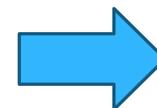


Граф и его элементы

Основные определения

- * Переход по слайдам осуществляется только по нажатию левой кнопки мыши клик мыши!!!
- * Если есть мигающая стрелка, значит нужно нажатие левой кнопки мыши в любом месте слайд для продолжения презентации!!!!



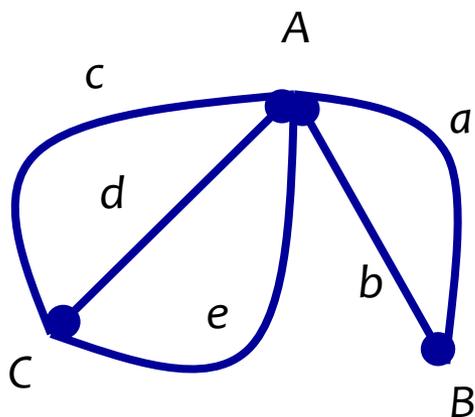
- * После прочтения удалить слайд!

ГРАФОМ $G = (V, X)$ НАЗЫВАЕТСЯ ПАРА ДВУХ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ: МНОЖЕСТВО ТОЧЕК И МНОЖЕСТВО ЛИНИЙ, СОЕДИНЯЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ ПАРЫ ТОЧЕК.

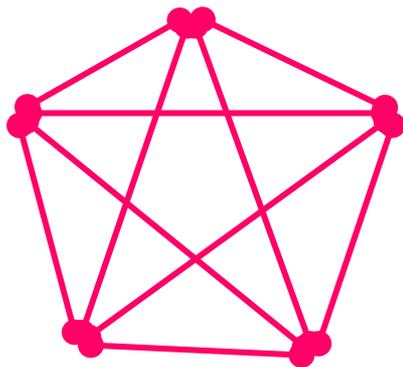
Впервые понятие «граф» ввел в 1936 г. венгерский математик **Денни Кёниг**. но первая работа по теории графов принадлежала перу великого **Леонарда Эйлера** и была написана еще в 1736 г.

ТОЧКИ НАЗЫВАЮТСЯ **ВЕРШИНАМИ**, ИЛИ **УЗЛАМИ**, ГРАФА, ЛИНИИ – **РЕБРАМИ** ГРАФА.

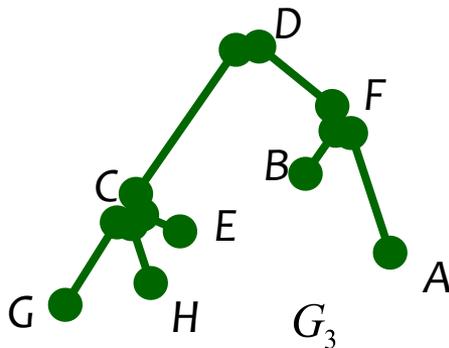
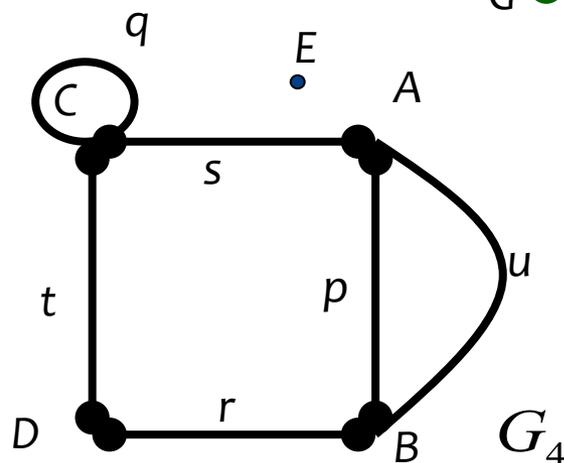
ПРИМЕРЫ ГРАФОВ



G_1

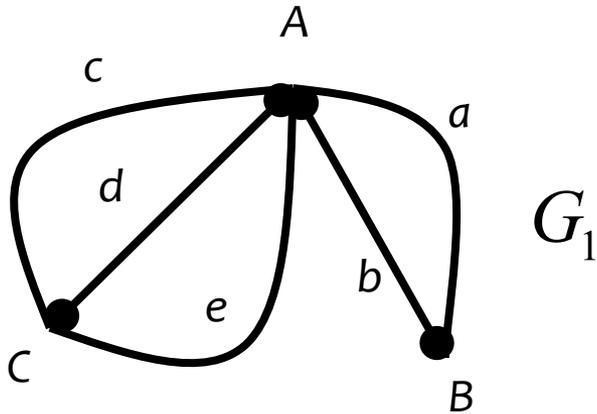


G_2



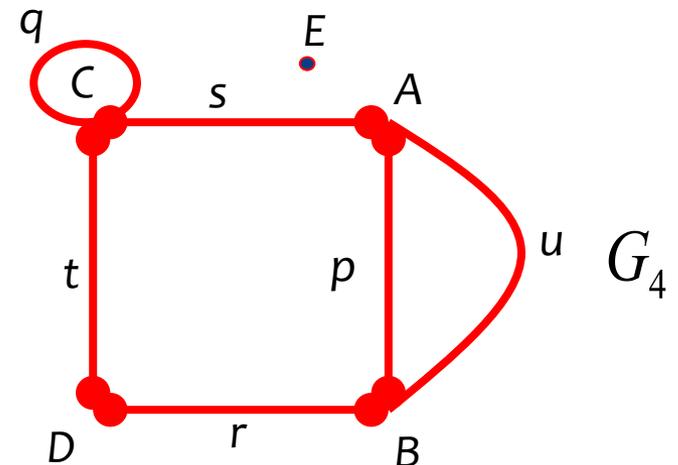
G_3

ЕСЛИ РЕБРО ГРАФА СОЕДИНЯЕТ ДВЕ ЕГО ВЕРШИНЫ, ТО ГОВОРЯТ, ЧТО ЭТО РЕБРО ИМ ИНЦИДЕНТНО. ДВЕ ВЕРШИНЫ ГРАФА НАЗЫВАЮТСЯ СМЕЖНЫМИ, ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ИНЦИДЕНТНОЕ ИМ РЕБРО.

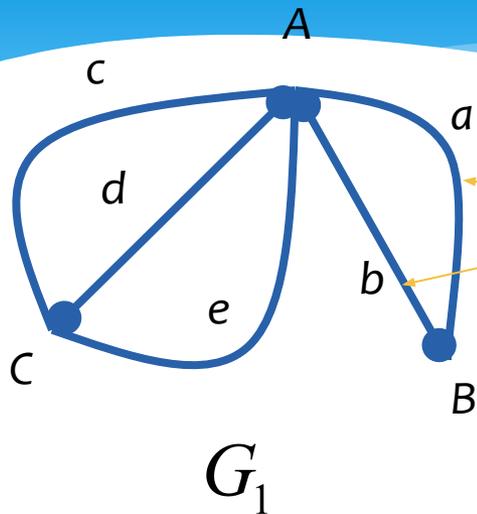


НА РИСУНКЕ СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ ВЕРШИНЫ A и B, A и C; СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ РЕБРА c и d, a и b.

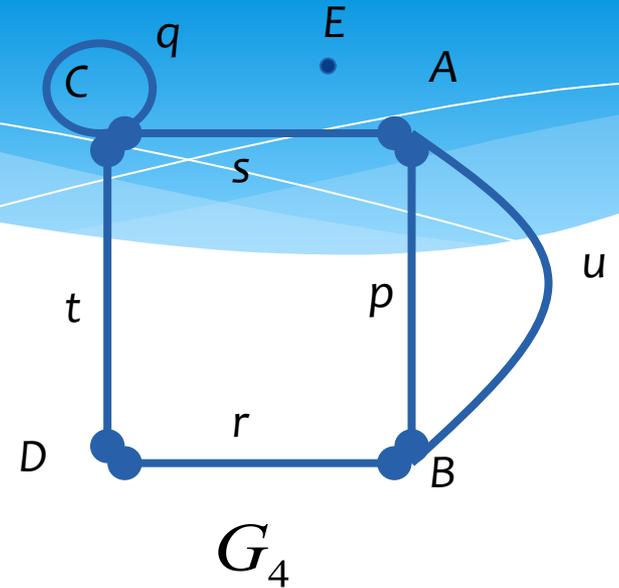
ЕСЛИ ГРАФ ИМЕЕТ РЕБРО, У КОТОРОГО НАЧАЛО И КОНЕЦ СОВПАДАЮТ, ТО ЭТО РЕБРО НАЗЫВАЕТСЯ **ПЕТЛЕЙ** (у графа петля – $q(C,C)$).



ДВА РЕБРА НАЗЫВАЮТСЯ **СМЕЖНЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ ИМЕЮТ ОБЩУЮ ВЕРШИНУ.



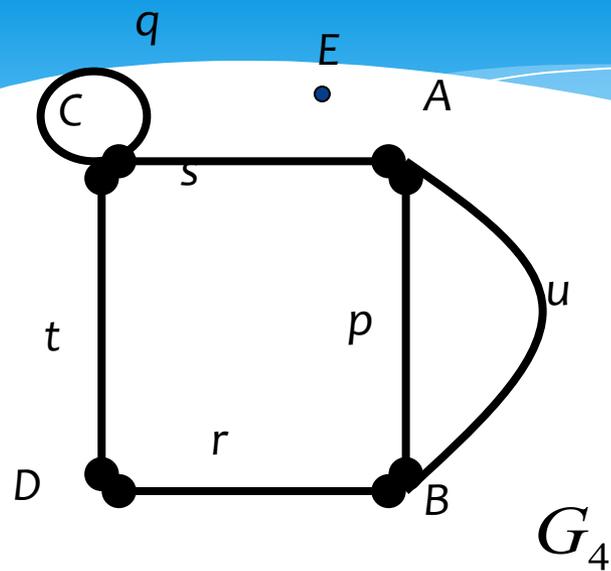
КРАТНЫЕ
РЕБРА



ЧИСЛО РЕБЕР, ИНЦИДЕНТНЫХ ВЕРШИНЕ A , НАЗЫВАЕТСЯ **СТЕПЕНЬЮ** ЭТОЙ ВЕРШИНЫ И ОБОЗНАЧАЕТСЯ $deg(A)$.

ЕСЛИ ВЕРШИНЕ ИНЦИДЕНТНА ПЕТЛЯ, ОНА ДАЕТ ВКЛАД В СТЕПЕНЬ, РАВНЫЙ ДВУМ, ТАК КАК ОБА КОНЦА ПРИХОДЯТ В ЭТУ ВЕРШИНУ.

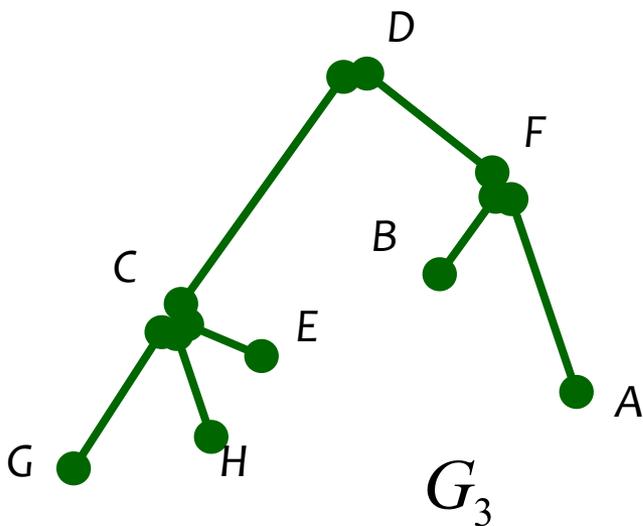
$$\begin{aligned} deg(A) &= 3; \\ deg(B) &= 3; \\ deg(C) &= 4; \\ deg(D) &= 2; \\ deg(E) &= 0. \end{aligned}$$



$$\text{deg}(E) = 0$$



**Е – ИЗОЛИРОВАННАЯ
ВЕРШИНА**



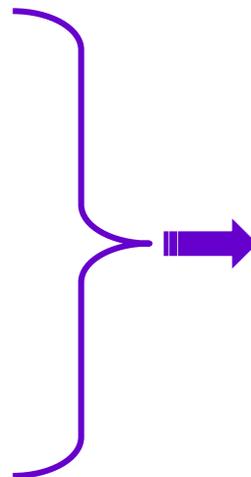
$$\text{deg}(G) = 1$$

$$\text{deg}(H) = 1$$

$$\text{deg}(E) = 1$$

$$\text{deg}(B) = 1$$

$$\text{deg}(A) = 1$$



**G, H, E, B, A -
ВИСЯЧИЕ
ВЕРШИНЫ**

ТЕОРЕМА

В ГРАФЕ $G(V, X)$ СУММА СТЕПЕНЕЙ ВСЕХ ЕГО ВЕРШИН – ЧИСЛО ЧЕТНОЕ, РАВНОЕ УДВОЕННОМУ ЧИСЛУ РЕБЕР ГРАФА:

$$\sum_{i=1}^n \deg(V_i) = 2m$$

ВЕРШИНА НАЗЫВАЕТСЯ **ЧЕТНОЙ** (НЕЧЕТНОЙ), ЕСЛИ ЕЕ СТЕПЕНЬ – ЧЕТНОЕ(НЕЧЕТНОЕ) ЧИСЛО.

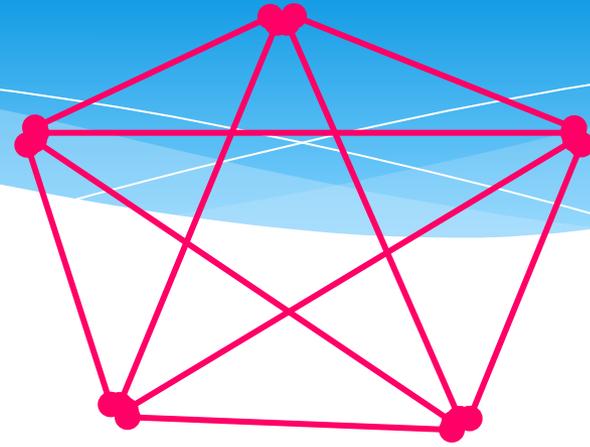
ТЕОРЕМА

ЧИСЛО НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН ЛЮБОГО ГРАФА – ЧЕТНО.

СЛЕДСТВИЕ

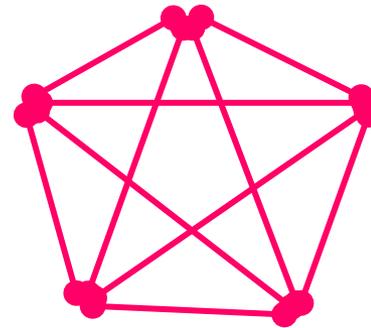
НЕВОЗМОЖНО НАЧЕРТИТЬ ГРАФ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН.

ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ **ПОЛНЫМ**, ЕСЛИ ЛЮБЫЕ ДВЕ ЕГО РАЗЛИЧНЫЕ ВЕРШИНЫ СОЕДИНЕННЫ ОДНИМ И ТОЛЬКО ОДНИМ РЕБРОМ.



G_2

ДОПОЛНЕНИЕМ ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ГРАФ С ТЕМИ ЖЕ ВЕРШИНАМИ И ИМЕЮЩИЙ ТЕ И ТОЛЬКО ТЕ РЕБРА, КОТОРЫЕ НЕОБХОДИМО ДОБАВИТЬ К ИСХОДНОМУ ГРАФУ, ЧТОБЫ ОН СТАЛ ПОЛНЫМ.



G_5

G_2



ДОПОЛНЕНИЕ

ОРГРАФ

КОНЕЦ ДУГИ

(A,B)

B

ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ

(ОРГРАФ) — ГРАФ, РЕБРАМ

КОТОРОГО ПРИСВОЕНО

НАПРАВЛЕНИЕ.

НАПРАВЛЕННЫЕ РЕБРА

НАЧАЛО ДУГИ
(A,B)

ИМЕНУЮТСЯ **ДУГАМИ**.

СТЕПЕНИ ВХОДА
ВЕРШИН ГРАФА
(см. рис.):

$$\deg_+(A) = 1$$

$$\deg_+(B) = 1$$

$$\deg_+(C) = 2$$

СТЕПЕНИ ВЫХОДА
ВЕРШИН:

$$\deg_-(A) = 1$$

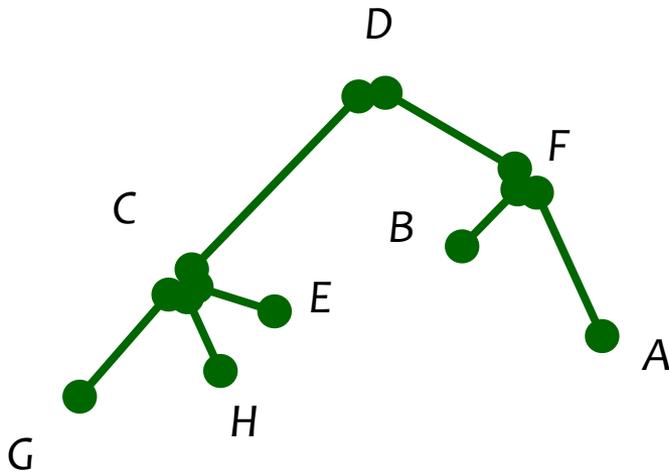
$$\deg_-(B) = 2$$

$$\deg_-(C) = 1$$

СТЕПЕНЬЮ ВХОДА (ВЫХОДА) ВЕРШИНЫ ОРГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ЧИСЛО РЕБЕР, ДЛЯ КОТОРЫХ ЭТА ВЕРШИНА ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ (НАЧАЛОМ).

Последовательность ребер неориентированного графа, в которой вторая вершина предыдущего ребра совпадает с первой вершиной следующего, называется **маршрутом**.

Число ребер маршрута называется **длиной маршрута**.



**HCFDA – МАРШРУТ
ДЛИНОЙ 4.**

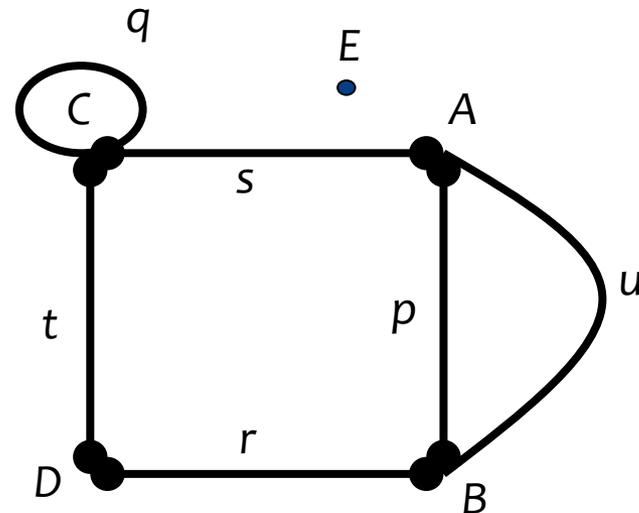
Если начальная вершина маршрута совпадает с конечной, то такой маршрут называется **замкнутым** или **циклом**.

Если ребро встретилось только один раз, то маршрут называется **цепью**.

(t, s, p, r) – 4-ЦИКЛ

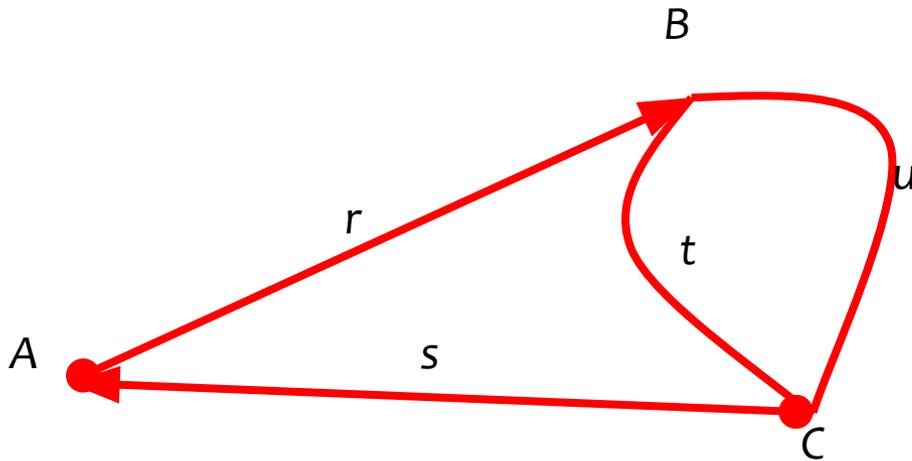
(t, s, u, r, t, s, p, r) – 8-ЦИКЛ

петля (q) – 1-ЦИКЛ



(t, s, p) – 3-ЦЕПЬ

Путь – упорядоченная последовательность ребер ориентированного графа, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего и все ребра единственны.



(u, s, r, t) – 4-путь

(r, u) – 2-путь

(s, r, t) и (u, s, r) – 3-циклы

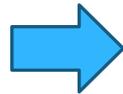
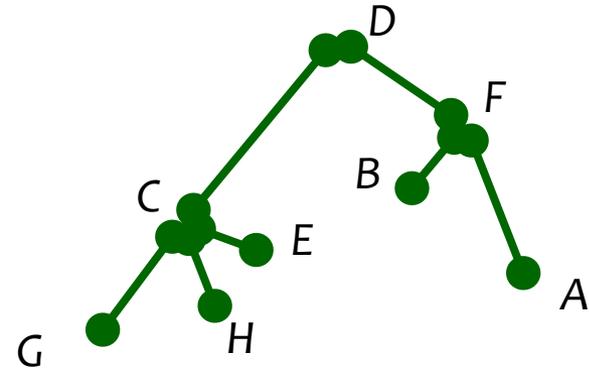
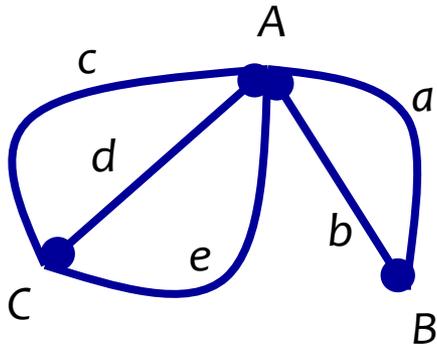
ЦИКЛ В ОРГРАФЕ – ПУТЬ, У КОТОРОГО СОВПАДАЮТ НАЧАЛО И КОНЕЦ.

ЦЕПЬ, ПУТЬ И ЦИКЛ В ГРАФЕ НАЗЫВАЮТСЯ **ПРОСТЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ЛЮБУЮ ИЗ ВЕРШИН НЕ БОЛЕЕ ОДНОГО РАЗА.

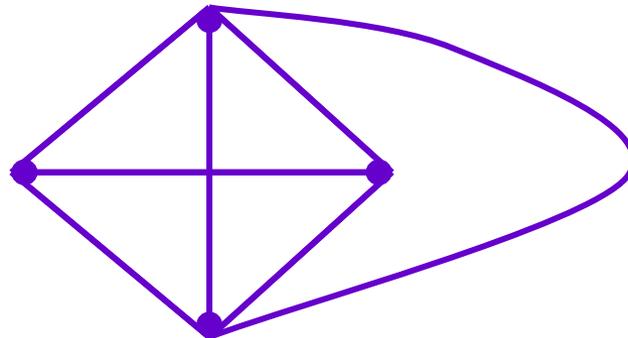
НЕОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ **СВЯЗНЫМ**, ЕСЛИ МЕЖДУ ЛЮБЫМИ ДВУМЯ ЕГО ВЕРШИНАМИ ЕСТЬ МАРШРУТ.

ТЕОРЕМА *для того, чтобы связный граф являлся простым циклом, необходимо и достаточно, чтобы каждая его вершина имела степень, равную 2.*

ГРАФ G НАЗЫВАЕТСЯ ПЛАНАРНЫМ (ПЛОСКИМ), ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЙ ГРАФ G' , В ИЗОБРАЖЕНИИ КОТОРОГО НА ПЛОСКОСТИ РЕБРА ПЕРЕСЕКАЮТСЯ ТОЛЬКО В ВЕРШИНАХ.



ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

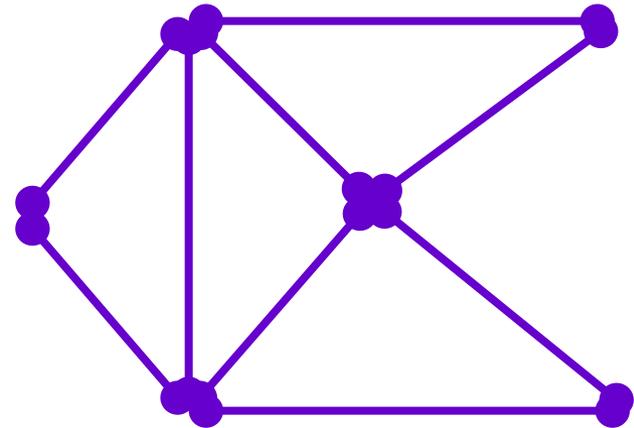


ЭЙЛЕРОВЫМ ПУТЕМ (ЦИКЛОМ) ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ (ЦИКЛ), КОТОРЫЙ СОДЕРЖИТ ВСЕ РЕБРА ГРАФА ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

ГРАФ, ОБЛАДАЮЩИЙ ЭЙЛЕРОВЫМ ЦИКЛОМ, НАЗЫВАЕТСЯ ЭЙЛЕРОВЫМ.

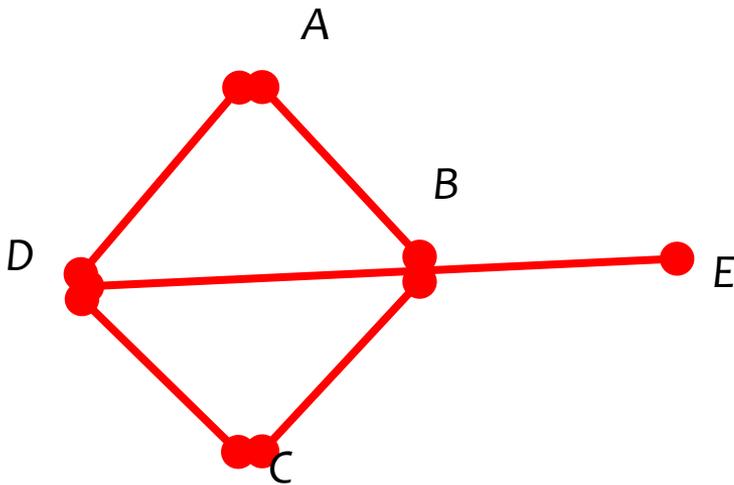
ТЕОРЕМА

ГРАФ ЯВЛЯЕТСЯ ЭЙЛЕРОВЫМ ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ОН – СВЯЗНЫЙ ГРАФ, ИМЕЮЩИЙ ВСЕ ЧЕТНЫЕ ВЕРШИНЫ.



ГАМИЛЬТОНОВЫМ ПУТЕМ(ЦИКЛОМ) ГРАФА
НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ(ЦИКЛ), ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ
КАЖДУЮ ЕГО ВЕРШИНУ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

ГРАФ, СОДЕРЖАЩИЙ ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ,
НАЗЫВАЕТСЯ **ГАМИЛЬТОНОВЫМ**.



*(C, D, A, B, E) –
гамильтонов путь*

МАТРИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ ГРАФА G НАЗЫВАЮТ ТАБЛИЦУ B , СОСТОЯЩУЮ ИЗ n СТРОК(ВЕРШИНЫ) И m СТОЛБЦОВ(РЕБРА), В КОТОРОЙ:

- **ДЛЯ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:**

$b_{ij} = 1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА v_j ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ x_i

$b_{ij} = 0$, ЕСЛИ ВЕРШИНА v_j НЕ ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ x_i

- **ДЛЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:**

$b_{ij} = 1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА v_i ЯВЛЯЕТСЯ НАЧАЛОМ ДУГИ x_j

$b_{ij} = 0$, ЕСЛИ ВЕРШИНА v_j НЕ ИНЦИДЕНТНА ДУГЕ x_j

$b_{ij} = -1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА v_j ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ ДУГИ x_j

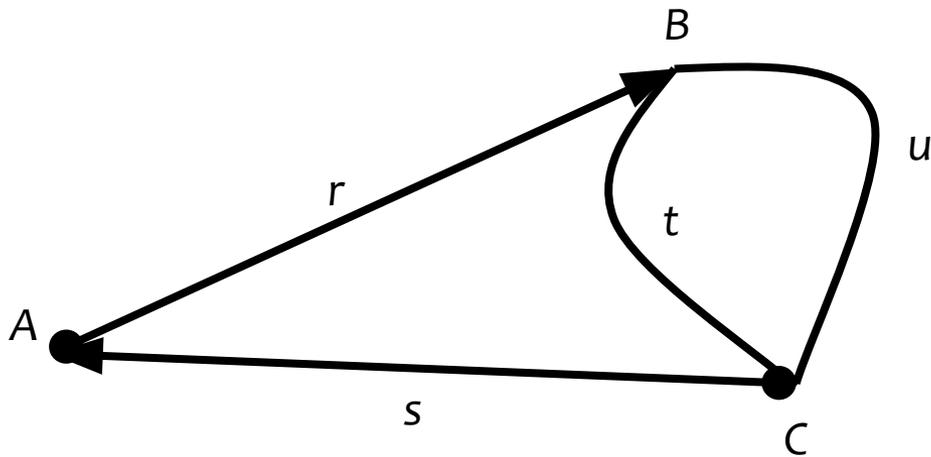
**МАТРИЦЕЙ СМЕЖНОСТИ ГРАФА $G(V, X)$ БЕЗ
КРАТНЫХ РЕБЕР НАЗЫВАЮТ КВАДРАТНУЮ**

МАТРИЦУ A ПОРЯДКА n , В КОТОРОЙ:

$$a_{ij} = 1, \text{ ЕСЛИ } (v_i, v_j) \in X$$

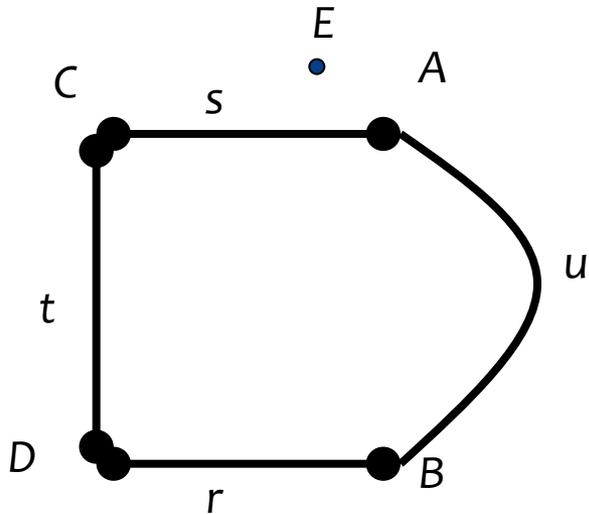
$$a_{ij} = 0, \text{ ЕСЛИ } (v_i, v_j) \notin X$$

СЛЕДУЮЩИЙ ОРГРАФ ЗАДАЕТСЯ ТАБЛИЦЕЙ
ИНЦИДЕНТНОСТИ:



	r	s	t	u
A	1	-1	0	0
B	-1	0	1	1
C	0	1	-1	-1

СЛЕДУЮЩИЙ ГРАФ ЗАДАЕТСЯ ТАБЛИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ:



	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	1	0	0	1	0
C	1	0	0	1	0
D	0	1	1	0	0
E	0	0	0	0	0