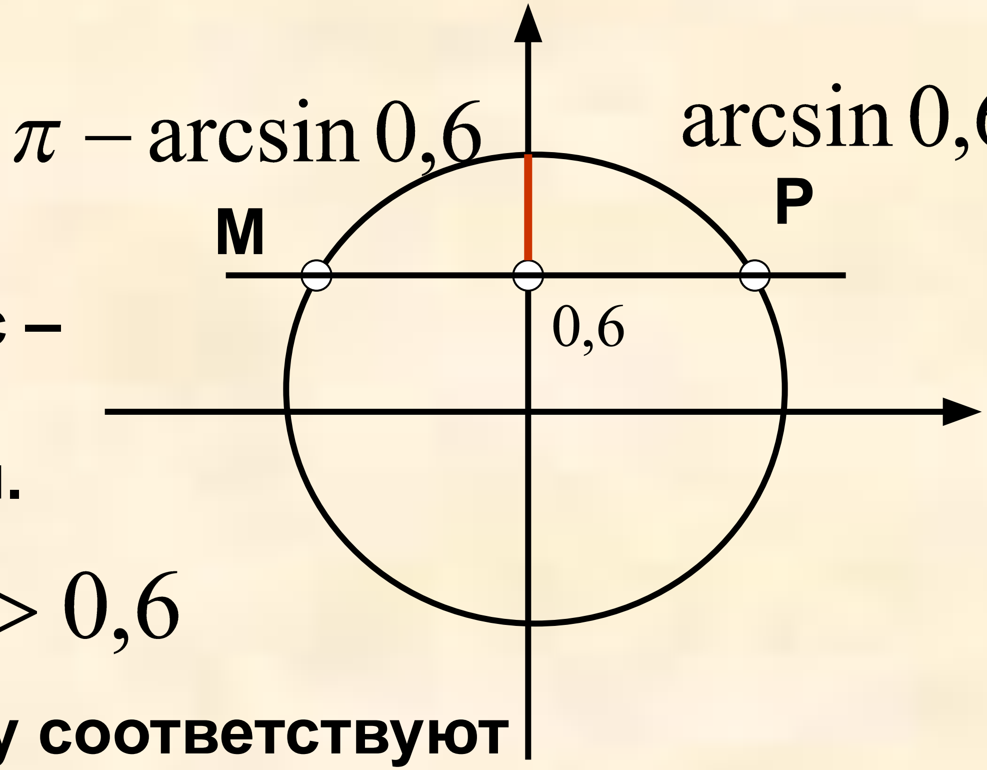
$$t = -\arcsin a + \pi(2k+1), k \in Z.$$

$$t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z,$$

Пример 3. **Решить неравенство**

$$\sin t > 0,6$$

Строим окружность



Учитываем, что синус – это ордината точки числовой окружности.

Следовательно $y > 0,6$

Данному неравенству соответствуют точки открытой дуги МР

Получим

$$\arcsin 0,6 + 2\pi k < t < \pi - \arcsin 0,6 + 2\pi k,\ k \in Z$$

Решите из учебника

- № 16.1, 16.3, 16.5, 16.9, 16.11

Задание на дом

- § 16 выучить
- № 16.2, 16.4, 16.6

Список используемых источников

- Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы. В 2ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень)/А.Г.Мордкович. – 11-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 399 с. : ил.