Алгебраические уравнения произвольных степеней

1. Введение

Всякий школьник, прежде всего, умеет решать уравнение первой степени: если дано уравнение $ax+b=0$, где $a\neq 0$, то его единственным корнем будет число $x=b/a$.

Школьник знает, также, формулу для решения квадратного уравнения:

$ax^2+bx+c=0$, где $a\neq 0$. Именно, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Если коэффициенты уравнения – действительные числа, то эта формула даёт два различных действительных корня, когда под знаком радикала стоит положительное число, т.е. $b^2-4ac>0$. Если же $b^2-4ac=0$, то наше уравнение имеет лишь один корень; его называют в этом случае кратным корнем; при $b^2-4ac<0$ уравнение вообще не имеет действительных корней.

Наконец, школьник умеет решать некоторые типы уравнений третьей и четвёртой степеней, а именно те, решение которых легко сводится к решению квадратных уравнений. Примером может служить уравнение:

$ax^3+bx^2+cx=0$, которое имеет один корень $x=0$, а затем после сокращения на x превращается в квадратное уравнение: $ax^2+bx+c=0$.

К квадратному уравнению также сводится уравнение четвертой степени:

$ay^4+by^2+c=0$, называемое биквадратным; достаточно положить в этом уравнении $y^2=x$, найти корни полученного квадратного уравнения и затем извлечь из них квадратные корни.

2. Комплексные числа

Потребность в комплексных числах возникла в связи с тем, что из отрицательного действительного числе нельзя извлечь квадратный корень, оставаясь в области действительных чисел. Это, как мы знаем, приводит к тому, что некоторые квадратные уравнения не имеют действительных корней; уравнение $x^2+1=0$ будет простейшим из таких уравнений. Нельзя ли расширить запас чисел так, чтобы эти уравнения обладали корнем?

Школьнику несколько раз приходилось встречаться с расширением того запаса чисел, которым он располагает. Он начинал с изучения в элементарной арифметике целых положительных чисел. Очень скоро появились и дроби. В курсе алгебры были добавлены отрицательные числа, т.е. была получена система всех рациональных чисел. Наконец, присоединение иррациональных чисел привело к системе всех действительных (или вещественных) чисел.

Каждое из этих последовательных расширений запаса чисел позволяло находить корни для некоторых из тех уравнений, которые раньше, до рассматриваемого расширения, корней не имели. Так, уравнение $2x-1=0$ стало обладать корнем лишь после введения дробей, уравнение $x+1=0$ – после введения отрицательных чисел, а уравнение $x^2-2=0$ – лишь после присоединения иррациональных чисел.

Все это вполне оправдывает ещё один шаг на пути обогащения запаса чисел, и мы в общих числам наметим сейчас, как этот последний шаг осуществляется.

рис.1

Как известно, если дана прямая линия и на ней дано положительное направление, отмечена точка O и выбрана единица масштаба (рис. 1), то всякой точке A на этой прямой можно поставить в соответствие её координату, т.е. действительное число, выражающее в выбранных единицах масштаба расстояние от A до O, если A лежит в положительном направлении относительно O, или расстояние, взятое со знаком минус, если A лежит в отрицательном направлении относительно O. Всем точками прямой таким путём ставятся в соответствие различные действительные числа, причем можно доказать, что всякое действительное число будет при этом использовано. Можно считать, следовательно, что точки нашей прямой являются изображениями соответствующих им действительных чисел, т.е. что эти числа как бы уложены на прямую линию. Назовём нашу прямую числовой прямой.

Нельзя ли расширить запас чисел так, чтобы новые числа столь же естественным образом изобразились точками плоскости? Такой системы чисел, более широкой, чем система действительных чисел, у нас пока нет, её нужно построить.

Построение следует начать с указания того, из какого «материала» будет «строиться» новая система чисел, т.е. какие объекты будут играть роль новых чисел, а затем нужно определить, как над этими объектами, т.е. над этими будущими числами, должны производиться алгебраические операции – сложение и умножение, вычитание и деление. Так как мы хотим построить такие числа, которые бы изображались всеми точками плоскостями, то проще всего сами точки плоскости рассматривать в качестве новых чисел. Для того, чтобы эти точки действительно могли бы считаться числами, следует лишь определить, как производить над ними алгебраические операции, т.е. какая точка должна называться суммой двух точек плоскости, какая – произведением и т. д.

Подобно тому как положение точки на прямой вполне определяется одним действительным числом – его координатой, положение всякой точки на плоскости может быть определено парой действительных чисел. Для этого возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке О, и на каждой из них зададим положительно направление и отметим единицу масштаба (рис. 2.)

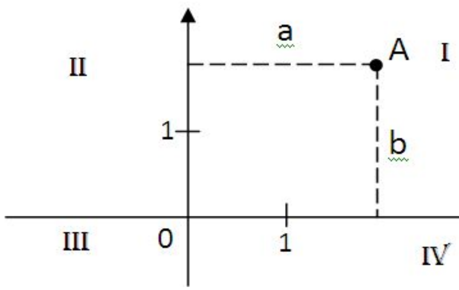


Рис. 2.

Назовём эти прямые осями координат, в частности, горизонтальную прямую – осью абсцисс, вертикальную – осью ординат. Таким образом, вся плоскость разбивается осями координат на четыре четверти, которые нумеруются так, как указано на рисунке.

Положение любой точки А из первой четверти вполне определяется заданием двух положительных действительных чисел – числа а, выражающего в выбранных единицах масштаба расстояние от данной точки до оси ординат (абсцисса точки А), и числа b, выражающего в выбранных единицах масштаба её расстояние до оси абсцисс (ордината точки А). Обратно для любой пары (a,b) положительных действительных чисел можно указать в первой четверти вполне определённую точку, имеющую а своей абсциссой и b – своей ординатой. Аналогично задаются точки и в других четвертях. Однако, для того чтобы обеспечить взаимную однозначность соответствия между всеми точками плоскости и парами их координат (a,b), т.е. избежать того, чтобы нескольким различным точкам плоскости соответствовала одна и та же пара координат (a,b), мы считаем отрицательными абсциссы точек, лежащих в четвертях II и III, и ординаты точек, лежащих в четвертях III и VI. Заметим, что точки, лежащие на оси абсцисс, задаются координатами вида (а,0), а точки, лежащие на оси ординат, - координатами вида (0,b), где а и b –некоторые действительные числа.

Пусть на плоскости даны точки (a,b) и (c,d). До сих пор мы не знали, что следует подразумевать под суммой и произведением этих точек. назовем теперь их суммой точку с абсциссой a+c и ординатой b+d, т.е. (a,b) + (c,d) = (a+c,b+d).

Назовём, с другой стороны, произведением заданных точек точку с абсциссой ac–bd и ординатой ad+bc,

т.е. (a,b)·(c,d) = (ac–bd, ad+bc).

Пусть всякая точка (a,0) оси абсцисс служит изображением действительного числа a – своей абсциссы, т.е. отождествим точку (a,0) с самим числом a, то ось абсцисс просто превратится в числовую прямую. Мы можем теперь считать, что построенная нами из точек плоскости новая числовая система содержит, в частности, все действительные числа, а именно в качестве точек оси абсцисс.

Точки оси ординат уже не могут быть отождествлены с действительными числами. Рассмотрим, например, точку (0,1), лежащую на оси ординат на расстоянии 1 вверх от точки O. Обозначим эту точку буквой i: i=(0,1), и найдём её квадрат в смысле умножения точек плоскости: $i^2=(0,1)(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)$.

Точка (-1,0) лежит, однако, не на оси ординат, а на оси абсцисс и поэтому изображает действительно число -1, т.е. $i^2= -1$.

Мы нашли, следовательно, в нашей новой числовой системе такое число, квадрат которого равен действительному числу -1, т.е. теперь уже можно извлекать из -1 квадратный корень. Другим значением этого корня будет точка i = (0, -1).

Построенная нами числовая система, более широкая чем система действительных чисел, называется системой комплексных чисел, а сами точки плоскости с определёнными выше операциями над ними -комплексными числами. Легко показать, используя эти операции, что всякое комплексное число может быть выражено через действительные числа и число i. Пусть, в самом деле, дана точка (a,b). Ввиду определения сложения справедливо равенство (a,b)=(a,0)+(0,b).

Слагаемое (a,0) лежит на оси абсцисс и поэтому является действительным числом a. Второе же слагаемое может быть записано по определению умножения в виде (0,b)=(b,0) · (0,1).

Первый множитель правой части этого равенства совпадает с числом b, а второй равен i. Таким образом, (a,b)=a+b · i, где сложение и умножение нужно понимать в смысле операций над точками плоскости.

Получив эту обычную запись комплексных чисел, мы сейчас же можем соответственно переписать приведённые выше формулы для операций над комплексными числами:

$(a + b\cdot i) + (c + d\cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i;$

$(a + b\cdot i) - (c + d\cdot i) = (a - c) + (b - d) \cdot i;$

$(a + b\cdot i) \cdot (c + d\cdot i) = a\cdot c + b\cdot c\cdot i + a\cdot d\cdot i + b\cdot d\cdot i^2 = (a\cdot c - b\cdot d) + (b\cdot c + a\cdot d) \cdot i;$

$$\frac{a+b\cdot i}{c+d\cdot i}=\frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2}+\frac{b\cdot c-a\cdot d}{c^2+d^2}\cdot i$$

3. Извлечение корней, квадратные уравнения

Располагая комплексными числами, мы можем извлекать квадратный корень не только из числа -1, но и из любого другого отрицательного действительного числа, причём будем получать два различных значения. Именно, если –a есть отрицательное действительное число, т.е. a>0, то

$$\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a} \cdot i,$$

гд$\sqrt{a}$ - положительное значение квадратного корня из положительного числа a.

Возвращаясь к решению рассматривавшегося во введении квадратного уравнения с действительными коэффициентами, мы можем теперь сказать, что и в случае это уравнение имеет два различных корня, но уже комплексных.

Комплексных чисел достаточно и для того, чтобы извлекать корни из любых комплексных чисел. Именно, если дано комплексное число a+b·i, то

$$\sqrt{a + b \cdot i} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (-a + \sqrt{a^2 + b^2})},$$

где оба раза берётся положительное значение радикала . Видно, конечно, что при любых значениях a и b и первое слагаемое правой части и коэффициент i будут действительными числами. Каждый из этих двух радикалов имеет два значения, которые комбинируются друг с другом по следующему правилу: если b>0, то положительное значение одного радикала складывается с положительным значением другого, а отрицательное – с отрицательным; если же b<0, то положительное значение одного радикала складывается с отрицательным значением другого.

Пример. Извлечь квадратный корень из числа 21-20·i. Здесь:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{441 + 400} = 29,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (a + \sqrt{a^2 + b^2})} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (21 + 29)} = 5,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (-a + \sqrt{a^2 + b^2})} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (-21 + 29)} = \pm 2,$$

Т. к. b= -20, т. е. b<0, то комбинируются значения последних радикалов с разными знаками, т. е.

$$\sqrt{21 - 20 \cdot i} = \pm(5 - 2 \cdot i).$$

Переходя к вопросу об извлечении корня из любой целой положительной степени n из комплексных чисел можно доказать, что для любого комплексного числа α существует ровно n таких различных комплексных чисел, что каждое из них при возведении в n-ю степень, даёт число α. Иными словами справедлива следующая очень важная теорема:

Корень n-й степени из любого комплексного числа имеет ровно n различных комплексных значений.

Эта теорема применима и к действительным числам, которые являются частным случаем комплексных чисел: корень n-й степени из действительного числа А имеет ровно n различных значений, в общем случае комплексных; действительных среди этих значений, как известно, будет два, одно или ни одного в зависимости от знака числа А и чётности числа n.

Так, кубичный корень из единицы имеет три значения: 1, $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$

легко проверяется, что каждое из этих трёх значений , взятое в кубе, даёт единицу. Значениями корня четвёртой степени для единицы являются числа 1, -1, i и –i.

Выше была приведена формула для извлечения квадратного корня из комплексного числа a+b·i. Эта формула сводит извлечение указанного корня к извлечению квадратных корней из двух положительных действительных чисел. К сожалению, при n>2 не существует формулы, которая бы выражала корень n-й степени из комплексного числа a+b·i через действительные значения радикалов из некоторых вспомогательных действительных чисел; доказано, что такая формула и не может быть получена. Корни n-й степени из комплексных чисел извлекаются, как правило, путём перехода к новой записи этих чисел, т.н. тригонометрической.

4.Кубичные уравнения

Пусть дано уравнение $x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$. Преобразуем это уравнение, положив $x=y-a/3$, где y- новое неизвестное. Подставим это выражение x в наше уравнение, мы получим кубичное уравнение относительно некоторого неизвестного y, причём более простое, т.к. коэффициент при y^2 окажется равным нулю. Коэффициентом при первой степени y и свободным членом будут соответственно числа:

$$p = -\frac{a^2}{3} + b,\ q = \frac{2\cdot a^3}{27} - \frac{a\cdot b}{3} + c$$

т.е. уравнение сокращенно запишется в виде $y^3+p\cdot y+q=0$.

Если мы найдём корни этого нового уравнения, то, вычитая из них по a/3, получим корни исходного уравнения. Корни нашего нового уравнения выражаются через его коэффициенты при помощи следующей формулы:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Каждый из входящих в неё кубичных радикалов имеет, как мы знаем, три значения. Нельзя, однако, комбинировать их произвольным образом. Оказывается, что для каждого значения первого радикала можно указать одно единственное значение второго радикала, что произведение их равно числу –p/3. Именно эти два значения радикалов и нужно складывать для того, чтобы получить, таким образом, три корня нашего уравнения. Всякое кубичное уравнение с любыми числовыми коэффициентами имеет , следовательно три корня, в общем случае комплексных; некоторые из корней могут, конечно, совпасть, т.е. превратиться в кратный корень. Однако, практическое значение приведённой формулы весьма невелико.

5. О решении уравнений в радикалах и о существовании корней уравнений

Формулы для нахождения формул для решения уравнений третьей и четвертой степеней были найдены еще в XVI веке. В это же время начались поиски более сложной формулы для решения уравнений пятой степени и более высоких степеней. Эти поиски безуспешно продолжались до начала XIX века, когда был доказан следующий замечательный результат:

Ни для какого ***n****, большего или равного пяти , нельзя указать формулу, выражающую корни уравнения через его коэффициенты при помощи радикалов.*

Если бы существовало уравнение с числовыми коэффициентами, действительными или комплексными, такое, которое не имело бы ни одного действительного или комплексного корня, то возникла бы задача дальнейшего расширения запаса чисел. В этом, однако, нет необходимости: комплексных чисел достаточно для решения любого уравнения с числовыми коэффициентами. Именно, справедлива следующая теорема:

Всякое уравнение ***n****-й степени с любыми числовыми коэффициентами имеет* ***n*** *корней, комплексных или, в частности, действительных; некоторые из них могут, конечно, совпасть, т. е. оказаться кратными.*

Эта теорема называется «Основной теоремой высшей алгебры». Она была доказана Даламбером и Гауссом ещё в XVIII веке, хотя лишь в XIX веке эти доказательства были доведены до полной строгости.

6. Число действительных корней

Пусть дано уравнение n-й степени. Оно имеет, как мы знаем, n корней. Первые вопросы, которые естественно возникают, таковы: имеются ли среди них действительные, сколько их, где примерно они расположены? Ответ на эти вопросы может быть получен следующим путем. Обозначим многочлен, стоящий в левой части уравнения через $f(x)$. Построим график многочлена $f(x)$.

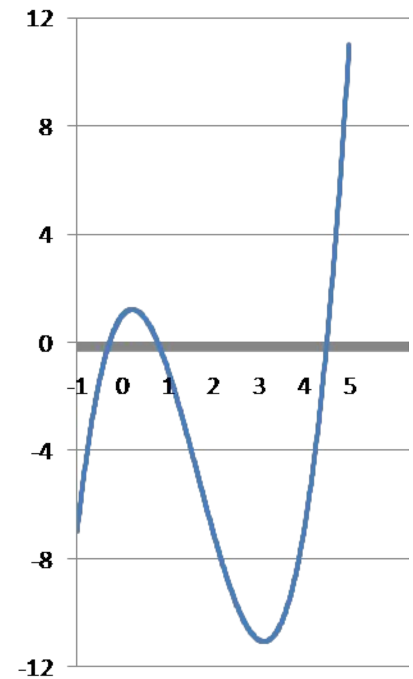
<u>Пример</u>. Построить график функции $f(x)=x^3-5\cdot x^2+2\cdot x+1$.

Составим таблицу значений многочлена $f(x)$, со значениями α, лежащими между -1 и 5 и построим график.

График показывает, что все три корня находятся на промежутках (-1;0), (0;1) и (4;5).

Иногда полезны следующие теоремы, дающие некоторые сведения о существовании действительных и даже положительных корней:

- <u>*Всякое уравнение нечётной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.*</u>
- <u>*Если в уравнении с действительными коэффициентами старший коэффициент A_o и свободный член A_n имеют разные знаки, то оно имеет хотя бы один положительный корень. Если же, уравнение имеет, кроме того, чётную степень, то оно обладает также и хотя бы одним отрицательным корнем.*</u>



α	$f(a)$
-1	-7
0	1
1	-1
2	-7
3	-11
4	-7
5	11

7. Приближённое решение уравнений

Зная значения, между которыми заключены корни уравнения $x^3-5\cdot x^2+2\cdot x+1=0$, мы можем уточнить корни уравнения. Пусть, например, нас интересует корень α_2, лежащий между нулём и единицей. Вычисляя значения левой части уравнения при x=0,1; 0,2; 0,3; . . . ; 0,9 , мы нашли бы, между какими двумя из этих последовательностей значений для x график многочлена $f(x)$ пересекает ось абсцисс, т.е. вычислили корень α_2 уже с точностью до одной десятой.

Продолжая так далее, мы могли бы найти значение корня с точностью до одной сотой, и до любой нужной точности. Однако, такой метод связан с громоздкими вычислениями, которые быстро становятся невыполнимыми. Ввиду этого разработаны различные методы, определяющие приближённые значения действительных корней уравнения.

Полезно, сначала найти более узкие границы корня. Для этого вычислим корень с точностью до одной десятой. Так $f(0,7)=0,293$, а $f(0,8)= -0,88$, а так как знаки значений различны, то $0,7<\alpha_2<0,8$.

Метод состоит в следующем. Пусть дано уравнение n-й степени, левую часть которого обозначим через f(x), и пусть уже известно, что между A и B лежит один действительный корень. По определённым формулам можно найти для корня α новые границы C и D. При этом будет или C<α<D, или D<α<C.

Граница C вычисляется по фор $C = \frac{b\cdot f(a)-a\cdot f(b)}{f(a)-f(b)}$.

Тогда, в нашем примере:

$$C = \frac{0,8\bullet 0,293-0,7\bullet(-0,088)}{0,293-(-0,088)} = \frac{0,2344+0,0616}{0,381} = 0,7769$$

Формула для границы D требует введения одного нового понятие, которое будет играть у нас лишь служебную роль; по существу же оно относится к другой части математики, дифференциальному исчислению.

Пусть дан многочлен n-й степени $f(x)=a_0\cdot x^n+a_1\cdot x^{n-1}+a_2\cdot x^{n-2}+ . . . +a_{n-2}\cdot x^2+a_{n-1}\cdot x+a_n$.

Назовём производной этого многочлена и обозначим $f'(x)$ следующий многочлен (n-1)-й степени:

$f'(x)=n\cdot a_0\cdot x^{n-1}+(n-1)\cdot a_1\cdot x^{n-2}+(n-2)\cdot a_2\cdot x^{n-3}+ . . . +2\cdot a_{n-2}\cdot x+a_{n-1}.$

Он получен из многочлена $f(x)$ по следующему правилу: каждый член $a_k\cdot x^{n-k}$ многочлена $f(x)$ умножается на показатель степени n-k при x, сам же показатель уменьшается на единицу; при этом свободный член a_n пропадает, так как можно считать, что $a_n=a_n\cdot x^0$.

От многочлена $f'(x)$ можно снова взять производную. Это будет многочлен (n-2)-й степени, который называется «второй производной» многочлена $f(x)$ и обозначается $f''(x)$.

Так, для рассматриваемого нами многочлена $f(x)=x^3-5\cdot x^2+2\cdot x+1$ будет:

$f'(x)=3\cdot x^2-10\cdot x+2$ и $f''(x)=6\cdot x-10$.

Граница d вычисляется по одной из следующих формул:

$$d = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad d = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Первая из них выбирается если знаки $f''(a)$ и $f(a)$ совпадают. В противном случае выбирается вторая.

В рассматриваемом примере вторая производная $f''(x)$ отрицательна как при a=0.7, так и при b=0.8. Поэтому, так как $f(a)>0$, то следует взять для d вторую формулу. Так как $f'(0.8)= - 4.08$, то

d=0.8-(-0.088/(-4.08)=0.8-0.0215≈0.7784.

Таким образом, мы нашли для корня α_2 следующие границы, много более узкие, чем те, которые были известны нам раньше: $0.7769<\alpha_2<0.7785$.

Отсюда следует, что если мы возьмём для α_2 среднее значение, $\alpha_2=0.7777$, то сделаем ошибку не превосходящую 0.008 – полуразности границ отрезка.

Если полученная точность недостаточна, то к найденным границам можно снова применить этот метод.

9.Заключение

Мы рассматривали всё время уравнения некоторой степени с одним неизвестным. Начало этой теории лежало еще в элементарной алгебре, где после изучения уравнений первой степени переходят к квадратным уравнениям. Однако в элементарной алгебре был сделан один шаг и в другом направлении: после изучения одного уравнения первой степени с одним неизвестным перешли к рассмотрению системы из двух уравнений с двумя неизвестными и системы из трёх уравнений с тремя неизвестными. Это направление получает дальнейшее развитие в курсе высшей алгебры, где изучаются методы решения любой системы из **n** уравнений **с n** неизвестными. Теория систем уравнений первой степени и связанные с ними методы решения, составляют особую ветвь алгебры – линейную алгебру; по своим применениям в геометрии и в других отраслях математики, а также в физике и теоретической механике она является первой среди всех частей алгебры.