

# Методы решения экстремальных задач

# Актуальность темы

---

Решение экстремальных задач способствует углублению и обогащению математических знаний. Возникает необходимость знакомить учащихся с различными методами их решения, так как в 11 классе решаются задачи только с помощью дифференциального исчисления.

# Цель изучения занятий

---

формировать у школьников представление о том, что экстремальная задача — математическая модель процессов реальной действительности; формировать у учащихся умения решать оптимизационные задачи методами, характерными для данного класса задач.

# Диагностируемые цели:

---

В результате проведения занятий по теме ученик *знает*:

- Что называется экстремальной задачей;
- алгоритм решения экстремальных задач;
- основные методы решения экстремальных задач: метод опорных функций; метод, основанный на применении некоторых теорем.

# Планирование занятий

- *Тема 1.* «Использование свойств квадратичной функции при решении задач» (1 час) *Тема 2.* «Использование понятия синуса и косинуса угла при решении задач» (2 часа)
- *Тема 3.* «Решение экстремальных задач с применением некоторых теорем» (2 часа)
- *Тема 4.* «Решение прикладных задач» (1 час)
- *Тема 5.* «Решение древнейших задач с помощью производной» (1 час)
- *Тема 6.* Итоговое занятие (2 часа)

# Содержание занятий

## Занятие 1

*Цель:* Сформировать представление учащихся о понятии экстремальной задачи, об алгоритме её решения; Выделить свойства квадратичной функции, которые могут быть использованы при решении задач.

*Задача 1.* Зависимость между размером используемой площади полей и валовым доходом из расчета на 100 га угодий лесостепной зоны Львовской области выражена функцией  $y = 9 + 9x - 1,5x^2$  где  $x$  – площадь сельскохозяйственных угодий (в тыс. га),  $y$  – валовой доход на 100 га сельскохозяйственных угодий (в тыс. руб.). При какой площади хозяйство будет иметь наибольший доход?

## Занятия 2,3,4

*Цель:* Создать условия, при которых школьники установят, каким образом понятия синуса и косинуса угла могут быть использованы при решении задач.

Повторяются теоретические положения.

*Цель:* Закрепить изученный материал решением задач.

*Цель:* Рассмотреть применимость некоторых теорем при решении задач.

# Занятия 5, 6

---

*Цель:* Рассмотреть применимость некоторых теорем при решении экстремальных задач.

*Цель:* Рассмотреть методы решения прикладных экстремальных задач различными способами.

На занятиях решаются задачи на закрепление изученного материала по данной теме.



# Занятия 7,8,9

*Цель:* Рассмотреть применимость производной к решению древнейших задач. Задача Герона, задача Кеплера о вписанном цилиндре, задача Тартальи, задача Евклида о параллелограмме наибольшей площади, вписанном в треугольник. Перевод задач на математический язык, их решение основным методом.

*Цель:* Систематизировать и обобщить основные теоретические факты, полученные при изучении занятий.

*Цель:* Систематизировать и обобщить основные теоретические факты, получить обратную связь от учащихся .

# Конспект занятия

---

## **Занятие 1. «Экстремальные задачи. Использование свойств квадратичной функции при решении задач»**

**Цель:** создать условия, при которых школьники установят, какие свойства квадратичной функции могут быть использованы при решении задач.

# Диагностируемые цели:

---

В результате ученик *знает*:

- что называется экстремальной задачей;
- алгоритм решения экстремальных задач;
- один из методов решения задачи, а именно – использование свойств квадратичной функции.

# Диагностируемые цели:

---

В результате ученик *умеет*:

- находить наибольшее или наименьшее значение квадратичной функции (используя теорему о наибольшем (наименьшем) значении квадратичной функции)

# Методы обучения:

- по источнику передачи и характеру восприятия информации – словесные (эвристическая беседа), а также практические (поиск наибольшего или наименьшего значения квадратичной функции по готовым чертежам);
- по характеру познавательной деятельности учащихся – частично-поисковая;
- по степени управления учебной деятельностью – под руководством учителя через систему целесообразно подобранных задач и вопросов;
- метод мотивации – практическая необходимость;

# Ход занятия

---

На доске написана цитата:

«...особенную важность имеют те науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды»

П. Л. Чебышев (1821-1894)

*Учитель.* Так как квадратичная функция принимает своё наименьшее или наибольшее значение в вершине параболы, то для нахождения наименьшего или наибольшего значения достаточно найти координаты вершины.

- Из курса восьмого класса вам известно, что любую квадратичную функцию  $y=ax^2+bx+c$  с помощью выделения полного квадрата можно записать в виде  $y=ax^2+bx+c=a(x+b/2a)^2+(4ac-b^2)/4a$
- . Основные возможности квадратичной функции, в плане решения оптимизационных задач, связаны именно с таким её представлением:  $y=a(x-x_0)^2+y_0$
- Скажите, какие координаты имеет тогда вершина параболы?

# Ход занятия

- *Учитель* Далее, учитывая знак числа  $a$ , то есть направление ветвей параболы, можно без труда найти наименьшее или наибольшее значение квадратичной функции. Чему оно будет равно? Теперь сформулируем теорему о наибольшем (наименьшем) значении квадратичной функции. *Ученики (записывают в тетрадь)*. Теорема о наибольшем (наименьшем) значении квадратичной функции. Если  $a > 0$  ( $a < 0$ ), то функция  $y = ax^2 + bx + c$  при  $x = -b / 2a$  принимает наименьшее (наибольшее) значение, равное  $4ac - b^2 / 4a$ .



# Задача и ее решение

*Учитель.* Начнём работу с решения задачи 1.

Задача 1. Зависимость между размером используемой площади полей и валовым доходом из расчета на 100 га сельскохозяйственных угодий лесостепной зоны Львовской области выражена функцией  $y = 9 + 9x - 1,5x^2$ , где  $x$  – площадь сельскохозяйственных угодий (в тыс. га),  $y$  – валовой доход на 100 га сельскохозяйственных угодий (в млн. руб.). При какой площади хозяйство будет иметь наибольший доход? Каков будет этот доход?

*На доске и в тетрадях учеников появляются записи:*

*Задача 1. Функция  $y = 9 + 9x - 1,5x^2$  принимает наибольшее значение при  $x = -9/2(-1,5)$ ,  $x = 3$  (тыс. га.),  
 $y_{\text{наиб}} = 4(-1,5)9 - 9^2/4(-1,5)$ ,  $y = 22,5$  (млн. руб.).*

*Ответ: хозяйство будет иметь наибольший доход на 100 га сельск. угодий, равный приблизительно 22,5 млн. руб., при площади 3 тыс. га.*

# Схема решения задач

- *Учитель* любая экстремальная задача может быть решена по следующей схеме, состоящей из пяти этапов.
- Проанализировав условие задачи, определяют, наибольшее или наименьшее значение какой величины следует найти (часто говорят: какую величину следует оптимизировать?).
- Одну из неизвестных величин принимают за независимую переменную и обозначают её буквой  $x$  .  
Определяют границы изменения  $x$ .

- Исходя из условия задачи величину, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти, выражают через  $x$  и известные величины (чаще всего зависимость выражается с помощью функции  $y=f(x)$ ).
- Находят средствами математики наибольшее или наименьшее значение на промежутке изменения  $x$ .
- Интерпретируют результат для рассматриваемой задачи. Записывают ответ.

# Задача №2

Задача 2. На плоскости даны три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащие на одной прямой. Из точки  $A$  на  $BC$  опущен перпендикуляр  $AD$ , при чём  $AD=a$ ,  $BD=v$ , и  $CD=c$ . На отрезке  $BD$  отмечена точка  $M$  так, чтобы значение суммы квадратов расстояний от  $M$  до  $A, B$  и  $C$  было наименьшим. Найти это значение.

*Решение. 1 этап. Оптимизируемая величина:  $AM^2 + BM^2 + CM^2$ .*

*2 этап. Независимая переменная:  $MD=x$ ,  $0 < x < v$ ,*

*3 этап. 1)  $\triangle ADM$ - прямоугольный,*

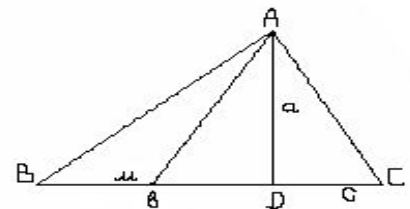
*поэтому по теореме Пифагора*

$$AM^2 = MD^2 + AD^2 = x^2 + a^2 ; 2) BM = (v-x)^2 ;$$

$$3) CM = (c+x)^2 ; 4) y = 3x^2 + 2(c-v)x + a^2 + v^2 + c^2$$

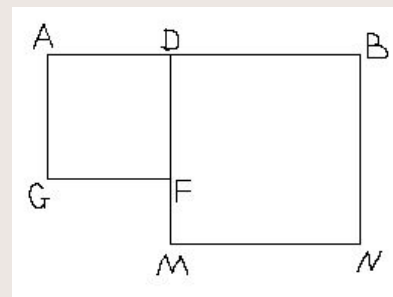
*4 этап.  $y_{\text{наим}} = a^2 + 2/3(v^2 + vc + c^2)$  5 этап.*

*Ответ: наим. значение суммы квадратов расстояний  $a^2 + 2/3(v^2 + vc + c^2)$  равно .*



# Задача №3

Задача 3. Отрезок длиной  $a$  разделить на две части так, чтобы сумма площадей квадратов, построенных на его частях, была наименьшей. *Учитель.* Какую величину следует оптимизировать? Чему равна площадь квадрата  $ADFG$ ?  $DBNM$ ? Какой вид примет оптимизируемая величина?



Подумайте, какую из величин следует принять за независимую переменную? Теперь определите границы изменения  $x$ . Выразим оптимизируемую величину через  $x$ . Найдём наименьшее значение функции и интерпретируем результат задачи.

*Ответ: следует разделить отрезок пополам.*

# Решение задачи

*На доске и в тетрадях учеников появляются следующие записи:*

*Задача 3. 1 этап. Оптимизируемая величина:*

$$S_{ADFG} + S_{DBNM}$$

*2 этап. Независимая переменная:  $AD=x$ ,  $0 < x < a$ ,*

*3 этап.  $S_{ADFG} + S_{DBNM} = AD^2 + DB^2 = x^2 + (a-x)^2 =$*   
 $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2,$

*4 этап.  $y(x) = 2x^2 - 2ax + a^2$   $x = a|2.$*

*5 этап. Ответ: следует разделить отрезок пополам.*

# Домашнее задание

Сегодня на уроке вы узнали много нового. Дома вы решите задачу 4, используя рассмотренную на уроке схему.

Задача 4. На учебном полигоне произведён выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении неразрывающимся снарядом. Требуется определить наибольшую высоту подъёма снаряда, если начальная скорость снаряда  $V_0 = 300 \text{ м/с}$ .

Ускорение земного притяжения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ , а сопротивлением воздуха пренебречь.

# Литература

- Смирнова И., Смирнов В. Экстремальные задачи по геометрии. — М.: Чистые пруды, 2007. — 32 с.: ил.
- Алгебра: Учеб. для 10 – 11 кл. общеобразоват. Учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. — М.: Просвещение, 2002. — 384 с.: ил.
- Алгебра: Учеб. для 8 кл. сред. шк. / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. — М.: Просвещение, 1991. — 239 с.: ил.
- Алгебра: Учеб. для 9 кл. сред. шк. / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. — М.: Просвещение, 1991. — 239 с.: ил.
- Виленкин Н.Я. Алгебра для 9 кл. с угл. изуч. математики. М.: «Посвещение». - 2005 год.



# Литература

- Нагибин Ф. Ф. Экстремумы. – М.: Просвещение, 1966. – 119с.
- Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: Методическое пособие для учителя. – М.: Мнемозина, 2000. – 144с.: ил.
- Зильберберг Н. И. Алгебра и начала анализа. Для углубленного изучения в 10 классе. – Псков, 1994.
- Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции// Математика.- 2007.- №7.- С.2-7
- Решение прикладных задач по теме «Наибольшее и наименьшее значения функции»// Математика.- 2007.- №7.- С.11
- Итоговое повторение по теме «Наибольшее и наименьшее значения функции»// Математика.- 2007.- №7.- С.8-10
- Теоретические основы обучения математике в средней школе: Учебное пособие/ Т.А Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова; Под ред. Проф. Т.А. Ивановой.- Н. Новгород: НГПУ,2003, 320с