

Вычисление площадей с помощью интегралов



Знаем:

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Функция

Первообразная

$$k \cdot f(x)$$

$$k \cdot F(x)$$

$$f_1(x) + f_2(x)$$

$$F_1(x) + F_2(x)$$

$$f(ax+b)$$

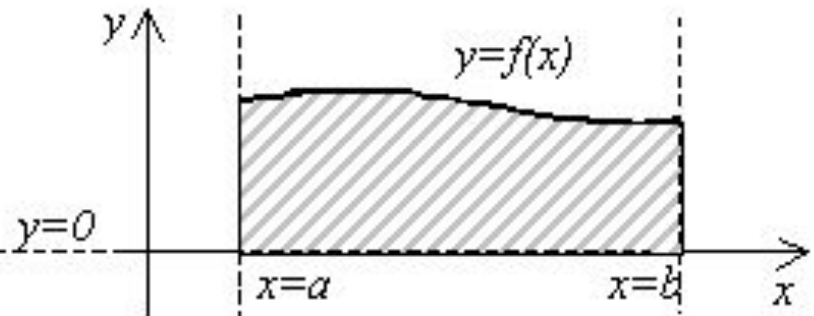
$$\frac{1}{a} F(ax+b)$$

Знаем:

1. Как вычислить интеграл $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

2. Что такое криволинейная трапеция

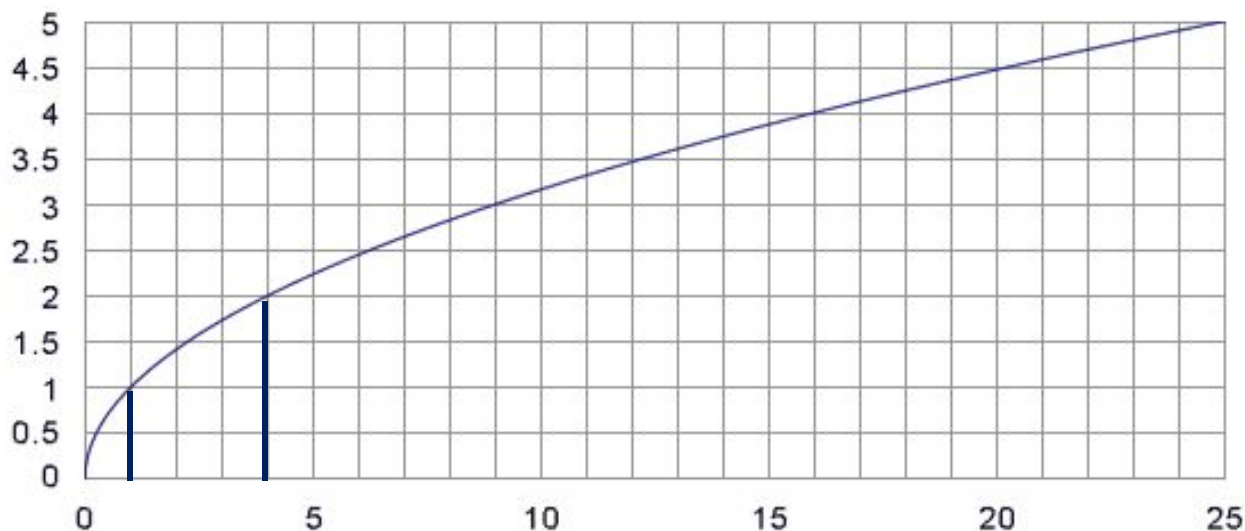
Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f , осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$.



3. Как связаны площадь криволинейной трапеции с интегралом

Найдите площадь фигуры,
ограниченной:

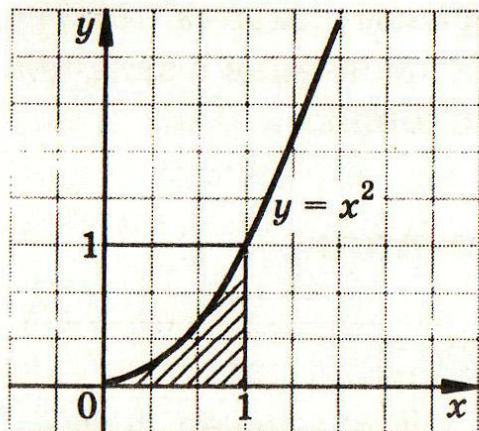
$$y = \sqrt{x}, \quad x=1, \quad x=4, \quad y=0$$



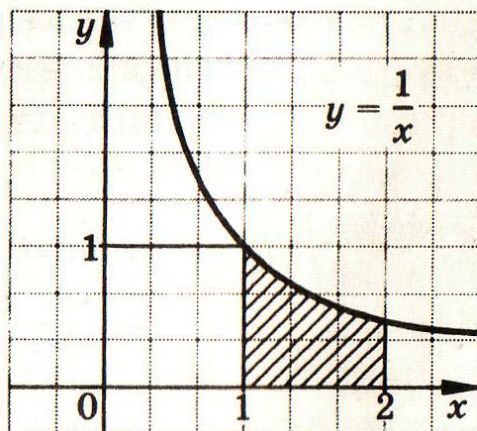
$$\int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} \Big|_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Найдите площадь фигуры:

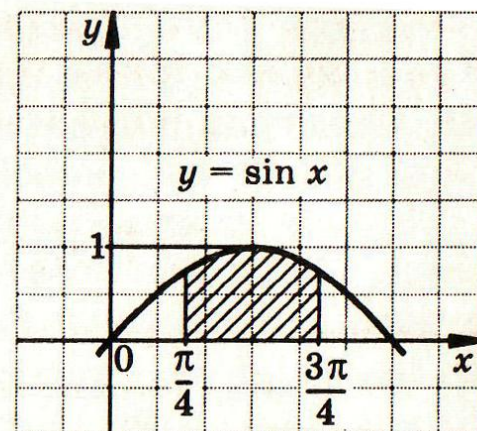
I В



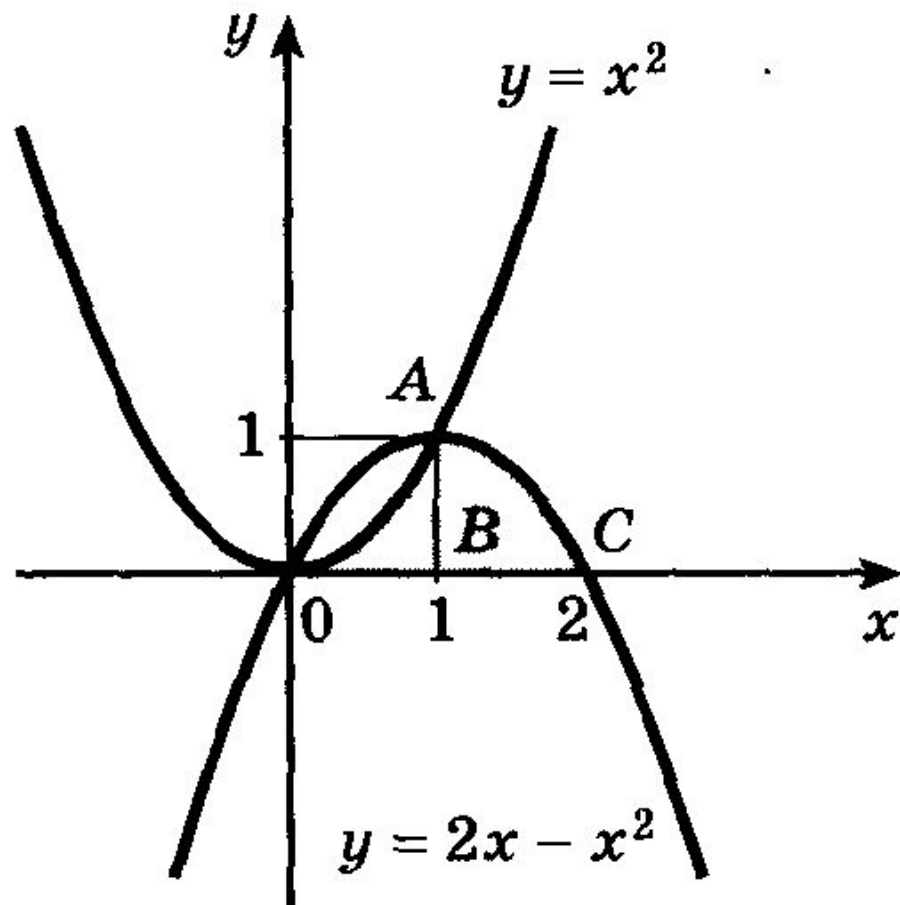
II В



III В

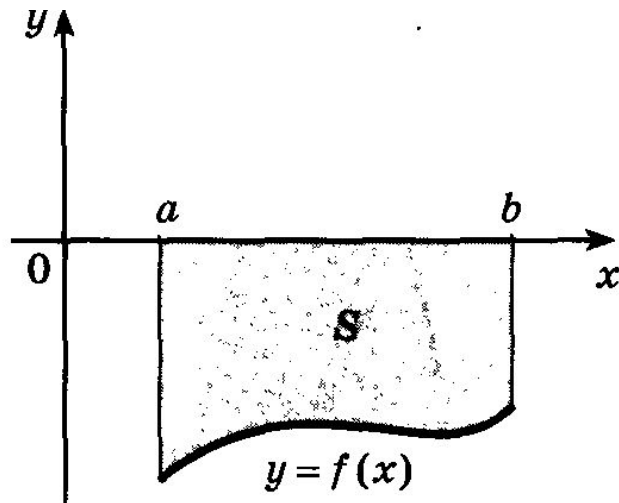


Задача 1:

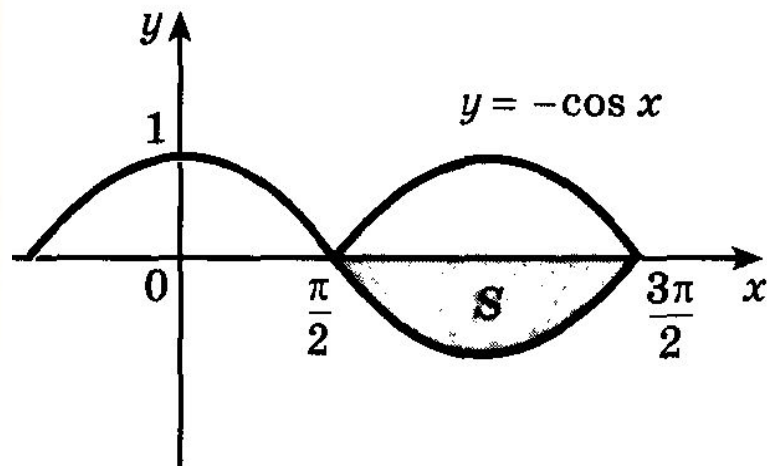


$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = 1.$$

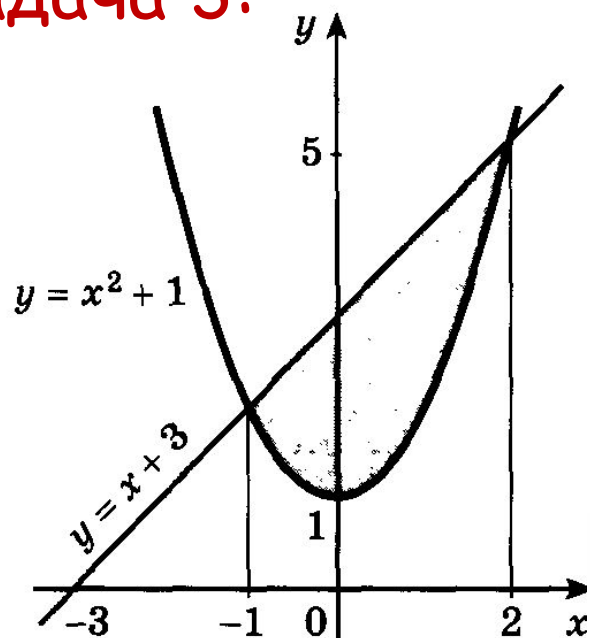
Задача 2:



$$S = \int_a^b (-f(x)) dx.$$



Задача 3:

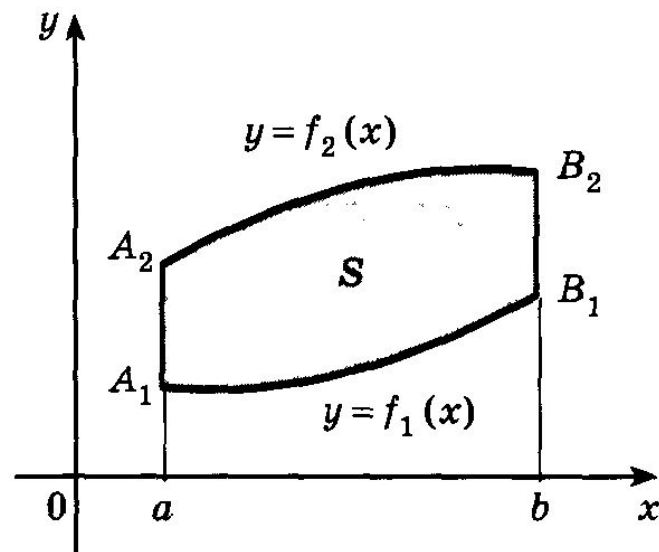


$$S_1 = \int_{-1}^2 (x + 3) dx,$$

$$S_2 = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx,$$

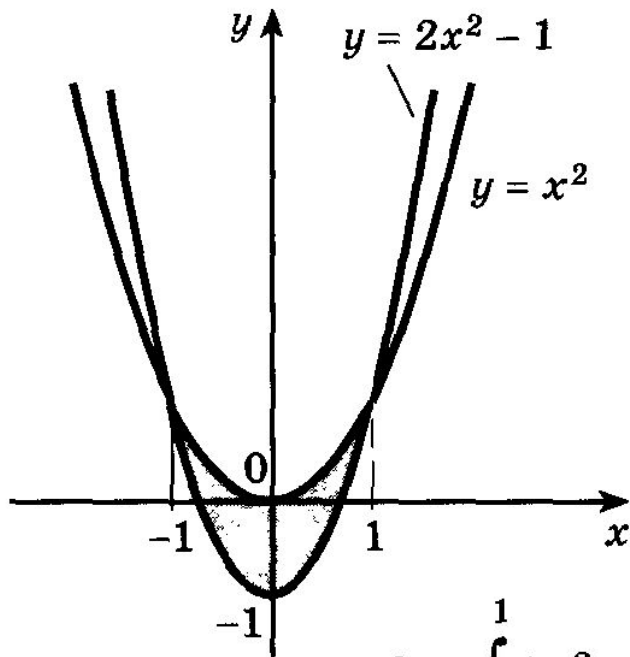
$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^2 (x + 3) dx - \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = 4,5.$$

Задача 3:



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Найти площадь S фигуры, ограниченной параболлами $y = x^2$ и $y = 2x^2 - 1$.



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (x^2 - (2x^2 - 1)) dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Домашнее задание:

№ 1014 (2;4)

№ 1015 (2)

