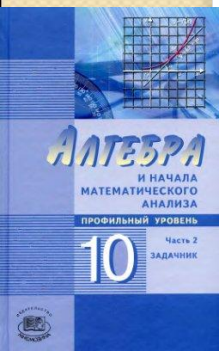
Методы решения иррациональных уравнений

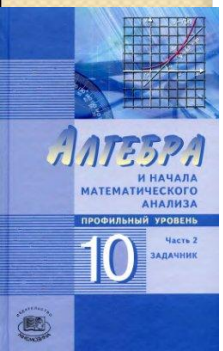
Автор: Макарова Татьяна Павловна, учитель математики высшей категории ГБОУ СОШ №618 г. Москвы



Контингент: 10 класс физико-математического профиля.

Цель урока:

- Обобщение и систематизация способов решения иррациональных уравнений.
- Решение более сложных типов иррациональных уравнений .
- Развивать умение обобщать, правильно отбирать способы решения иррациональных уравнений.
- Развивать самостоятельность, воспитывать грамотность речи.



Устная работа

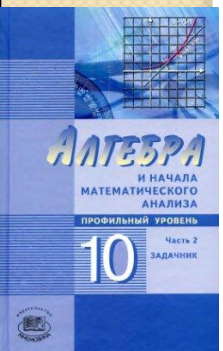
- Можно ли, не решая уравнений, сделать вывод о неразрешимости предложенных уравнений:

$$\sqrt{7-x}=-8+x;$$

$$\sqrt{x-3}=-\sqrt{x^2-1}$$

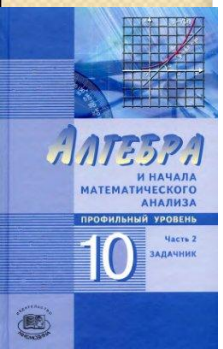
$$\sqrt{3-x}=5-\sqrt{x-9}$$

$$\sqrt{5x+7}+\sqrt{3-4x-x^2}+2=0$$



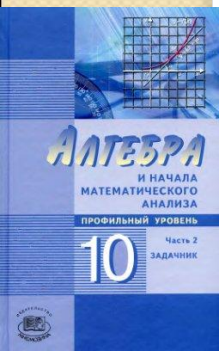
Методы решения иррациональных уравнений

- ***Введение новой переменной***
- ***Исследование ОДЗ***
- ***Умножение обеих частей уравнения на сопряженный множитель.***
- ***Сведение уравнения к системе рациональных уравнений с помощью введения переменной.***
- ***Выделение полного квадрата***



Методы решения иррациональных уравнений

- ***Использование ограниченности выражений, входящих в уравнение***
- ***Использование свойств монотонности функций***
- ***Использование векторов***
- ***Функционально - графический метод***
- ***Метод равносильных преобразований***
- ***Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень***



Введение новой переменной

- Решить уравнение.

$$x^2+3x-18+4\cdot\sqrt{x^2+3x-6}=0$$

Решение

Пусть $x^2+3x-6=t$, t – неотрицательное число,

тогда имеем $t-12+4\sqrt{t}=0.$

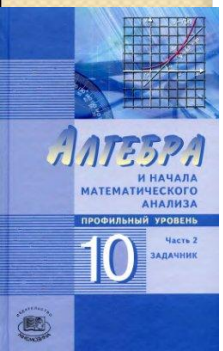
Отсюда, $t_1=4$, $t_2=36$.

Проверкой убеждаемся, что t=36 – посторонний корень.

Выполняем обратную подстановку

$x^2+3x-6=4$

Отсюда, $x_1=-5$, $x_2=2$.



Исследование ОДЗ

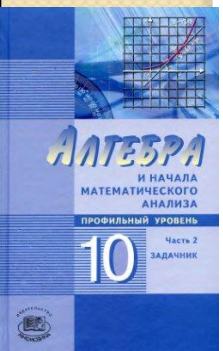
- Решить уравнение

$$3\cdot\sqrt{3x+1}-4\cdot\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x-1}=-\left(2+\sqrt{1-x}\right)$$

Решение.

Замечаем, что ОДЗ уравнения состоит из одной точки *x*=1.

Проверкой убеждаемся, что *x=1* – решение уравнения.



Умножение обеих частей уравнения на сопряженный множитель

- Решить уравнение $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5.$

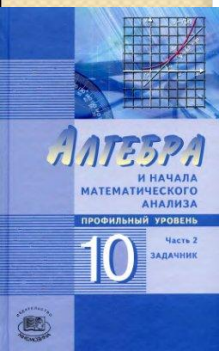
Решение. Умножим обе части уравнения на $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}\right)$

Получим, $x+3-x-8=5\cdot\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}\right).$

Имеем, $\begin{cases}\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}=-1,\\ \sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5.\end{cases}$

Отсюда, $2\cdot\sqrt{x+3}=4,\quad x=1.$

Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ является корнем данного уравнения.



Сведение уравнения к системе рациональных уравнений с помощью введения переменной

- Решить уравнение $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3.$

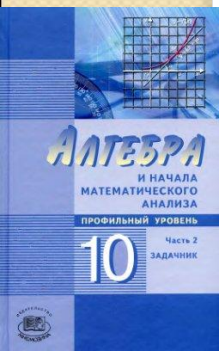
Решение. Положим $u=\sqrt[3]{x-2},\ \ v=\sqrt{x+1}.$

Тогда $u+v=3$. Так как $u^3=x-2$, $v^2=x+1$, то $v^2-u^3=3$.

Итак, в новых переменных имеем

$$\begin{cases} v+u=3, \\ v^2-u^3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u, \\ u^3-u^2+6u-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=2, \\ u=1. \end{cases}$$

Значит, $x=3$.



Выделение полного квадрата

- Решить уравнение

$$\sqrt{x+2+2\cdot\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\cdot\sqrt{x+1}}=2.$$

Заметим, что $x+2+2\cdot\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2$

$$x+2-2\cdot\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2.$$

Следовательно, имеем уравнение

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}=2,$$

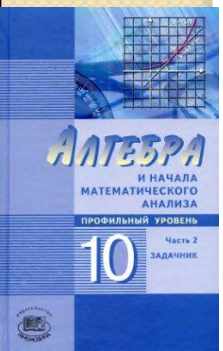
$$\left|\sqrt{x+1}+1\right|+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=2.$$

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}-1\ge 0,\\ 2\cdot\sqrt{x+1}=2\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\sqrt{x+1}-1<0,\\ \sqrt{x+1}+1+1-\sqrt{x+1}=2.\end{cases}$$

Ответ: $-1\le x\le 0.$

Решением первой системы будет x=0, решением второй системы – все числа, удовлетворяющие неравенству $-1\le x<0.$



Использование ограниченности выражений, входящих в уравнение

- Решить уравнение $\sqrt{x^2+1}+\sqrt[4]{x^4+1}=2-x^2.$

Решение.

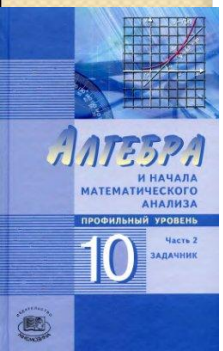
Так как $\sqrt{x^2+1}\geq 1$ *и* $\sqrt[4]{x^4+1}\geq 1$ для любых значений *x,*

то левая часть уравнения не меньше двух для $x\in R$

Правая часть $2-x^2\leq 2$ для $x\in R.$

Поэтому уравнение может иметь корнями только те значения *x*, при которых

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}+\sqrt[4]{x^4+1}=2,\\ 2-x^2=2.\end{cases}$$



Решая второе уравнение системы, найдем *x=0*.

Это значение удовлетворяет и первому уравнению системы. Итак, *x*=0 – корень уравнения.

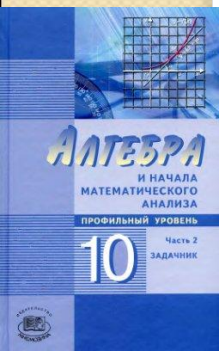
Использование свойств монотонности функций

- Решить уравнение $\sqrt[5]{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{29-x}.$

Решение.

Если функция *u(x)* монотонная, то уравнение *u(x)* = *A* либо не имеет решений, либо имеет единственное решение. Отсюда следует, что уравнение *u(x)* = *v(x),* где *u(x)* - возрастающая, а *v(x)* – убывающая функции, либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

Подбором находим, что *x*=2 и оно единственно.



Использование векторов

- Решить уравнение $x \cdot \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2 \cdot \sqrt{x^2+1}.$

ОДЗ: $-1 \le x \le 3.$

Пусть вектор $\vec{a}\{x;1\}, \vec{b}\left\{\sqrt{1+x}; \sqrt{3-x}\right\}$

Скалярное произведение векторов

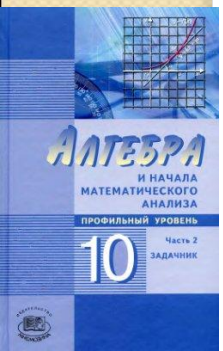
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}.$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{1+x+3-x} = 2 \cdot \sqrt{x^2+1}$$

Получили $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ Отсюда, $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}} = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$

Возведем обе части в квадрат. Решив уравнение, получим

$$x = 1; x = 1 \pm \sqrt{2}$$



Самостоятельная работа с последующей проверкой

ВАРИАНТ 1

1) $\sqrt{|x^2+14x+45|}-1=|x+7|-1,$

2) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12,$

3) $\sqrt[3]{35+x}-\sqrt[3]{5-x}=\sqrt[6]{25-x^2}.$

1) $-5; -6; -8; -9$

2) 1

3) $\frac{63}{13}$

ВАРИАНТ 2

1) $\sqrt[3]{12-x^2}=1-\sqrt{x-1},$

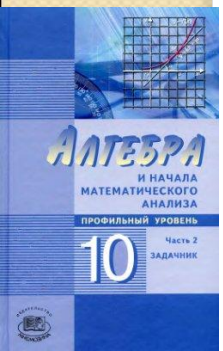
2) $\sqrt[5]{x-1}+\sqrt{x+2}=3,$

3) $\sqrt[6]{x\sqrt{x^7}}-25\cdot\sqrt[4]{x\sqrt{x}}=54.$

1) $1; 2; 10$

2) 2

3) 6561



Домашнее задание

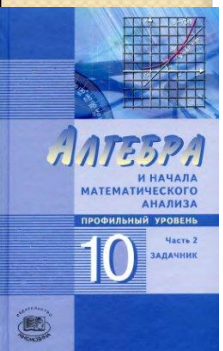
- Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{6x}} = \dfrac{5}{2}, \\ xy - x - y = 9. \end{cases}$$

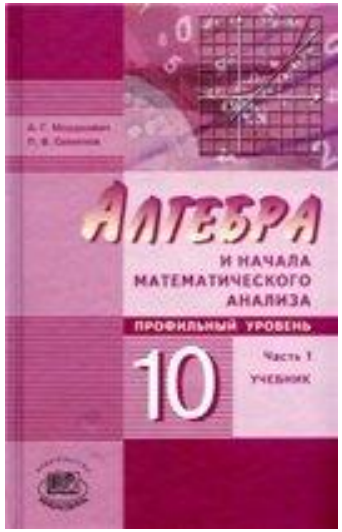
Решите уравнения:

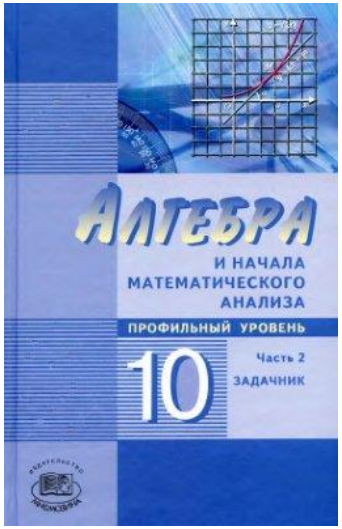
$$\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

$$\sqrt{x + 8 + 2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x + 1 - \sqrt{x+7}} = 4.$$



Источники





http://rudocs.exdat.com/docs/index-18133.html
http://dist-tutor.info/mod/lesson/view.php
http://ru.wikibooks.org/wiki/

спасибо за урок,
всего доброго!