

# 10 способов решения квадратных уравнений

Работу выполнила учитель математики МБОУ  
«СОШ №31» г.Энгельса Волосожар М.И.

# Способ 1: разложение левой части уравнения на множители.

Решим уравнение

$$x^2 + 10x - 24 = 0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0$$

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при  $x = 2$ , а также при  $x = -12$ . Это означает, что число  $2$  и  $-12$  являются корнями уравнения  $x^2 + 10x - 24 = 0$ .

## *Способ 2: метод выделения полного квадрата.*

*Решим уравнение  $x^2 + 6x - 7 = 0$ .*

*Выделим в левой части полный квадрат.*

*Для этого запишем выражение  $x^2 + 6x$  в следующем виде:*

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3.$$

*В полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа  $x$ , а второе - удвоенное произведение  $x$  на  $3$ . По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить  $3^2$ , так как*

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2.$$

*Преобразуем теперь левую часть уравнения*

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

*прибавляя к ней и вычитая  $3^2$ . Имеем:*

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$$

*Таким образом, данное уравнение можно записать так:*

$$(x + 3)^2 - 16 = 0, (x + 3)^2 = 16.$$

*Следовательно,  $x + 3 - 4 = 0$ ,  $x_1 = 1$ , или  $x + 3 = -4$ ,  $x_2 = -7$ .*

# Способ 3: Решение квадратных уравнений по формуле.

Умножим обе части уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

на  $4a$  и последовательно имеем:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

# Способ 4: Решение уравнения с использованием теоремы Виета.

*Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид*

$$x^2 + px + c = 0. (1)$$

*Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при  $a = 1$  имеет вид*

$$\begin{cases} x_1 x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

*Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам  $p$  и  $q$  можно предсказать знаки корней).*

а) Если свободный член  $q$  приведенного уравнения (1) положителен ( $q > 0$ ), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависит от второго коэффициента  $p$ . Если  $p < 0$ , то оба корня отрицательны, если  $p > 0$ , то оба корня положительны.

Например,

$$x^2 - 3x + 2 = 0; x_1 = 2 \text{ и } x_2 = 1, \text{ так как } q = 2 > 0 \text{ и } p = -3 < 0;$$
$$x^2 + 8x + 7 = 0; x_1 = -7 \text{ и } x_2 = -1, \text{ так как } q = 7 > 0 \text{ и } p = 8 > 0.$$

б) Если свободный член  $q$  приведенного уравнения (1) отрицателен ( $q < 0$ ), то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если  $p < 0$ , или отрицателен, если  $p > 0$ .

Например,

$$x^2 + 4x - 5 = 0; x_1 = -5 \text{ и } x_2 = 1, \text{ так как } q = -5 < 0 \text{ и } p = 4 > 0;$$
$$x^2 - 8x - 9 = 0; x_1 = 9 \text{ и } x_2 = -1, \text{ так как } q = -9 < 0 \text{ и } p = -8 < 0.$$

# Способ 5: Решение уравнений способом «переброски».

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Умножая обе его части на  $a$ , получаем уравнение

$$a^2x^2 + abx + ac = 0.$$

Пусть  $ax = y$ , откуда  $x = y/a$ ; тогда приходим к уравнению

$$y^2 + by + ac = 0,$$

равносильно данному. Его корни  $y_1$  и  $y_2$  найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем

$$x_1 = y_1/a \text{ и } x_2 = y_2/a.$$

При этом способе коэффициент  $a$  умножается на свободный член, как бы «перемножается» к нему, поэтому его называют способом «перемножения». Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

**Пример.**

Решим уравнение  $2x^2 - 11x + 15 = 0$ .

Решение. «Перемножим» коэффициент  $2$  к свободному члену, в результате получим уравнение

$$y^2 - 11y + 30 = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 6 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5/2 \\ x_2 = 6/2 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2,5 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Ответ:  $2,5; 3$ .

# Способ 6: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

*Пусть дано квадратное уравнение*

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

*Если,  $a + b + c = 0$  (т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то  $x_1 = 1$ ,  
 $x_2 = c/a$ .*

Доказательство. Разделим обе части уравнения на  $a \neq 0$ , получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + b/a \cdot x + c/a = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 x_2 = 1 \cdot c/a. \end{cases}$$

По условию  $a - b + c = 0$ , откуда  $b = a + c$ . Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a + b/a = -1 - c/a, \\ x_1 x_2 = -1 \cdot (-c/a), \end{cases}$$

т.е.  $x_1 = -1$  и  $x_2 = c/a$ , что и требовалось доказать.

**Примеры.**

Решим уравнение  $345x^2 - 137x - 208 = 0$ .

Решение. Так как  $a + b + c = 0$  ( $345 - 137 - 208 = 0$ ), то

$x_1 = 1$ ,  $x_2 = c/a = -208/345$ .

Ответ: 1;  $-208/345$ .

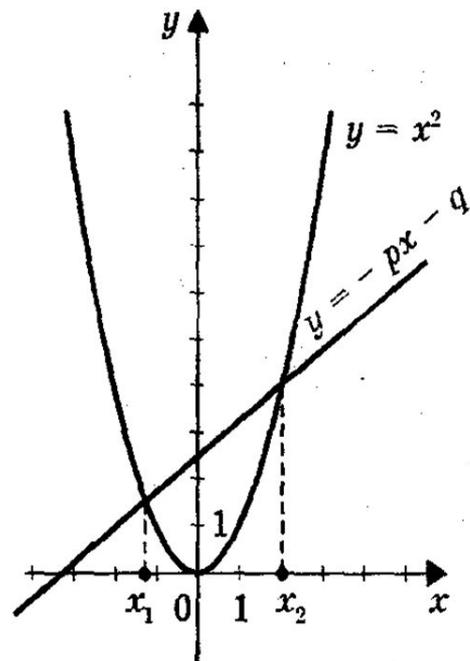
2) Решим уравнение  $132x^2 - 247x + 115 = 0$ .

Решение. Так как  $a + b + c = 0$  ( $132 - 247 + 115 = 0$ ), то

$x_1 = 1$ ,  $x_2 = c/a = 115/132$ .

Ответ: 1;  $115/132$ .

# Способ 7: Графическое решение квадратного уравнения.



*Если в уравнении*

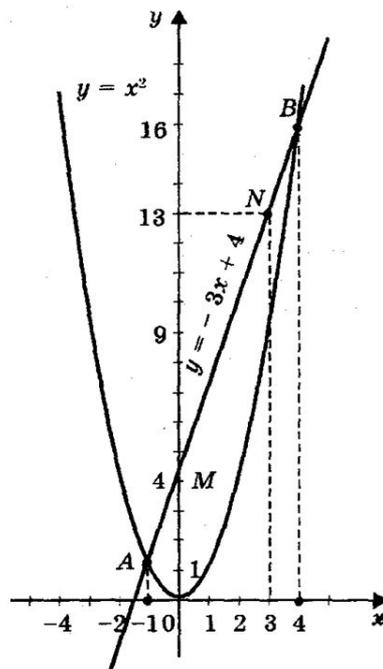
$$x^2 + px + q = 0$$

*перенести второй и третий члены в правую часть, то получим*

$$x^2 = -px - q.$$

*Построим графики зависимости  $y = x^2$  и  $y = -px - q$ .*

*График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости - прямая .*



*.Возможны следующие случаи:*

- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;*
- прямая и парабола могут касаться ( только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;*
- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.*