Фестиваль исследовательских и творческих работ «Портфолио» 2005-2006

Проектная работа по алгебре «Решение иррациональных уравнений»

Выполнил: ученик 10 «А» класса
Морозов Иван

МОУ «Средняя общеобразовательная школа №108» г.Трёхгорного Челябинской области

В данной работе рассматриваются иррациональные уравнения, а также приёмы их решения, которые будут полезны любым ученикам, особенно для подготовки к ЕГЭ!

С помощью данной работы вы сможете улучшить свои знания по алгебре!

Меню

Меню

Применение свойств квадратного корня.

I | II | III

Уравнения содержащие радикал третей степени.

I | II

Введение новой переменной.

I | II

Решения, основанные на применении свойств функции.

I | II

Выход

$$\sqrt{X^2} + \sqrt{(X-2)^2} = 2 \qquad (1)$$

т.к. $\sqrt{Y^2} = |Y|$ то $\sqrt{X^2} = |X|$; $\sqrt{(X-2)^2} = |X-2|$;

Исходное уравнение принимает вид |X|+|X-2|=2; Оно равносильно уравнению (1). Решим его методом разбития на интервалы. Выражения под знаком корня равны нолю при X=0; X=2.

При x<0 |x|=-X; |X-2|=2-X.

Уравнение (1) принимает вид 2X=0.

Его решением является число 0, но 0не принадлежит данному промежутку.

При $0 \le x<2$ |x|=X; |X-2|=2-X

Уравнение (1) принимает вид 0X=0.

Его решением являются все числа из промежутка [0;2).

При $2 \le x$ |x|=X; |X-2|=X-2

Уравнение (1) принимает вид 2X=4

Его решением является число 2

Объединим все решения и получим все допустимые значения X

Ответ [0;2]

назад

$$\sqrt{X^2+6X+9}+\sqrt{X^2-4X+4}=5 \qquad (1)$$

$X^2+6X+9=(X+3)^2$; $X^2-4X+4=(X-2)^2$

Т.к. $\sqrt{y}=|y|$ то $\sqrt{X^2+6X+9}=\sqrt{(X+3)^2}=|X+3|$; $\sqrt{X^2-4X+4}=\sqrt{(X-2)^2}=|X-2|$

Исходное уравнение принимает вид $|X+3|+|X-2|=5$. Оно равносильно уравнению (1). Решим его методом разбития на интервалы. Выражения под знаком корня равны нолю при $X=-3$; $X=2$.

При $x<-3$ $|x+3|=-3-X$; $|X-2|=2-X$

Уравнение (1) принимает вид $-2X=6$

Его решением является число 3, но $3>-3$, значит число 3 не подходит

При $-3 \le x<2$ $|x+3|=X+3$; $|X-2|=2-X$

Уравнение (1) принимает вид $0X=0$

Его решением являются все числа из промежутка $[-3;2)$

При $2 \le x$ $|x+3|=X$; $|X-2|=X-2$

Уравнение (1) принимает вид $2X=4$

Его решением является число 2

Объединим все решения и получим все допустимые значения X

Ответ $[-3;2]$

назад

$$\sqrt{X+3-4\sqrt{X-1}}+\sqrt{X+8-6\sqrt{X-1}}=1 \qquad (1)$$

Сначала найдем ОДЗ. Т.к. выражение под корнем всегда больше или равно нулю, то $X-1\geq 0$, то есть $X\geq 1$. Представим уравнение (1) в

$$\sqrt{(X-1)-4\sqrt{X-1}+4}+\sqrt{(X-1)-6\sqrt{X-1}+9}=1$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{X-1}\right)^2-4\sqrt{X-1}+4}+\sqrt{\left(\sqrt{X-1}\right)^2-6\sqrt{X-1}+9}=1$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{X-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{X-1}-3\right)^2}=1$$

$$\left|\sqrt{X-1}-2\right|+\left|\sqrt{X-1}-3\right|=1 \qquad (2)$$

Решим полученное уравнение методом интервалов. Выражения под знаком модуля обращаются в ноль при $X = 5$ и $X = 10$

При $X < 5$ $\left|\sqrt{X-1}-2\right| = 2-\sqrt{X-1}$; $\left|\sqrt{X-1}-3\right| = 3-\sqrt{X-1}$

Тогда Уравнение принимает вид $2\sqrt{X-1}=2$

оно равносильно уравнению (2) его решением является число 5. Но 5 = 5, поэтому на данном промежутке корень не подходит

При $5 \leq X < 10$ $\left|\sqrt{X-1}-2\right| = \sqrt{X-1}-2$; $\left|\sqrt{X-1}-3\right| = 3-\sqrt{X-1}$

Тогда Уравнение принимает вид $0\sqrt{X-1}=0$

оно равносильно уравнению (2) его решением являются числа на промежутке от 5 до 10

При $5 \leq X$ $\left|\sqrt{X-1}-2\right| = \sqrt{X-1}-2$; $\left|\sqrt{X-1}-3\right| = \sqrt{X-1}-3$

Тогда Уравнение (2) принимает вид $2\sqrt{X-1}=6$

оно равносильно уравнению (2) его решением являются число 10

Объединим все значения X и получим что $X \subset [5;10]$

Ответ [5;10]

назад

$$\sqrt[3]{14+X}+\sqrt[3]{14-X}=4 \qquad (1)$$

Данное уравнение содержит радикалы третей степени поэтому. При решении таких уравнений удобно пользоваться формулами:

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

Область определения уравнения (1) является множество всех действительных чисел. Возведем обе части уравнения в куб и получим уравнение равносильное данному:

$$14+X+14-X+3\sqrt[3]{(14+X)(14-X)}\left(\sqrt[3]{14+X}+\sqrt[3]{14-X}\right)=64 \qquad (2)$$

$$3\sqrt[3]{196-X^2}\left(\sqrt[3]{14+X}+\sqrt[3]{14-X}\right)=36 \qquad (3)$$

Так как $\sqrt[3]{14+X}+\sqrt[3]{14-X}=4$ опэтому из уравнения (3) следует

$3\sqrt[3]{196-X^2}\,4=36$ **или** $\sqrt[3]{196-X^2}=3$

Возведя это уравнение в куб получим уравнение, ему равносильное $196-X^2=27$

$X^2=196$ $X_{12}=\pm 13$

Так как в процессе преобразования уравнения (1) мы получили «цепочку» равносильных уравнений то решения последующего уравнения являются решениями уравнения (1).

Ответ: -13; 13

назад

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8} \qquad (1)$$

Данное уравнение содержит радикалы третей степени поэтому. При решении таких уравнений удобно пользоваться формулами:

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

ОДЗ X – любое т.к. нечетная степень корней.

Возведем обе части уравнения в третью степень

$x+3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 * \sqrt[3]{x-16} + 3\sqrt[3]{x} * \left(\sqrt[3]{x-16}\right)^2 + x - 16 = x - 8$

$x+3\sqrt[3]{x} * \sqrt[3]{x-16}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16}\right) + x - 16 = x - 8$

$3\sqrt[3]{x\,(x-16)} * \sqrt[3]{x-8} = 8 - x,$

$27\,x\,(x-16)\,(x-8) = (8-x)^3$

$(x-8)\,(27\,x\,(x-16) + (x-8)^2) = 0$

$x - 8 = 0$ или $28\,x^2 - 28*16\,x = 64 = 0$

$x = 8$

$7\,x^2 - 7*16\,x + 16 = 0$

$D = (7*8)^2 - 7*16$

$x_1 = \dfrac{56-21\sqrt{21}}{7}$; $x_2 = \dfrac{56+21\sqrt{21}}{7}$ $x_3 = 8$

Так как в процессе преобразования уравнения (1) мы получили «цепочку» равносильных уравнений то решения последующего уравнения являются решениями уравнения (1).

Ответ: $x_1 = \dfrac{56-21\sqrt{21}}{7}$; $x_2 = \dfrac{56+21\sqrt{21}}{7}$ $x_3 = 8$

$$2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33 \qquad (1)$$

Введем новую переменную. Пусть $\sqrt{2x^2+3x+9}=U$, тогда $2x^2+3x+9=U^2$;

$2x^2+3x=U^2-9$.

Подставим эти значения в уравнение (1) и он примет вид $U^2-9+U=33$. (2)

Т.к. число U находится под знаком корня то $U \ge 0$. Теперь решим уравнение (2)

$U^2+U-42=0$

$D=1+4*42$

$D=169$

$$U_{12}=\frac{-1\pm 13}{2}$$

$U_1=-7 \qquad U_2=6$

Т.к. $U \ge 0$ то корень $U_1=-7$ не удовлетворяет условию. Значит $\sqrt{2x^2+3x+9}=6$

$2x^2+3x+9=36$

$2x^2+3x-27=0$

$D=3^2+27*2*4$

$D=225$

$$x_{12}=\frac{-3\pm 15}{4}$$

$x_1=-4.5 \qquad x_2=3$

Ответ: $x_1=-4.5 \qquad x_2=3$

назад

$$\sqrt{X^2+X+4}+\sqrt{X^2+X+1}=\sqrt{2X^2+2X+9} \qquad (1)$$

Введем новуюпеременную $X^2+X=U$, тогда уравнение (1) примт вид $\sqrt{U+4}+\sqrt{U+1}=\sqrt{2U+9}$ (2)

Т.к. выроженне под знаком корня всегда больше или равно нуля то $U\geq -1$.

Возведем обе части уравнения в квадрат получим:

$$U+4+U+1+2\sqrt{(U+4)(U+1)}=2U+9$$

$$2\sqrt{(U+4)(U+1)}=4$$

$$\sqrt{(U+4)(U+1)}=2$$

$$(U+4)(U+1)=4$$

$$U^2+5U+4=4$$

$$U^2+5U=0$$

$$U(U+5)=0$$

$$U_1=-5 \quad U_2=0$$

Т.к. $U\geq -1$ то значение $U_1=-5$ не подходит. Теперь подставим значение U, получим что $X^2+X=0$;

$$X(x+1)=0$$

$$U_1=-1 \quad U_2=0$$

Проверим подстановкой удовлетворяют ли найденные корни исходному уравнению. Убеждаемся что X_1=-1; X_2=0 удовлетворяют уравнению.

Ответ: -1; 0

назад

$$\sqrt{x^2-5x+6}+\log_2\sqrt{x^2-6x+13}=1$$

Т.к. $\sqrt{x^2-5x+6}$ арифметический квадратный корень то $\sqrt{x^2-5x+6}\geq 0$

Для отценки выражения $\log_2\sqrt{x^2-6x+13}$,

преобразуем его : $\log_2\sqrt{x^2-6x+13}=\log_2\sqrt{(x-3)^2+4}\geq\log_2\sqrt{4}=\log_2 2\geq 1.$

Т.к. первое слагаемое ограничено с низу нулем, а второе ограниченно снизу единицей то их сумма ограниченна с низу единицей.

Тогда левая часть уравнения становится равной правой части, то есть единице, только тогда, когда первое слагаемое равно нулю, а второе слагаемое - 1.

Таким образом исходное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-5x+6}=0\\ \log_2\sqrt{x^2-6x+13}=1\end{cases}$$

Общим корнем этой системы являются число 3

Ответ: 3

назад

$$3\sqrt{X^2-9}+4\sqrt{X^2-16}+5\sqrt{X^2-25}=\frac{120}{X}$$

Т.к. в левой части стоит сумма арифметических квадратных корней, то эта сумма неотрицательна, а значит и в правой части уравнения должно стоять неотрицательное число, откуда следует что X³0. Область определения уравнения принадлежит промежутку $[5;+\infty)$

При $X \geq 5$ функция

$$f(x)=3\sqrt{X^2-9}+4\sqrt{X^2-16}+5\sqrt{X^2-25}$$

При $X \geq 5$ функция $g(x)=120/X$ является функцией убывающей, а следовательно $g(x) \leq f(x)=24$

Таким образом получаем систему из двух уравнений $f(x) \geq 24$ и $g(x) \leq 24$ откуда следует что единственным решением является число 5.

Ответ: 5

назад