УЧИМСЯ ГОТОВИТЬ ДЕТЕЙ К ЕГЭ

Учитель математики ГБОУ СОШ №1358 г. Москвы
Епифанова Татьяна Николаевна

Задача из II блока «Уравнения и неравенства»

Найдите значение выражения $2^x - y$, если $(x; y)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2 \\ 2^{x+1} - 3y = 43. \end{cases}$

Пусть $2^x = t$ $(t>0)$

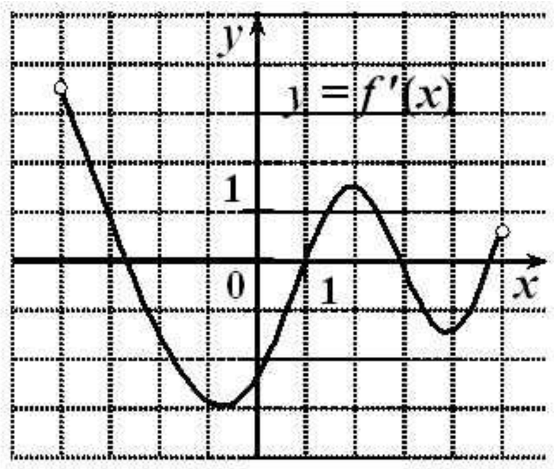
$$\begin{cases} 7t + 6y = 2, \\ 2t - 3y = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7t + 6y = 2, \\ 4t - 6y = 86 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11t = 88, \\ 2t - 3y = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8, \\ y = -9 \end{cases}$$

$2^x - y = 8 - (-9) = 17$

Ответ: 17.

Задача из III блока «Функции»

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (-4;5). На рисунке изображен график ее производной. Найти число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в 45° к положительному направлению оси абсцисс.



Ключевым моментом в этой задаче является применение геометрического смысла производной: $f'(x_0) = tg\,45^\circ$, то есть $f'(x_0) = 1$.

Число касательных равно количеству точек пересечения прямой **y=1** с графиком производной функции $y = f'(x)$.

Следовательно, число касательных равно **3**.

Список вопросов к задачам уровня В8

1. Найти точку ***a***, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение (наименьшее значение).
2. Укажите число точек экстремума (максимума, минимума) функции $y = f(x)$ на этом промежутке.
3. Найти длину промежутка убывания (возрастания).
4. Найти количество промежутков убывания (возрастания).
5. Укажите количество точек графика этой функции, в которых касательная параллельна оси **Ox**.
6. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в его точке с абсциссой $\mathbf{x_0 = 6}$.
7. Найти сумму абсцисс точек экстремума функции $f(x)$.

Задача из I блока
«Выражения, преобразования и вычисления»

Найдите значение выражения $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ при $x=1,2007$.

Три ключевых момента решения:

1. Выделение полного квадрата.
2. Применение теоремы об извлечении квадратного корня из степени с чётным показателем.
3. Правило раскрытия модуля.

$$\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\sqrt{x-1}+1$$

$$\left|\sqrt{0,2007}-1\right|+\sqrt{0,2007}+1=1-\sqrt{0,2007}+\sqrt{0,2007}+1=2$$

Задача из II блока «Уравнения и неравенства»

Найдите наименьший корень уравнения $\log_3(x+1)^2+\log_3|x+1|=6$.

Ключевой момент при решении этого уравнения состоит в применении формулы вида

$$\log_a f^2(x)=2\log_a|f(x)|.$$

$$3\log_3|x+1|=6 \Leftrightarrow |x+1|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-10 \end{array}\right..$$

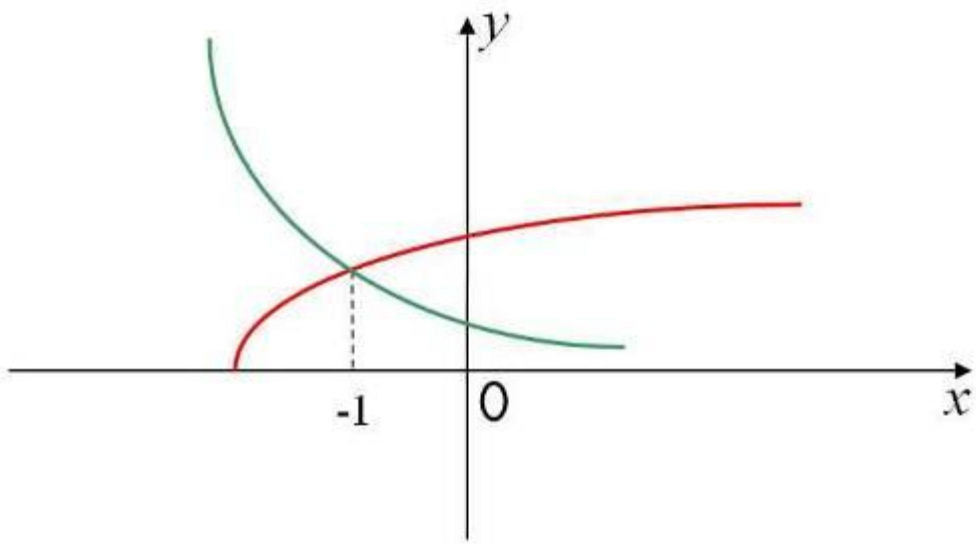
Ответ: наименьший корень уравнения равен -10.

Задача из II блока «Уравнения и неравенства» КИМ

Решите уравнение $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x+1} = \sqrt{2+x}$

Рассмотрим 2 функции $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x+1}$ и $y = \sqrt{2+x}$ на общей области определения $[-2;+\infty)$.

Одна из них убывает, другая возрастает на $[-2;+\infty)$.



Поэтому, уравнение не может иметь более одного корня.
Легко угадать корень **-1.**

Задача из III блока «Функции»

Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 2 и $f(1) = 5$. Найдите значение выражения $3f(7) - 4f(-3)$.

Два ключевых момента решения:

1. Определение периодической функции и её периода.
2. Знание того, что всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов, то есть если T – период функции, то Tk – также период этой функции, где k – целое число и $k \neq 0$.

В нашей задаче ученик делает соответствующие записи:

$$f(7) = f(1 + 2 \cdot 3) = f(1) = 5,$$

$$f(-3) = f(1 - 2 \cdot 2) = f(1) = 5.$$

И находит значение выражения $3f(7) - 4f(-3) = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 5 = -5$.

Задачи из IV блока «Числа и вычисления»

Текстовые задачи уровня В: на движение, работу и производительность труда, процентное содержание и концентрацию, смеси и сплавы, экономические задачи, в которых идет речь о вкладах в банк с тем или иным % часто на применение формулы сложного процентного роста

$$S_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n S.$$

Задача из IV блока «Числа и вычисления»

Денежный вклад в банк за год увеличивается на 11 %. Вкладчик внес в банк 7000 рублей. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10000 рублей. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11 %) реализовать этот план? (Ответ округлите до целых.)

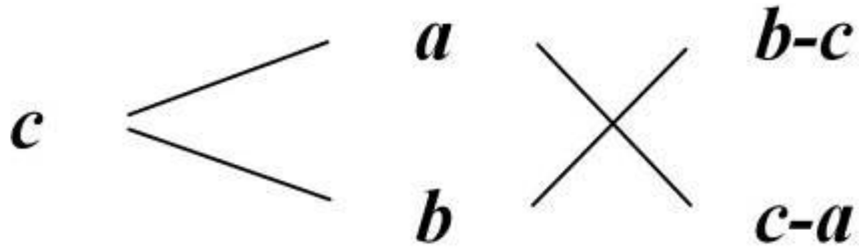
Решение.

$S_1 = 1{,}11 \cdot 7000 = 7770$ (рублей) – сумма вклада в конце первого года.

Пусть в конце первого года общая сумма вклада увеличена на x рублей, т. е. стала равной $(7770 + x)$ рублей.

Зная, что в конце второго года на счету не менее 10000 рублей, составим уравнение $10000 = (7770 + x) \cdot 1{,}11$; $x \approx 1239$ рублей.

Задачи из IV блока «Числа и вычисления» (использование диагональной схемы)



В этой схеме ***a*** и ***b*** – концентрация исходных растворов, **с** – требуемая концентрация кислоты в %, а «крест-накрест» записаны их разности.
Для обоснования этой схемы решим задачу.

В каких пропорциях нужно смешать растворы a-процентной и b-процентной кислоты ($a<b$), чтобы получить c-процентный раствор?

Решение. Возьмём x граммов a-процентной и y граммов b-процентной кислоты. Составим таблицу:

	Количество раствора (г)	Чистой кислоты (г)
a%-ный р-р	x	$0{,}01ax$
b%-ный р-р	y	$0{,}01by$
Смесь (c%-ный р-р)	$x+y$	$0{,}01c(x+y)$

Составим и решим уравнение: $0{,}01ax+0{,}01by=0{,}01c(x+y) \Leftrightarrow (b-c)y=(c-a)x \Leftrightarrow \underline{x:y=(b-c):(c-a)}.$

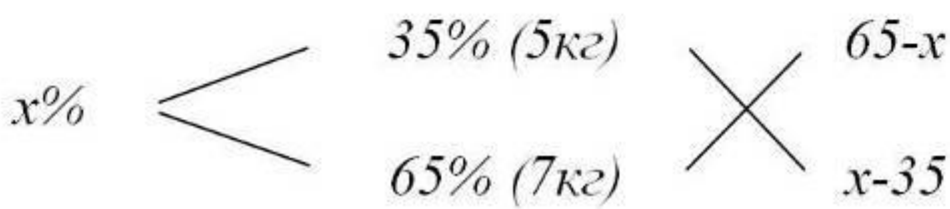
Задача из IV блока «Числа и вычисления»

5кг 35% раствора кислоты смешали с 7 кг 65% раствора кислоты. Определите концентрацию полученного раствора кислоты.

Стандартное решение.

1) $5 \cdot 0{,}35 = 1{,}75$(кг) - количество кислоты в I растворе,
2) $7 \cdot 0{,}65 = 4{,}55$(кг) - количество кислоты в II растворе,
3) $1{,}75 + 4{,}55 = 6{,}3$(кг) - всего кислоты,
4) $\frac{6{,}3}{12} \cdot 100\% = 52{,}5\%$ - полученная концентрация.

Решение с использованием диагональной схемы.



Задача из IV блока «Числа и вычисления»

После проведения санитарной обработки на базе отдыха, количество мух уменьшилось на 9%, а количество комаров на 4%. В целом насекомых уменьшилось на 5%. Сколько % от общего числа насекомых составляют комары?

Стандартное решение.

Пусть первоначально было x мух и y комаров. Тогда

1) количество мух уменьшилось на 0,09x;

2) количество комаров уменьшилось на 0,04y;

Так как количество насекомых уменьшилось на 5%, составим уравнение:

$$\frac{0{,}09x + 0{,}04y}{x + y} = 0{,}05$$

$y = 4x$, т.е. $x:y = 1:4$.

Значит, комары составили $\frac{4}{5}$ или 80% от общего числа насекомых.

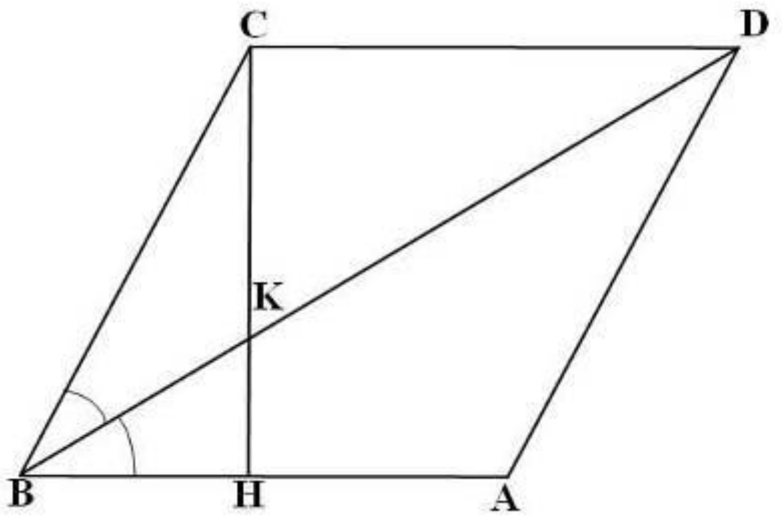
Решение с использованием диагональной схемы.

$$\begin{array}{cccc} & 9\%\ (x_{мух}) & & 5\text{-}4=1 \\ 5\% & & \times & \\ & 4\%\ (y_{комаров}) & & 9\text{-}5=4 \end{array}$$

$x:y=1:4.$

Задачи из V блока
«Геометрические фигуры и их свойства» (планиметрия)

Дан ромб ABCD с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.



1) Сторону ромба можно найти, зная площадь S.
2) Высоту CH можно найти двумя способами
   -либо используя формулу площади $S = a \cdot CH$
   -либо используя определение синуса из ΔBCH : $\sin \angle B = \dfrac{CH}{a}$.
3) Длину отрезка BH легко найти из ΔBCH по теореме Пифагора.
4) В ромбе диагональ BD является биссектрисой. А следовательно, отрезок BK – биссектриса в ΔBCH.
5) Искомый отрезок CK находится из пропорции, полученной по свойству биссектрисы в ΔBCH.

Ключевой момент – распознание биссектрисы в ΔBCH.

Задачи из V блока
«Геометрические фигуры и их свойства» (планиметрия)

1) $a^2 \cdot 0{,}8 = 320; \quad a = 20;$

2) $S = a \cdot CH; \quad 320 = 20 \cdot CH; \quad CH = 16;$

3) $BH = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12;$

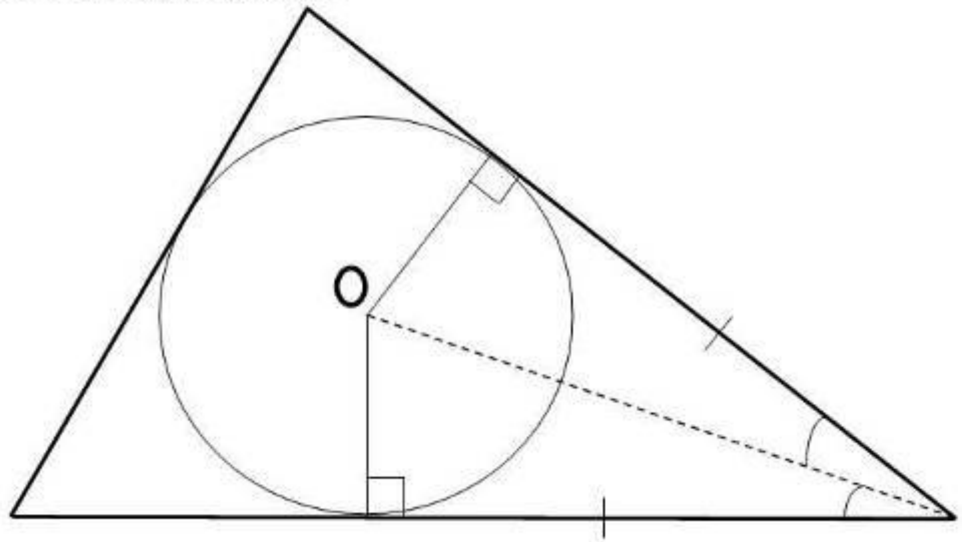
4) $\dfrac{BH}{CB} = \dfrac{HK}{CK}$. Пусть $CK=x$, тогда $KH=16$-x

и $\dfrac{12}{20} = \dfrac{16-x}{x} \Leftrightarrow 12x = 320 - 20x \Leftrightarrow 32x = 320 \Leftrightarrow x = 10.$

Ответ: 10.

Задачи из V блока
«Геометрические фигуры и их свойства» (планиметрия)

Задачи, связанные с окружностью, вписанной в треугольник. В этих конфигурациях существенным моментом является то, что окружность, вписанная в треугольник, касается всех его сторон. Отсюда, опираясь на свойство касательных, можно получить 3 важнейших для решения многих задач факта:



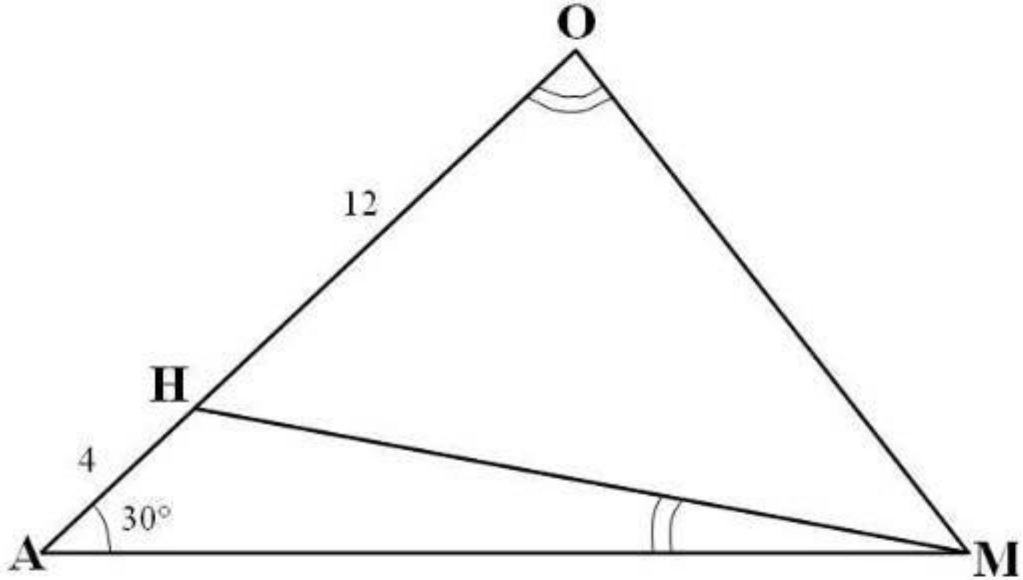
1) Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
2) Отрезки касательных, проведенных из общей вершины треугольника, равны.
3) Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла.
Эти 3 факта являются **ключевыми моментами** для решения многих задач из этого блока.

Задачи из V блока
«Геометрические фигуры и их свойства» (планиметрия)

Наибольшую трудность вызывают задачи на подобие треугольников. Основная сложность при решении задач по геометрии – это умение увидеть знакомые свойства фигур в непривычном их расположении.

Задача. Точка *H* лежит на стороне треугольника *AOM*. *AH*=4, *OH*=12, $\angle A = 30°$, $\angle AMH = \angle AOM$. Найти площадь треугольника *AHM*.

Ключевым моментом является распознание подобных треугольников и составление соответствующей пропорции.

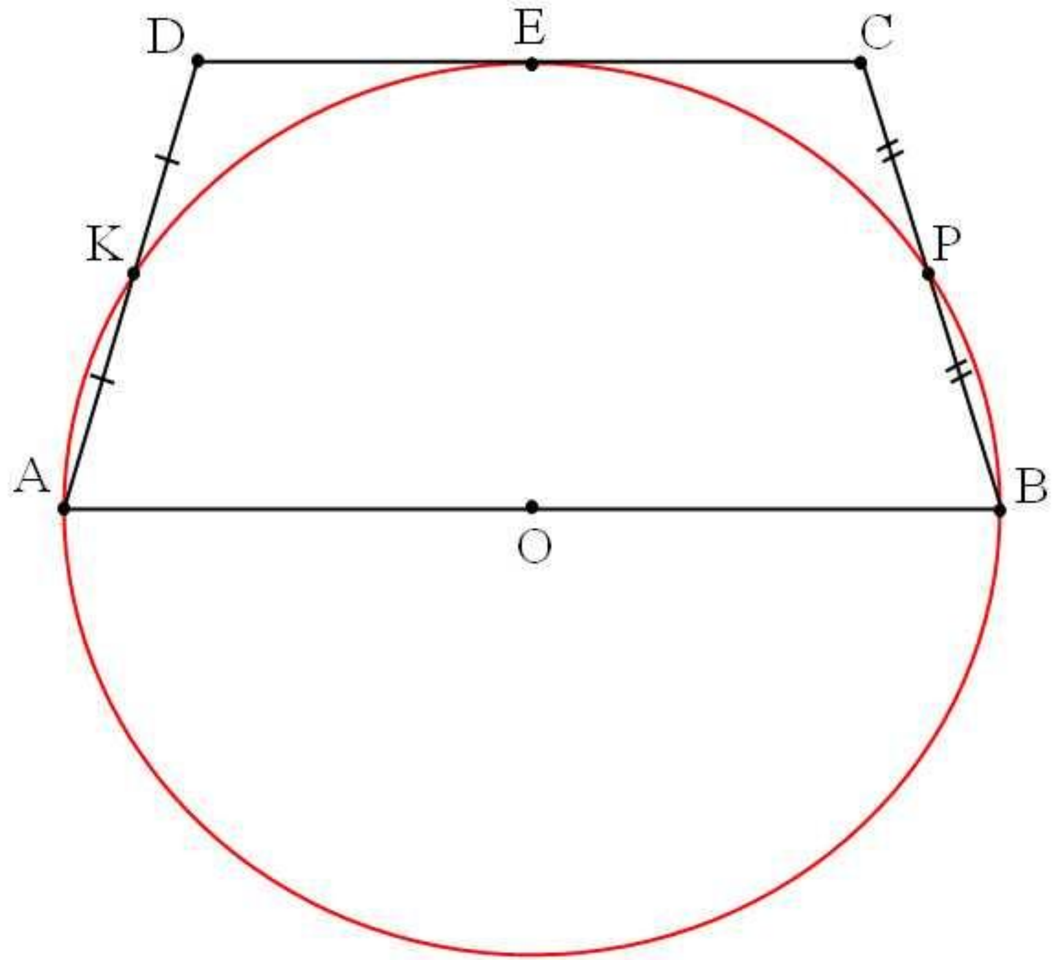


Заметив, что ΔAOM подобен ΔAMH, ученик делает записи

$$\frac{AO}{AM} = \frac{AM}{AH}; \quad AM^2 = 64; \quad S_{\Delta AHM} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16.$$

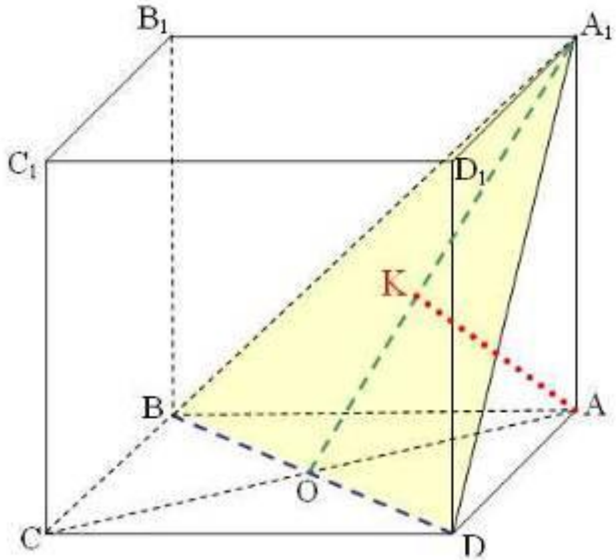
Задачи из V блока
«Геометрические фигуры и их свойства» (планиметрия)

Окружность, построенная на большем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается меньшего основания. Найдите углы трапеции.



Задачи из V блока
«Геометрические фигуры и их свойства» (стереометрия)

Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 8, а сторона основания равна $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BD.



$BD \perp (AOA_1) \Rightarrow BD \perp AK$.
Так как $AK \perp BD$ и $AK \perp A_1O$, то $AK \perp (A_1BD)$.
Далее не сложная цепочка вычислений:

1) Находим диагональ квадрата: $AC = \sqrt{72+72} = 12$.
2) Из треугольника AOA_1: $A_1O = \sqrt{36+64} = 10$.
3) $\left.\begin{aligned} S_{\Delta AOA_1} &= \frac{8\cdot 6}{2} \\ S_{\Delta AOA_1} &= \frac{10\cdot AK}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AK = 4{,}8$

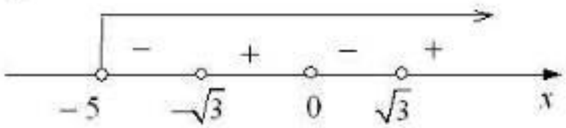
Задача из III блока «Функции»

Найдите значение функции $f(x)=10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}-\log_{0,1}(x+5)}$ в точке максимума.

Решение:

1. Найдем область определения функции f:

$$\begin{cases}\dfrac{x^3-3x}{x+5}>0\\ x+5>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0\\ x+5>0\end{cases}.$$



$x\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};\infty)$

Упростим формулу, задающую функцию:

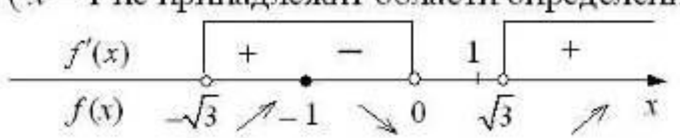
$$f(x)=10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}+\lg(x+5)}=10^{\lg(x^3-3x)}=x^3-3x\ .$$

2. $f(x)=x^3-3x,\quad x\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};\infty)$.

$f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=3(x^2-1)$.

$f'(x)=0$ при $x=-1$

($x=1$ не принадлежит области определения функции f).



$x=-1$ - точка максимума и $f(-1)=2$

Ответ: 2.

Задача из II блока «Уравнения и неравенства»

Решите уравнение $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x$

<u>Решение</u>:

1) $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

2) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;

$\sin x = 1$ **или** $\sin x = 0{,}5$.

а) $\sin x = 1$, **тогда** $\cos x = 0$, **значит,** $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ **не являются решениями исходного уравнения.**

б) $\sin x = 0{,}5$, **тогда** $\cos x \neq 0$ **и** $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.