Логарифмическая функция

Содержание

завершить

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую необходимо возвести число a, чтобы получить число b.

$$a \in (0;1) \cup (1;+\infty) \qquad b \in (0;+\infty)$$

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Пример:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

В зависимости от значения основания приняты два обозначения

1. Если основанием является 10, то вместо $\log_{10} x$ пишут $\lg x$.
2. Для введения следующего определения стоит понимать что за число e.
   Число e есть предел, к которому стремится $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании n. Т.е

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281...$$

Вместо $\log_e x$ принято писать $\ln x$.

Из определения логарифма следует следующее тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

Можно выделить три формулы

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a a^c = c$$

Примеры:

$$3^{\log_3 5} = 5 \qquad \lg 1 = 0 \qquad \ln e = 1$$

Графики логарифмических функции

1. $y = \lg x$
2. $y = \ln x$
3. $y = \log_a x,\ a>1$
4. $y = \log_a x,\ 0<a<1$
5. Свойства функции.

содержание

График функции y=lg x

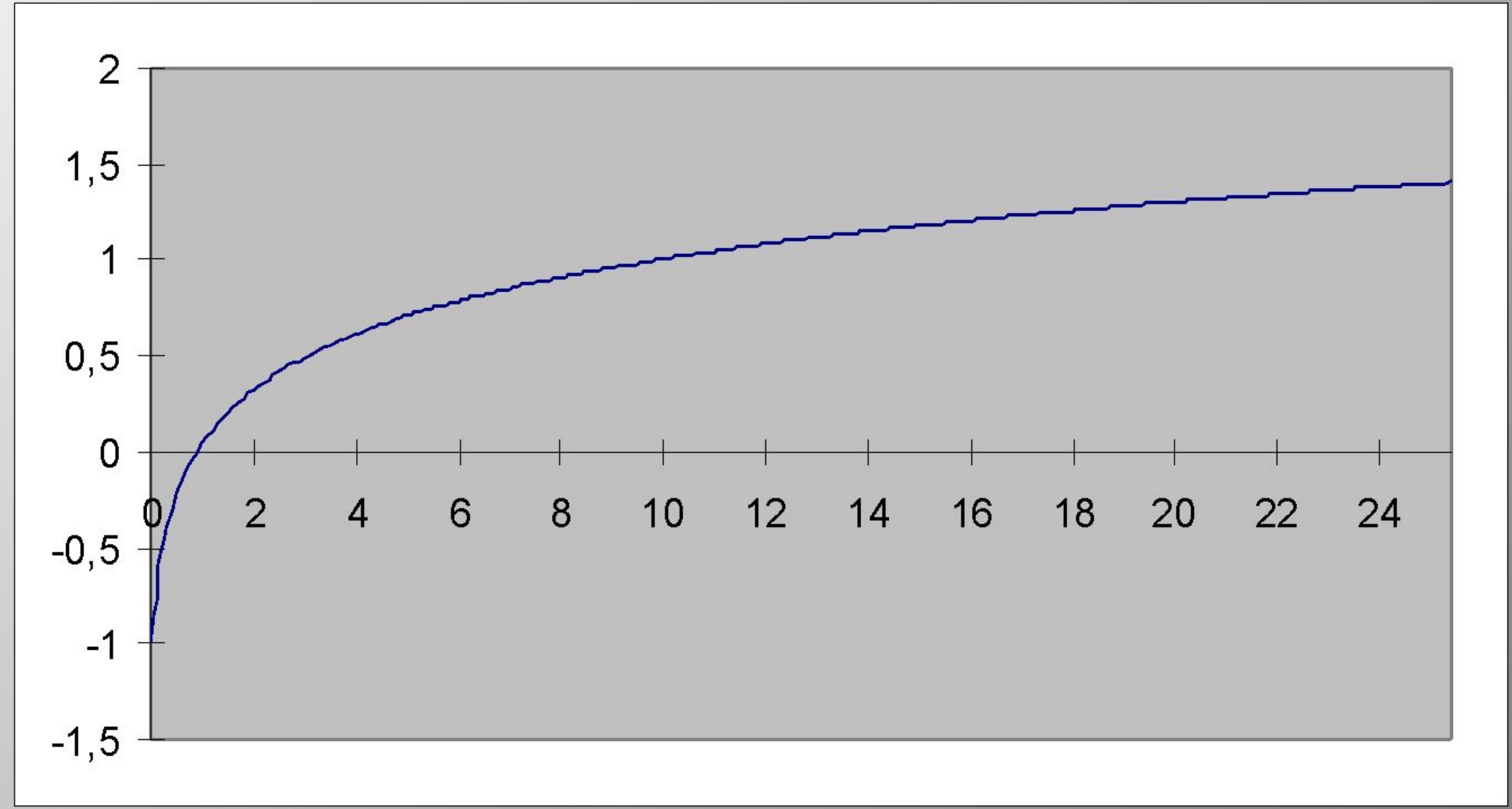


График функции y=ln x

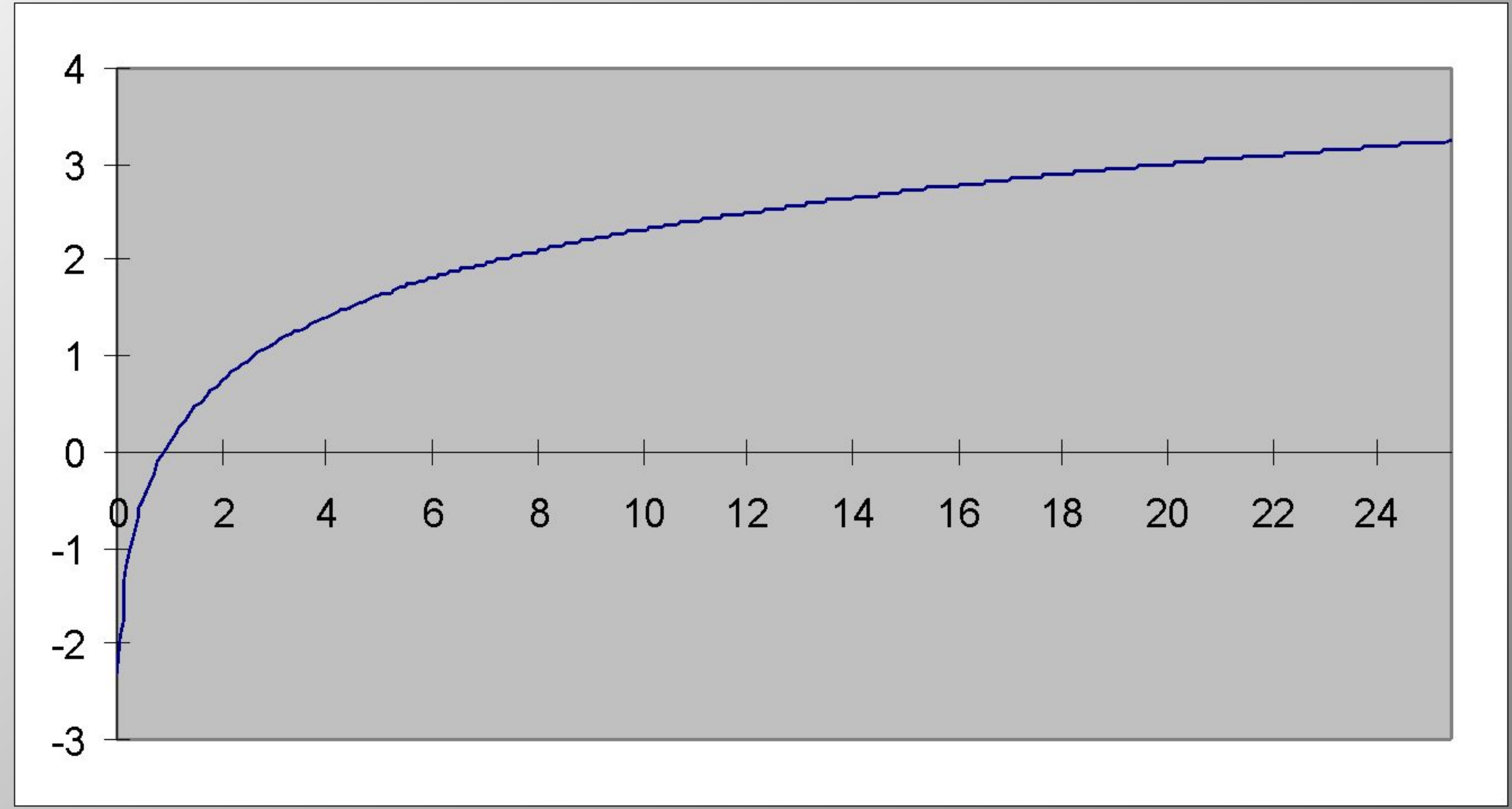


График функции $y=\log_a x$ $a>1$

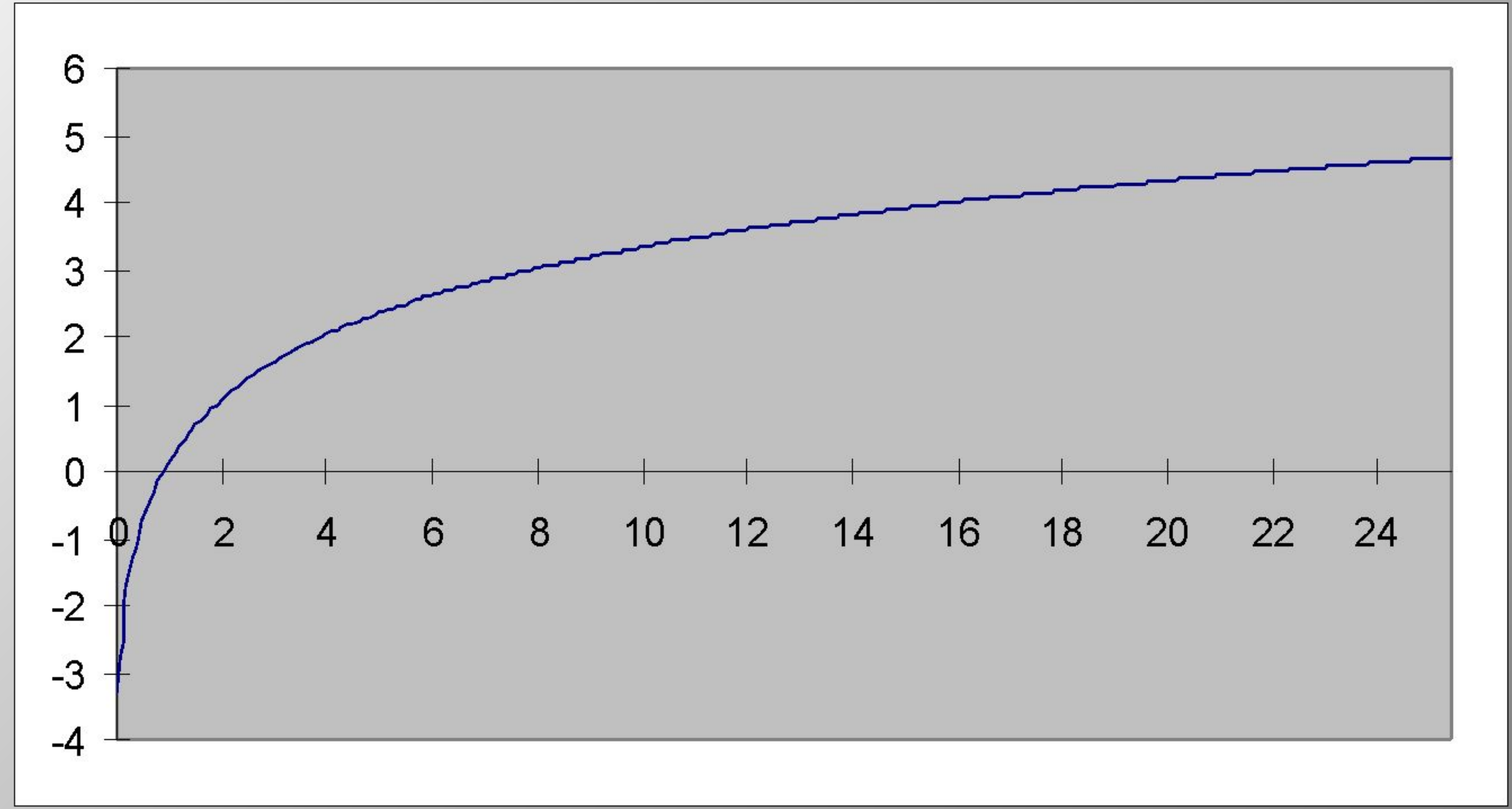
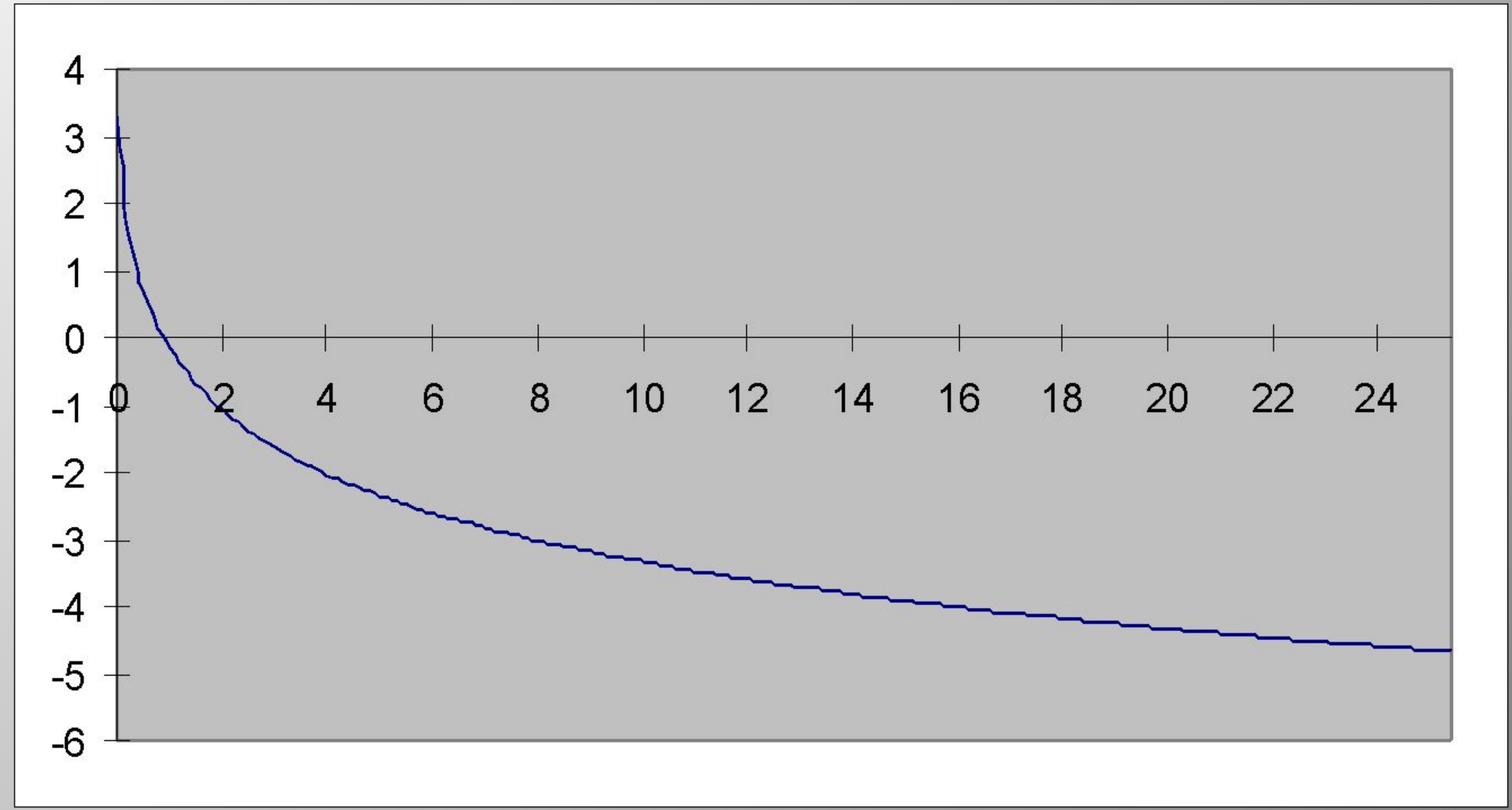


График функции $y=\log_a x$ $0<a<1$



Свойства $f(x)=\log_a x$

1. $D(f)=(0;+\infty)$;
2. Не является ни четной, ни нечетной;
3. При $a>1$ функция возрастающая, при $0<a<1$ функция убывающая;
4. Не ограничена;
5. Не имеет ни максимального, ни минимального значения;
6. Непрерывна;
7. $E(f)=(-\infty;+\infty)$;
8. Асимптота $x=0$;
9. Выпукла вверх при $a>1$, выпукла вниз при $0<a<1$

Стоит заметить, что график проходит через точки $(1;0)$ и $(a;1)$

Свойства логарифмов

1. Логарифм произведения.
2. Логарифм частного.
3. Логарифм степени.
4. Логарифм корня.
5. Переход от одного показателя к другому.
6. Свойства натуральных логарифмов.

содержание

1. Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей:

$$\log_x(ab) = \log_x a + \log_x b$$

2. Логарифм частного равен логарифмов делимого без логарифма делителя:

$$\log_x\left(\frac{a}{b}\right) = \log_x a - \log_x b$$

3. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания:

$$\log_x a^m = m \log_x a$$

4. Логарифм корня равен отношению логарифма подкоренного выражения и показателя корня:

$$\log_x \sqrt[m]{a} = \frac{\log_x a}{m}$$

5. Переход от одного основания к другому

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

Свойства натуральных логарифмов

Чтобы по известному десятичному логарифму числа x найти его натуральный логарифм, нужно разделить десятичный логарифм числа x на десятичный логарифм числа e:

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \approx \frac{\lg x}{0.43429} \approx 2.30259 \lg x$$

Чтобы по известному натуральному логарифму числа x найти его десятичный логарифм, нужно умножить натуральный логарифм числа x на десятичный логарифм числа e:

$$\lg x = \lg e \cdot \ln x \approx 0.43429 \ln x$$

Число lg e=0.43429 называется модулем десятичных логарифмов и обозначается через M.

Решения логарифмических уравнений

$$\log_x 5 = 2$$

$$x^2 = 5$$

$$\underline{x = \sqrt{5}}, т.к. \sqrt{5} > 0$$

$$Ответ: x = \sqrt{5}$$

$$\log_4 x = 0{,}5$$

$$x = 4^{0.5} = \sqrt{4} = 2$$

$$\underline{x = 2}$$

$$Ответ: x = 2$$

Решить уравнение:

$$\frac{2^x\left(2^x-4\right)}{1-2^x}=\frac{2^{x+1}-5}{1-2^x}$$

$$\textit{Пусть } m=2^x, \textit{причем } m\in(0;1)\cup(1;+\infty)$$

$$m(m-4)=2m-5$$

$$m^2-4m-2m+5=0$$

$$m^2-6m+5=0$$

$$a=1, k=\frac{b}{2}=-3, c=5$$

$$D_1=k^2-ac=4$$

$$m_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=3\pm2$$

$$m_1=1, \textit{но } m\neq1 \qquad \underline{m_2=5}$$

Значит, $2^x=5\Leftrightarrow x=\log_2 5$

$$\textit{Ответ}: x=\log_2 5.$$

Решение логарифмических неравенств

$$\log_{0.5} x > 0$$

$$\log_{0.5} x = 0$$

$$x = 1$$

$$\textit{Ответ}: x \in (0;1)$$

$$2^x > 3$$

$$2^x > 2^{\log_2 3}$$

$$x > \log_2 3$$

$$\textit{Ответ}: x \in \left(\log_2 3;+\infty\right).$$

Решите неравенство:

$$\left(10^{x}-2\right)^{2}\leq 3\cdot 10^{x}-2$$

$$Пусть\ t=10^{x},\ \ t\in\left(0,+\infty\right)$$

$$\left(t-2\right)^{2}\leq 3t-2$$

$$t^{2}-4t+4-3t+2\leq 0$$

$$t^{2}-7t+6\leq 0$$

$$\left(t-1\right)\left(t-6\right)\leq 0$$

$$1\leq t\leq 6$$

$$1\leq 10^{x}\leq 6$$

$$0\leq x\leq \lg 6 \qquad Ответ: x\in\left[0;\lg 6\right].$$

Над презентацией работали:

Киселев Михаил

Спасибо за внимание

Таячков Максим

Кирилов Дмитрий