10 способов решения квадратных уравнений

Работу выполнила учитель математики МБОУ «СОШ N°31» г.Энгельса Волосожар М.И.

Способ 1: разложение левой части уравнения на множители.

Решим уравнение
$x^2 + 10x - 24 = 0$.

Разложим левую часть на множители:
$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2)$.

Следовательно, уравнение можно переписать так:
$(x + 12)(x - 2) = 0$

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при $x = 2$, *а также при* $x = -12$. *Это означает, что число* 2 *и* -12 *являются корнями уравнения* $x^2 + 10x - 24 = 0$.

Способ 2: метод выделения полного квадрата.

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Выделим в левой части полный квадрат.
Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ *в следующем виде:*

$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3$.

В полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x, а второе - удвоенное произведение x на 3. По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2, так как

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$.

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$x^2 + 6x - 7 = 0$,

прибавляя к ней и вычитая 3^2. Имеем:

$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16$.

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$(x + 3)^2 - 16 = 0$, $(x + 3)^2 = 16$.

Следовательно, $x + 3 - 4 = 0$, $x_1 = 1$, или $x + 3 = -4$, $x_2 = -7$.

Способ 3: Решение квадратных уравнений по формуле.

Умножим обе части уравнения

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

на 4а и последовательно имеем:

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$

$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$

$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$

$$x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{D}}{2a};$$

Способ 4 : Решение уравнений с использованием теоремы Виета.

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$x^2 + px + c = 0.$ *(1)*

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при а =1 имеет вид

$$\begin{cases} x_1 x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

а) Если сводный член q приведенного уравнения (1) положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависти от второго коэффициента p. Если $p < 0$, то оба корня отрицательны, если $p < 0$, то оба корня положительны.

Например,

$x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$ *и* $x_2 = 1$, *так как* $q = 2 > 0$ *и* $p = - 3 < 0$;

$x^2 + 8x + 7 = 0$; $x_1 = - 7$ *и* $x_2 = - 1$, *так как* $q = 7 > 0$ *и* $p = 8 > 0$.

б) Если свободный член q приведенного уравнения (1) отрицателен ($q < 0$), то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если $p < 0$, или отрицателен, если $p > 0$.

Например,

$x^2 + 4x - 5 = 0$; $x_1 = - 5$ *и* $x_2 = 1$, *так как* $q = - 5 < 0$ *и* $p = 4 > 0$;

$x^2 - 8x - 9 = 0$; $x_1 = 9$ *и* $x_2 = - 1$, *так как* $q = - 9 < 0$ *и* $p = - 8 < 0$.

Способ 5: Решение уравнений способом «переброски».

Рассмотрим квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Умножая обе его части на а, получаем уравнение

$a^2x^2 + abx + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$y^2 + by + ac = 0$,

равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем

$x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$.

При этом способе коэффициент а умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют способом «переброски». Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Пример.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0.$

Решение. «Перебросим» коэффициент 2 *к свободному члену, в результате получим уравнение*

$y^2 - 11y + 30 = 0.$

Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 5/2 \\ x_2 = 6/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2{,}5 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: 2,5; 3.

Способ 6: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

Пусть дано квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, *где* $a \neq 0$.

Если, $a + b + c = 0$ *(т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то* $x_1 = 1$,

$x_2 = c/a$.

Доказательство. Разделим обе части уравнения на $a \neq 0$, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + b/a \bullet x + c/a = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = - b/a, \\ x_1 x_2 = 1 \bullet c/a. \end{cases}$$

По условию $a - b + c = 0$, откуда $b = a + c$. Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = - a + b/a = -1 - c/a, \\ x_1 x_2 = - 1 \bullet (- c/a), \end{cases}$$

т.е. $x_1 = -1$ и $x_2 = c/a$, что и требовалось доказать.

Примеры.

Решим уравнение $345x^2 - 137x - 208 = 0$.

Решение. *Так как* $a + b + c = 0$ $(345 - 137 - 208 = 0)$, *то*

$x_1 = 1$, $x_2 = c/a = -208/345$.

Ответ: 1; -208/345.

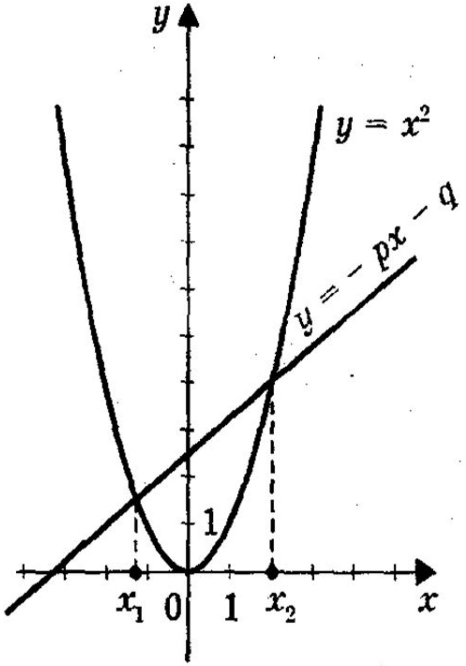
2)*Решим уравнение* $132x^2 - 247x + 115 = 0$.

Решение. *Так как* $a + b + c = 0$ $(132 - 247 + 115 = 0)$, *то*

$x_1 = 1$, $x_2 = c/a = 115/132$.

Ответ: 1; 115/132.

Способ 7:Графическое решение квадратного уравнения.



Если в уравнении

$$x^2 + px + q = 0$$

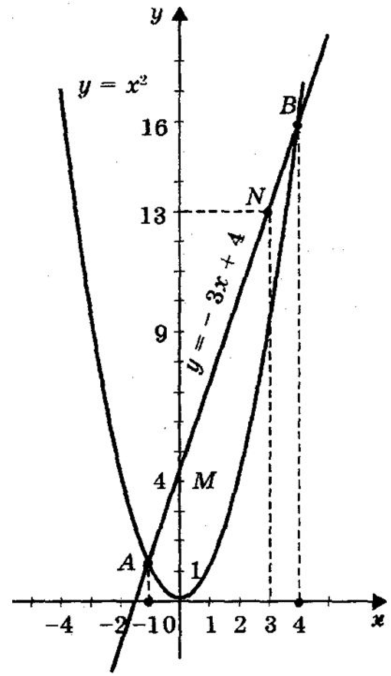
перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$$x^2 = -px - q.$$

Построим графики зависимости $y = x^2$ *и* $y = -px - q$.

График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости -

прямая .



.Возможны следующие случаи:

-прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;

- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;

- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.