

Проект урока по теме:  
«Построение графика функции  
методом ее исследования с  
помощью производной»



г. Новосибирск

2008

Автор:

учитель математики первой  
квалификационной категории  
МОУ лицей № 176  
Ткаченко Зоя Васильевна

Научный руководитель:

доцент кафедры математического  
образования  
Батан Любовь Федоровна

# *Аннотация*

Урок алгебры рекомендован для учащихся 10 класса,  
обучающихся по учебнику

**«Алгебра и математический анализ»**

для углубленного изучения математики  
в общеобразовательных учреждениях

авторов Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд.

Программа соответствует обязательному минимуму среднего  
(полного) общего образования. Приказ №56 от 30. 06. 1999г.

Издательство МНЕМОЗИНА  
Москва 2005

# *Актуальность*

Данная тема является очень важной и значимой, т. к. в материалах ЕГЭ большое внимание уделяется заданиям, связанным с исследованием функции с помощью графика, с построением графика заданной функции.

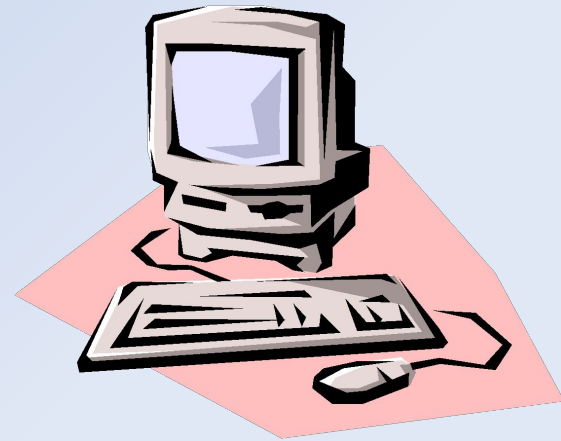
Успешное изучение этой темы поможет вам хорошо сдать государственный экзамен по математике

# *Тип урока*

Урок закрепления изученного материала в форме самостоятельной групповой работы по карточкам

*Оборудование:*

- Smart-доска;
- Сканер;
- Персональный компьютер;
- Карточка с заданием на каждой парте.



# *Цели урока*

- Для учителя
- Для ученика



# Цели урока

- Обобщить и закрепить свои знания и умения при построении графика функции с помощью ее исследования.
- Применить (ИКТ) новые информационные технологии для проверки результатов построения с помощью программы MathCAD
- Воспитывать такие качества личности, как познавательная активность, самостоятельность, упорство в достижении цели



# Цели урока

- Систематизировать, обобщить и расширить знания и умения учащихся при построении графиков функций.
- Развивать умения наблюдать, сравнивать, обобщать и анализировать математические ситуации с использованием ИКТ и программы MathCAD.
- Воспитывать такие качества личности, как познавательная активность, самостоятельность, упорство в достижении цели, коммуникативную и информационную культуру. Побуждать учеников к самоконтролю, взаимоконтролю и самоанализу своей деятельности.



# *Задачи урока*

Формировать устойчивый интерес к математике через дифференцированный подход к учащимся.

Вовлекать каждого ученика в процесс активного учения через интерактивные методы обучения.

Развивать познавательный интерес, графическую культуру, культуру речи, память, самостоятельность мышления.

# Содержание урока

1. Вводная беседа.
2. Устная работа.
3. Самостоятельная работа в группах.
4. Обобщение.
5. Итог.
6. Историческая справка.
7. Рефлексия.

# *Вводная беседа*

На уроке мы должны закрепить и обобщить свои знания и умения при построении графика функции с помощью производной и убедиться в правильности своего построения с помощью программы MathCAD.

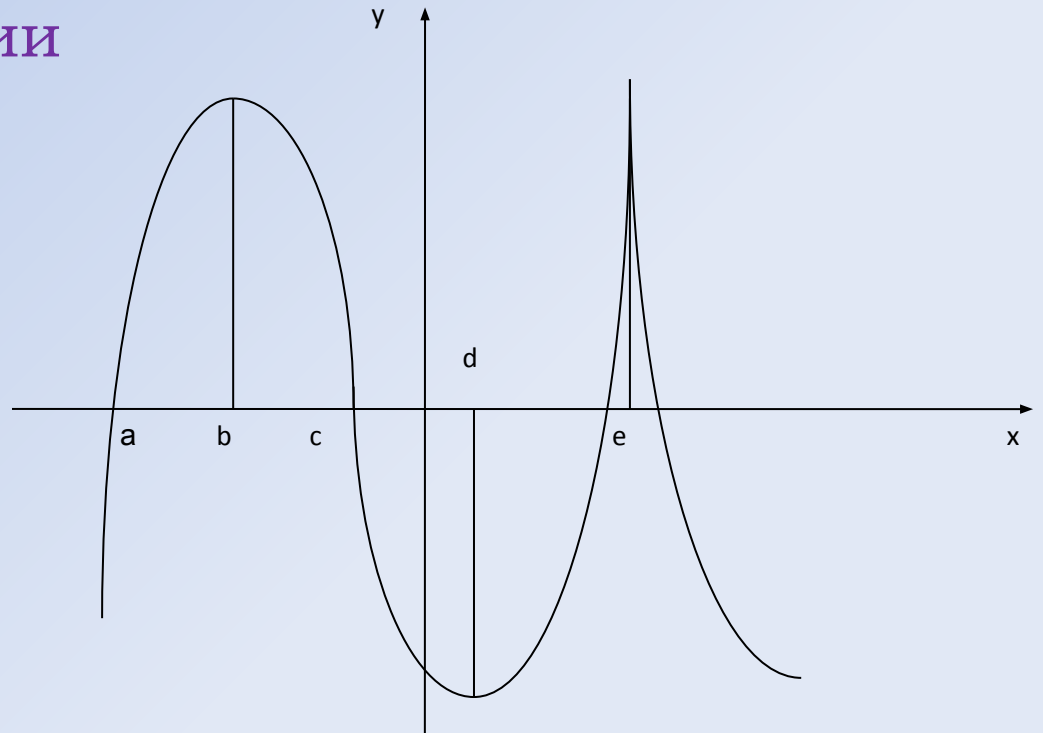


# Устная работа

**Задача 1.** По графику функции  $y=f(x)$ , изображенному на рисунке, определить точки, в которых:

– Производная функции не существует:

- $x = e$ ;
- $x = b$ ;
- $x = d$ ;
- $x = 0$ .

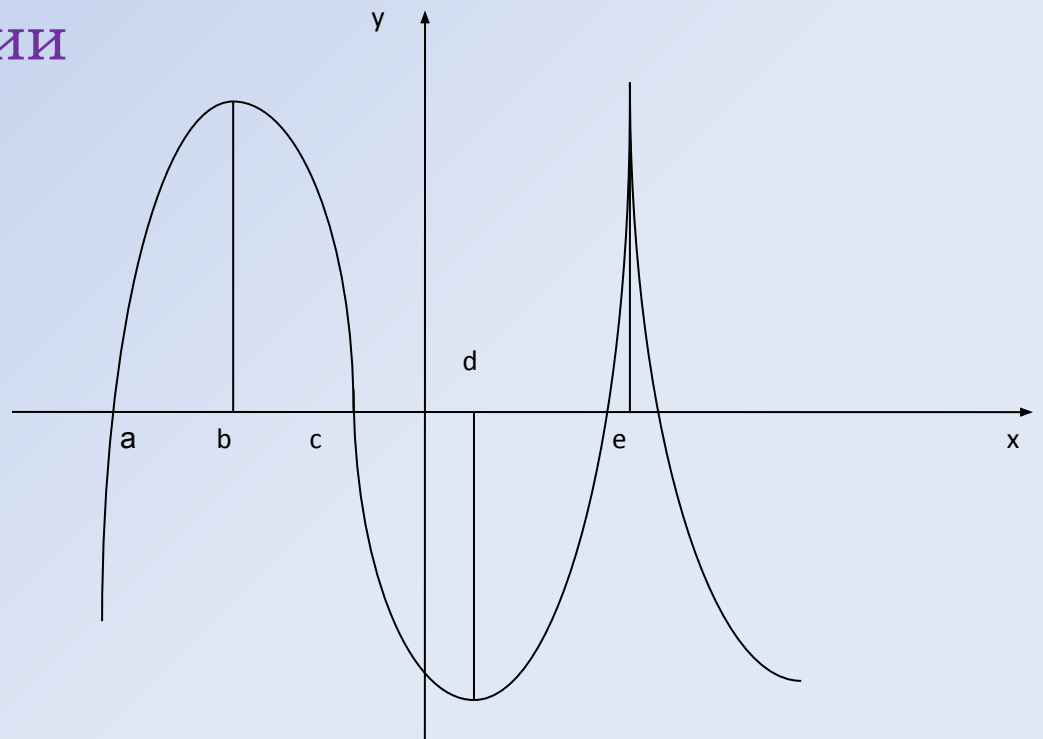


# Устная работа

**Задача 1.** По графику функции  $y=f(x)$ , изображенному на рисунке, определить точки, в которых:

– Производная функции обращается в ноль:

- $x = b, x = d;$
- $x = c, x = a;$
- $x = b, x = e, x = d;$
- $x = e.$

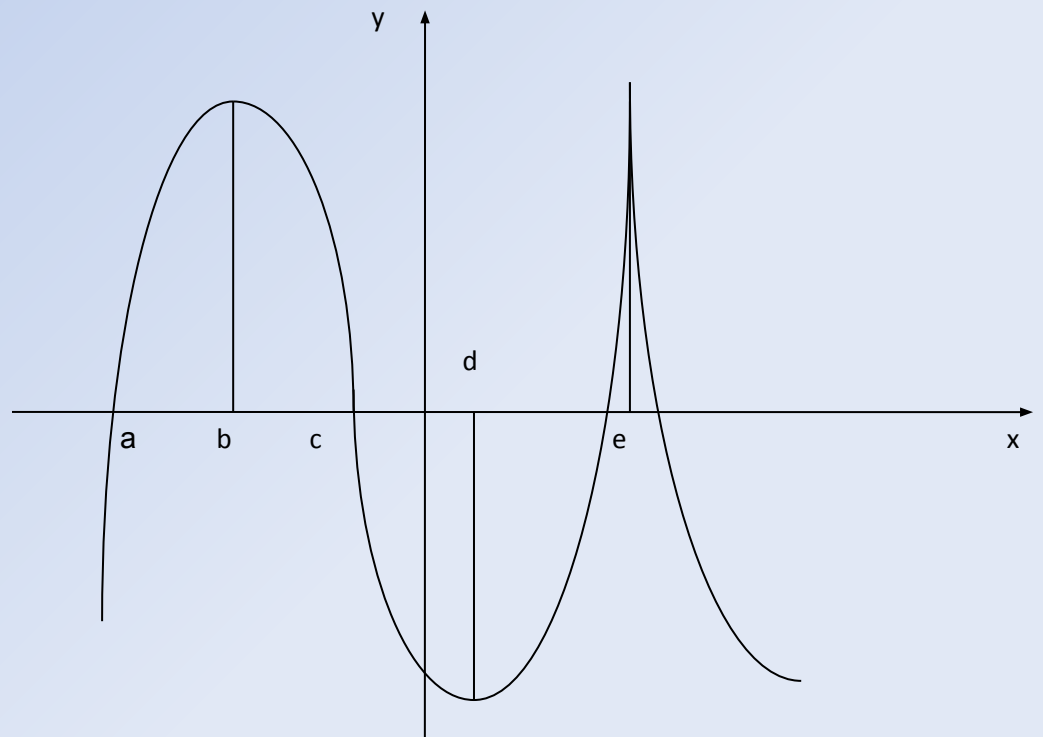


# Устная работа

**Задача 1.** По графику функции  $y=f(x)$ , изображенному на рисунке, определить:

– Точки максимума функции:

- $x = e$ ;
- $x = b$ ;
- $x = b, x = e$ ;
- нет точек максимума нет точек максимума.

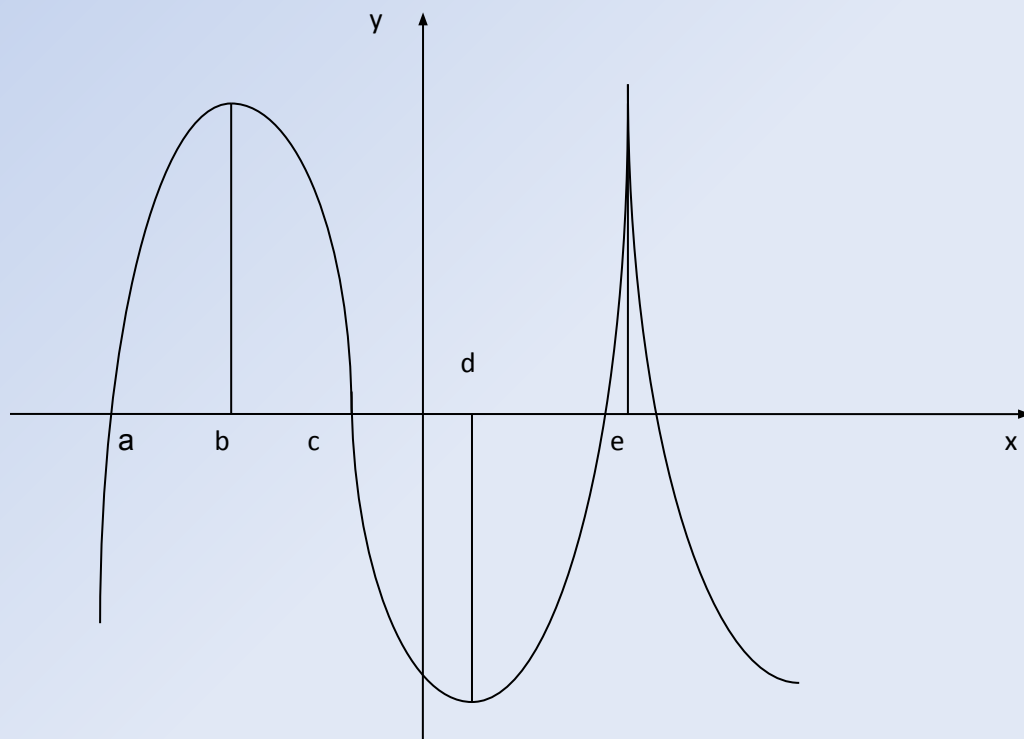


# Устная работа

**Задача 1.** По графику функции  $y=f(x)$ , изображенному на рисунке, определить:

– промежутки убывания функции:

- $[b;d]$   $[b;d]$  и  $[b;d]$  и  $[e;+\infty)$ ;
- $(-\infty;b]$   $(-\infty;b]$  и  $(-\infty;b]$  и  $[d;e]$ .

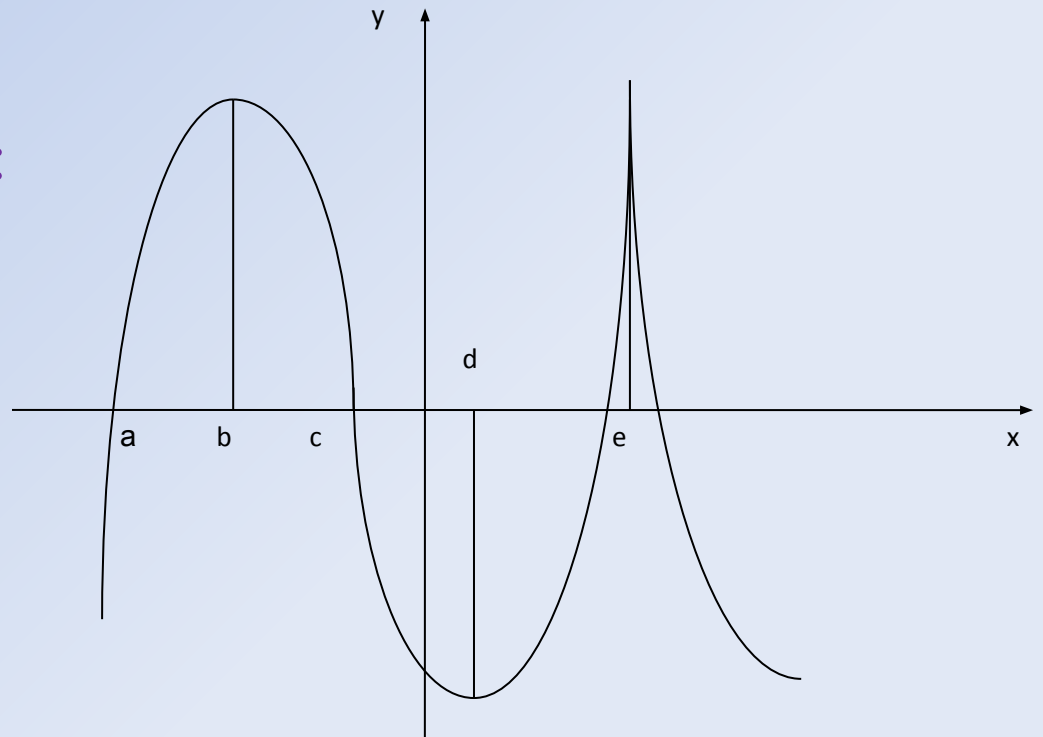


# Устная работа

**Задача 1.** По графику функции  $y=f(x)$ , изображенному на рисунке, определить:

– Промежутки возрастания функции:

- $[b;d]$   $[b;d]$  и  $[b;d]$  и  $[e;+\infty)$ ;
- $(-\infty;b]$   $(-\infty;b]$  и  $(-\infty;b]$  и  $[d;e]$ .



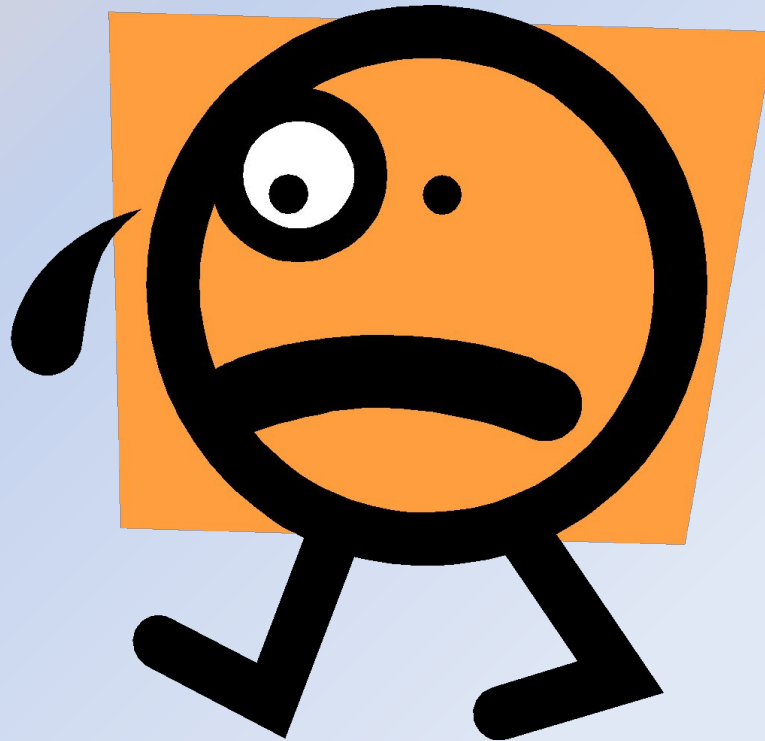


*Отлично!*

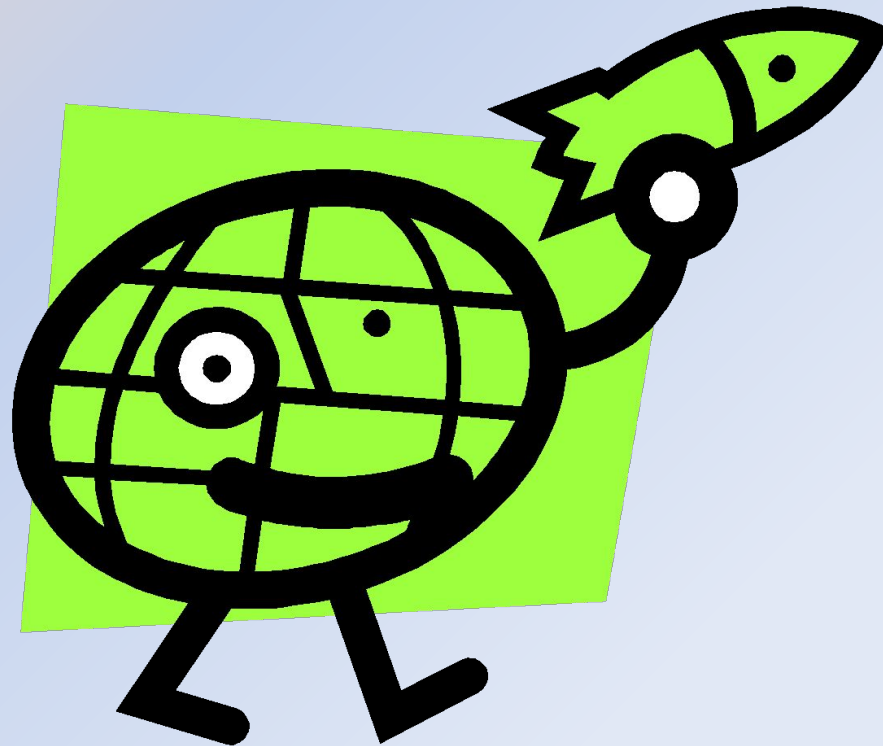


*Далее*

*Подумай ещё!*

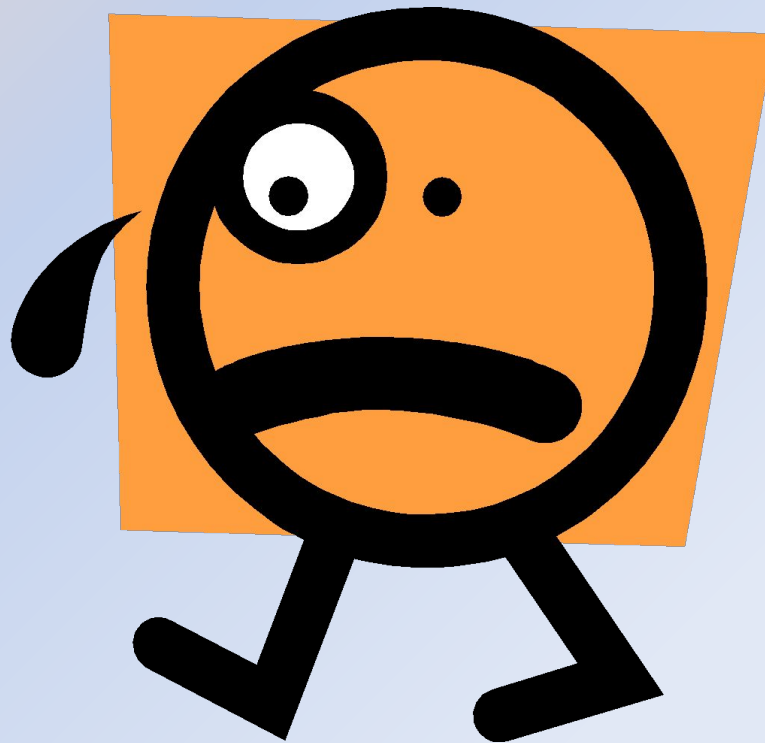


*Отлично!*



*Далее*

*Подумай ещё!*

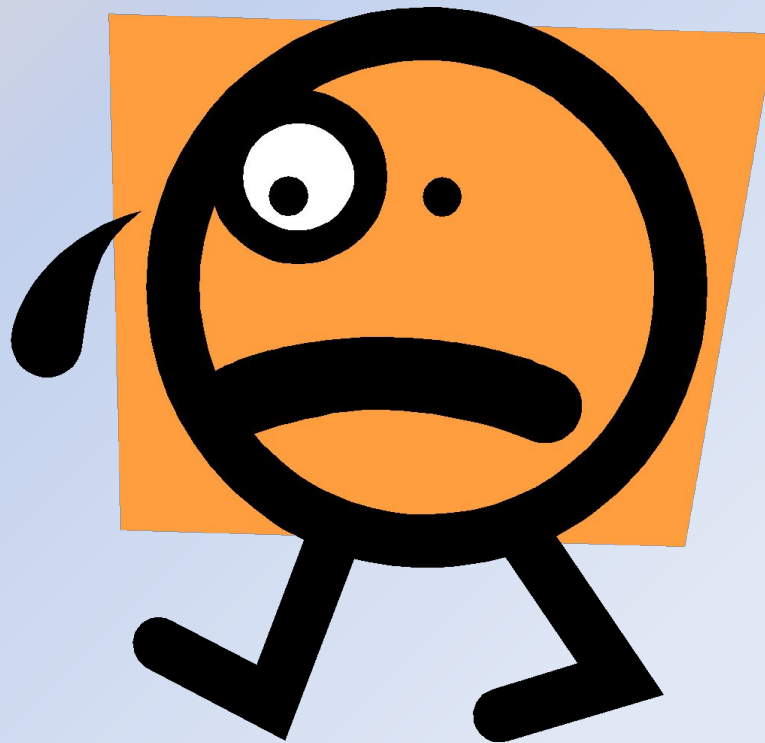


*Отлично!*



*Далее*

*Подумай ещё!*

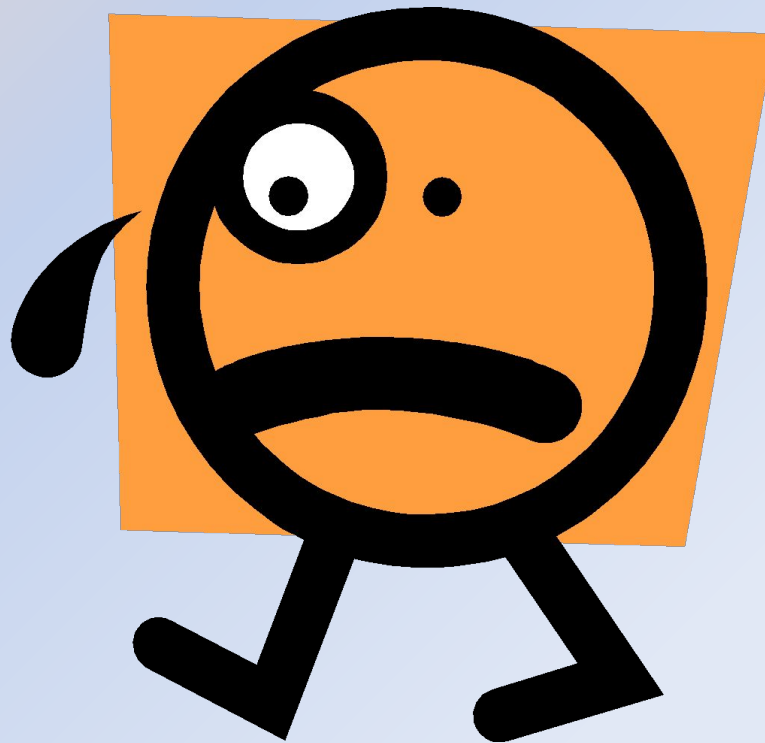


*Отлично!*



*Далее*

*Подумай ещё!*



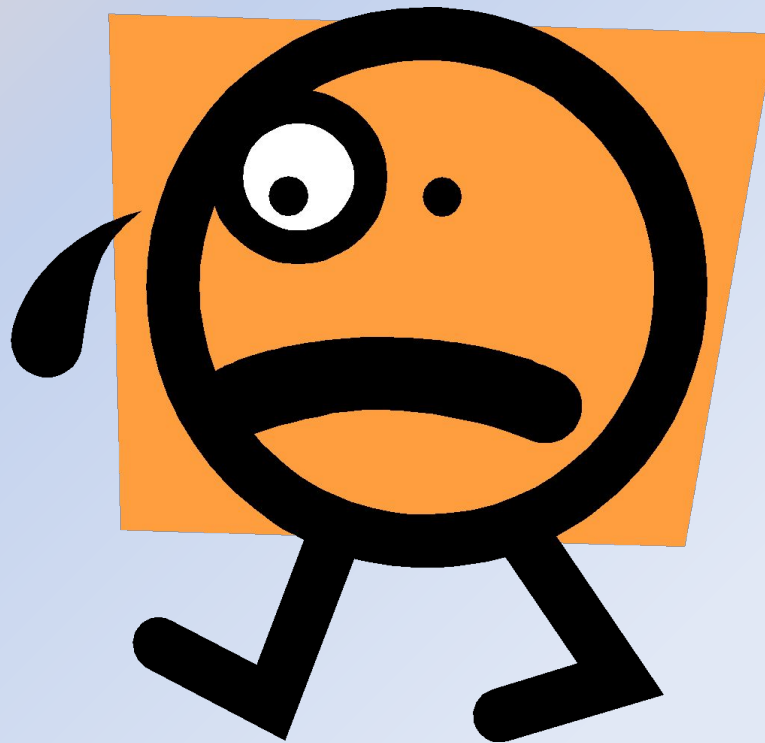


*Отлично!*



*Далее*

*Подумай ещё!*



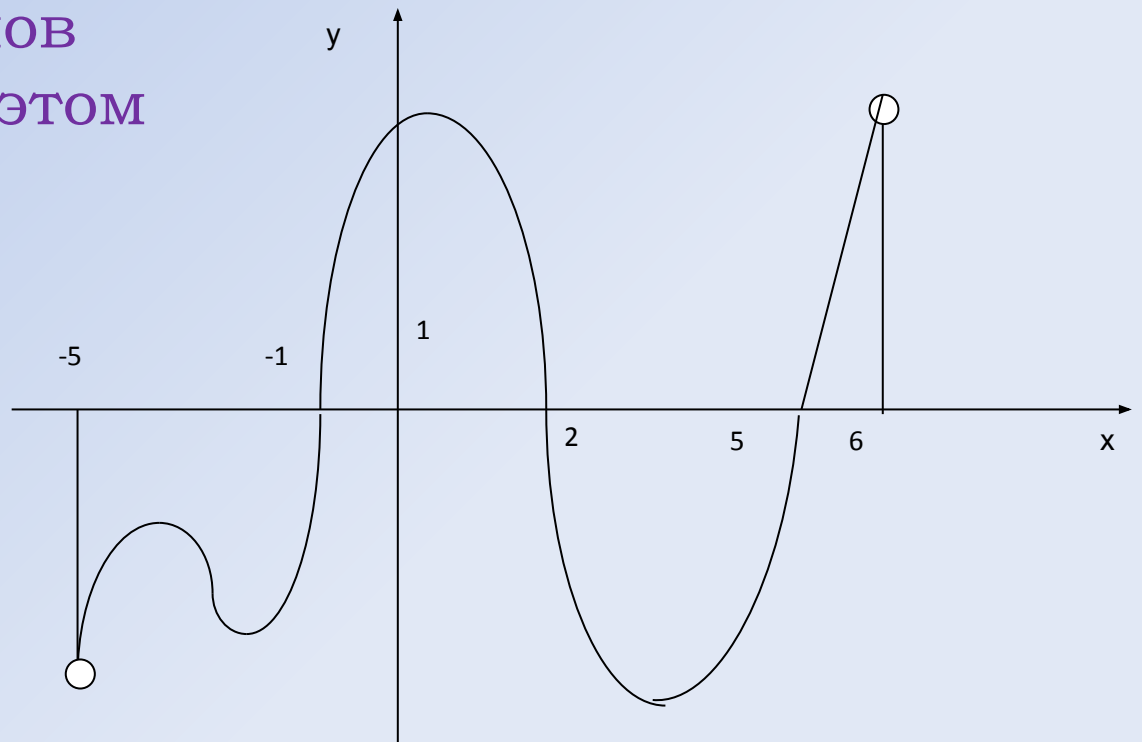
# Устная работа

**Задача 2.** На рисунке изображен график производной функции  $y=f(x)$  на промежутке  $(-5;6)$ .

Сколько экстремумов имеет функция на этом промежутке?

- 3
- 4
- 6
- 1

Правильный ответ



*Правильный ответ*

3

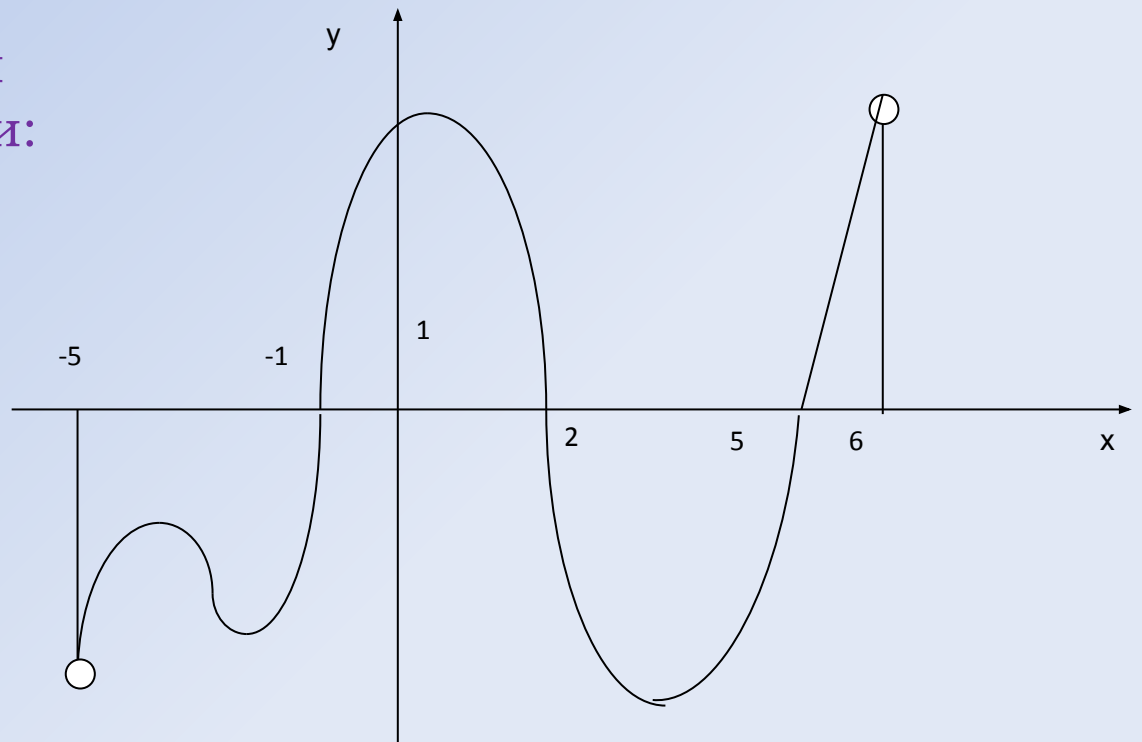


# Устная работа

**Задача 2.** На рисунке изображен график производной функции  $y=f(x)$  на промежутке  $(-5;6)$ .

-назвать промежутки возрастания функции:

- $[-1;2]$  и  $[5;6)$
- $[3;6)$  и  $[-2;1]$
- $(-5;-4]$



Правильный ответ

*Правильный ответ*

$[-1;2]$  и  $[5;6)$

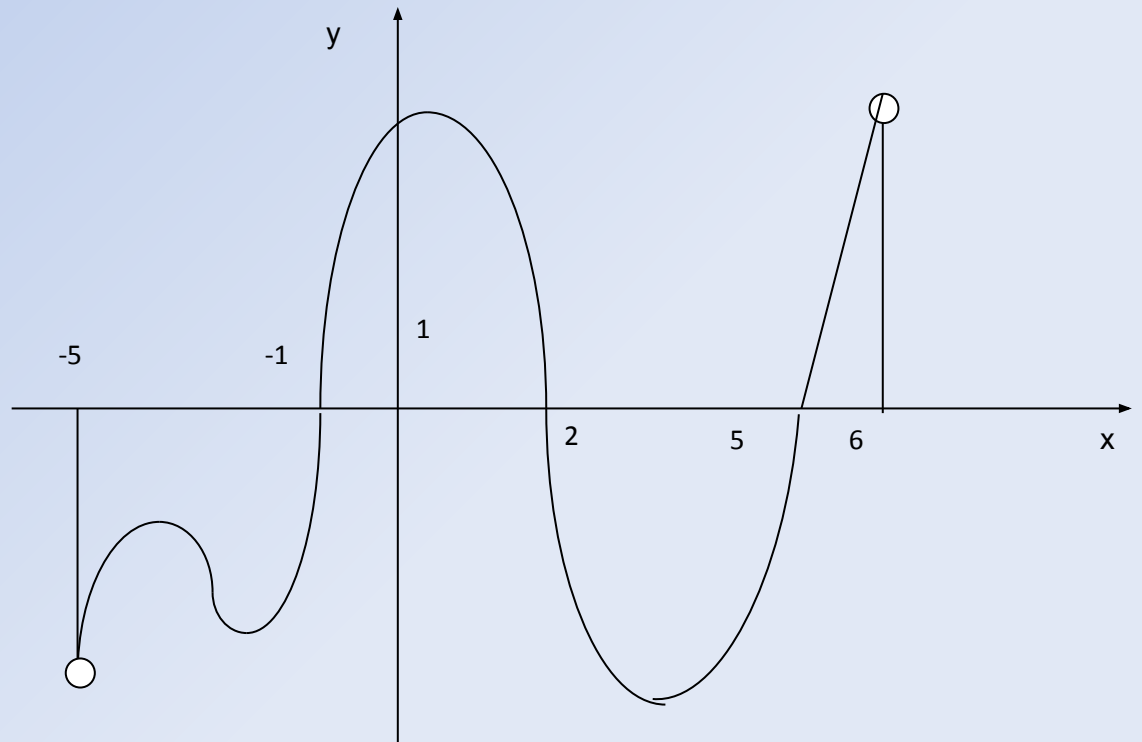


# Устная работа

На рисунке изображен график производной функции  $y=f(x)$  на промежутке  $(-5;6)$ .

Назвать промежутки убывания функции:

- $[-1;2]$  и  $[5;6)$
- $[3;6)$  и  $[-2;1]$
- $(-5;-1)$  и  $[2;5]$



Правильный ответ

*Правильный ответ*

$(-5; -1]$  и  $[2; 5]$

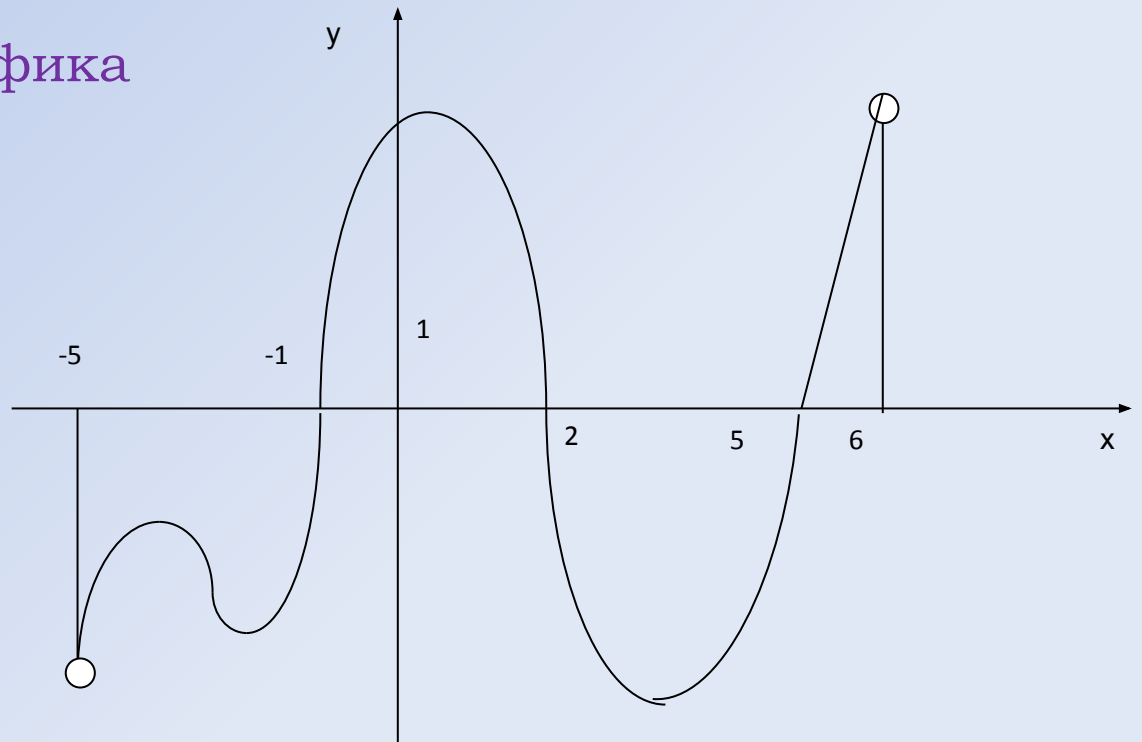




# Устная работа

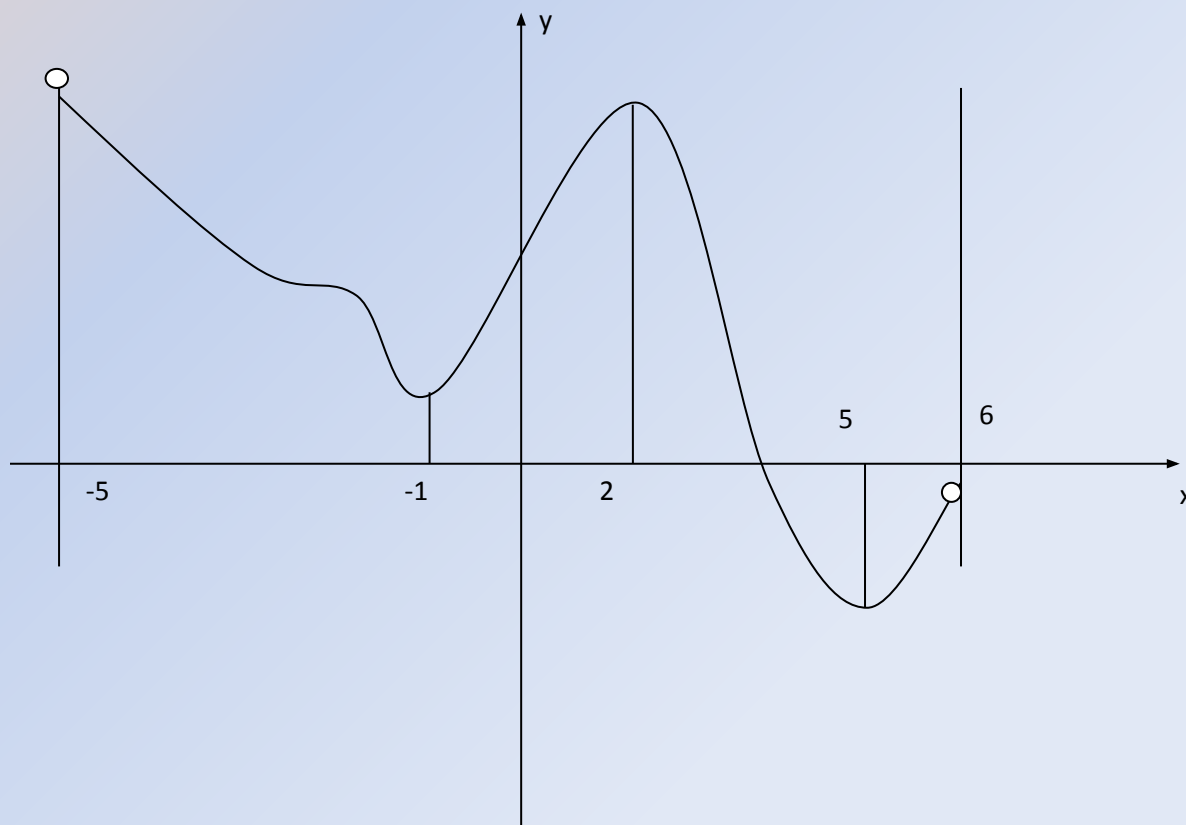
**Задача 2.** На рисунке изображен график производной функции  $y=f(x)$  на промежутке  $(-5;6)$ .

-построить эскиз графика функции:



Проверь себя

# Эскиз графика функции $y=f(x)$



# Устная работа

*Задача 3.* Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 9}$$

[Проверь себя](#)

# Ответ

$x=2$  – вертикальная асимптота

$y=x$  – наклонная асимптота



## Самостоятельная работа учащихся

Класс делится на 3 группы. Каждая группа учащихся получает задание на карточке.

Первая группа – задание базового уровня.

Вторая группа – задание основного уровня.

Третья группа – задание продвинутого уровня.

*Задание:* Исследовать функцию с помощью производной и построить ее график.

Исследовав функцию с помощью производной и построив ее график на листе бумаги, учащиеся сканируют свою работу и сохраняют ее на Smart – доске.

Осуществляют самопроверку с помощью программы MathCAD.

Уровни

# *Уровни*

базовый уровень

основной уровень

продвинутый уровень

# Задание группе 1

Базовый уровень:

Исследовать функцию и  
построить ее график

$$y = x^4 - 8x^2$$

[Назад](#)

[Справка](#)

[Проверь себя](#)

## Задание группе 2

Основной уровень:  
Исследовать функцию и  
построить ее график

$$y = 3x^5 - 5x^3$$

[Назад](#)

[Справка](#)

[Проверь себя](#)



# Задание группе 3

Продвинутый уровень:  
Исследовать функцию и  
построить ее график

$$y = x + \frac{4}{x}$$

[Назад](#)

[Справка](#)

[Проверь себя](#)

# *Вспомните план исследования:*

1. Область определения функции.
2. Множество значений функции.
3. Чётность.
4. Периодичность.
5. Первая производная: по ней определяются участки монотонности и точки экстремума.
6. Вторая производная: по ней определяются участки выпуклости и вогнутости и точки перегиба.
7. Точки пересечения с осями координат.
8. Таблица значений.

[Назад](#)

# *Вспомните план исследования:*

1. Область определения функции.
2. Множество значений функции.
3. Чётность.
4. Периодичность.
5. Первая производная: по ней определяются участки монотонности и точки экстремума.
6. Вторая производная: по ней определяются участки выпуклости и вогнутости и точки перегиба.
7. Точки пересечения с осями координат.
8. Таблица значений.

# *Вспомните план исследования:*

1. Область определения функции.
2. Множество значений функции.
3. Чётность.
4. Периодичность.
5. Первая производная: по ней определяются участки монотонности и точки экстремума.
6. Вторая производная: по ней определяются участки выпуклости и вогнутости и точки перегиба.
7. Точки пересечения с осями координат.
8. Таблица значений.

[Назад](#)

# Проверь себя

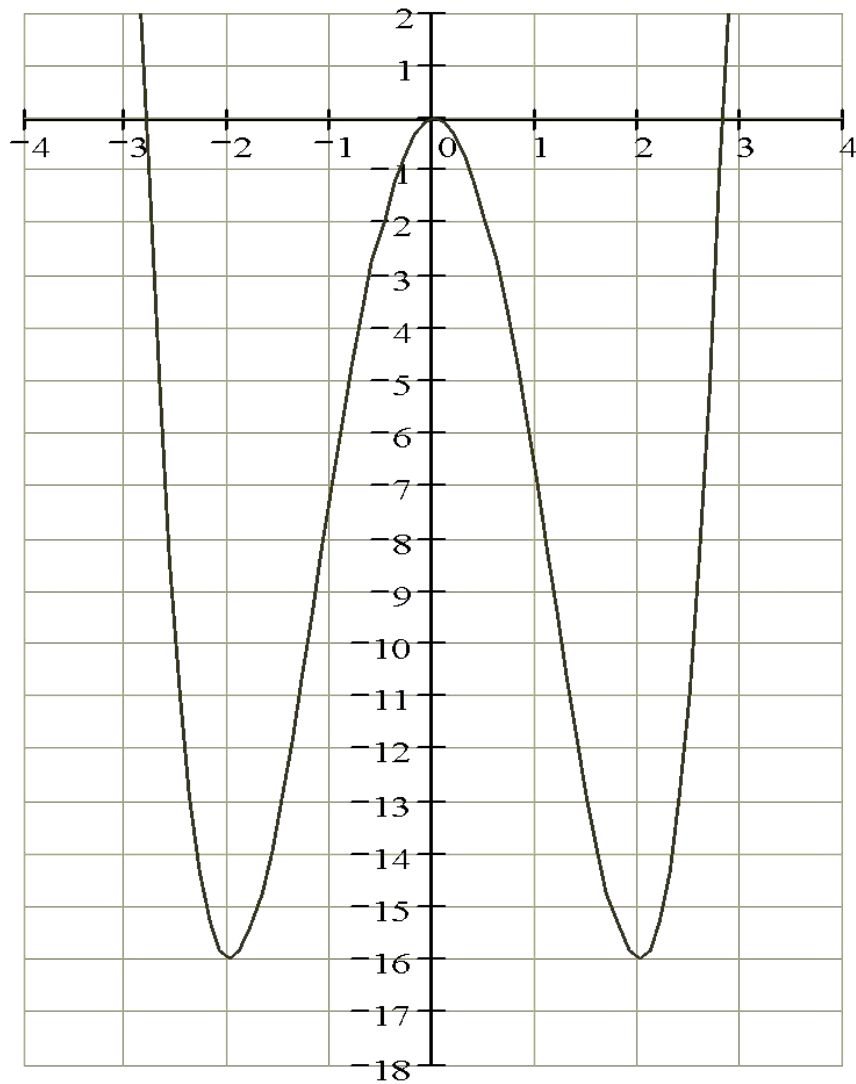
Замечаем, что функция четная и ее график симметричен оси ОУ, достаточно исследовать ее на интервале от 0 до  $+\infty$ .

Данные исследования заносим в таблицу:

$x$	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 0)$	$0$	$(0, 2)$	$2$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	убывает	-16	возрастает	0	убывает	-16	возрастает

[График](#)

$$\frac{x^4 - 8x^2}{x}$$



x

[Посмотрите в](#)  
Посмотрите в  
[MathCAD](#)Посмо  
трите в  
MathCAD([e](#)).

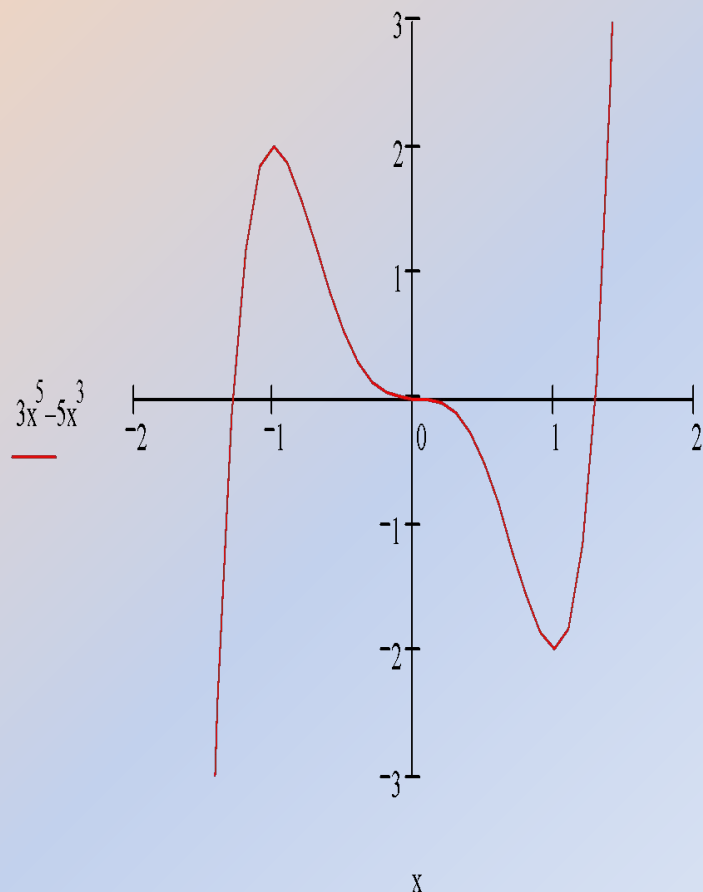


$$y = 3x^5 - 5x^3$$

*Дополнительное задание:*

*Ответить, используя график, на вопросы:*

- 1. Сколько критических точек имеет функция ?*
- 2. Чему равна точка минимума ?*
- 3. Чему равен минимум функции ?*
- 4. Чему равна точка максимума ?*
- 5. Чему равен максимум функции ?*
- 6. При каком наименьшем натуральном значении  $a$  уравнение  $f(x)=a$  имеет одно решение ?*
- 7. При каком наибольшем целом значении  $a$  это уравнение имеет 3 решения ?*
- 8. При каких значениях  $a$  уравнение имеет 2 решения ?*
- 9. Есть ли значения  $a$ , при которых уравнение не имеет корней ?*



[Посмотрите в](#)  
Посмотрите в  
[MathCAD](#)Посмот

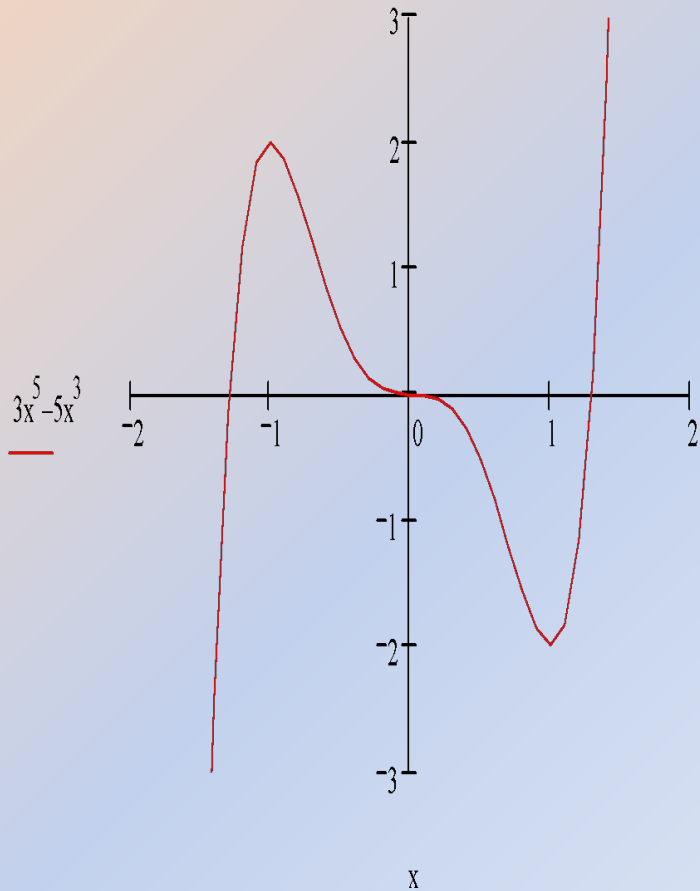
[Ответы:](#)

$$y = 3x^5 - 5x^3$$

### Дополнительное задание:

Ответить, используя график, на вопросы:

1. Сколько критических точек имеет функция? (3)
2. Чему равна точка минимума? (1)
3. Чему равен минимум функции? (-2)
4. Чему равна точка максимума? (-1)
5. Чему равен максимум функции? (2)
6. При каком наименьшем натуральном значении  $a$  уравнение  $f(x)=a$  имеет одно решение? ( $a = 3$ )
7. При каком наибольшем целом значении  $a$  это уравнение имеет 3 решения? ( $a = 1$ )
8. При каких значениях  $a$  уравнение имеет 2 решения? (-2 и 2)
9. Есть ли значения  $a$ , при которых уравнение не имеет корней? (нет)







# Ответ:

Если  $a = \pm 4$ , то одно решение.

Если  $|a| > 4$ , то два решения.

Если  $-4 < a < 4$ , то нет решений.



# Обобщение

- Графики функций можно строить «по точкам». Однако при таком способе построения можно пропустить важные особенности графика.
- Можно строить график функции с помощью преобразований:
  - сдвига прямой на **a** единиц;
  - растяжения прямой от точки  $O$  с коэффициентом  $k$ ;
  - центральной симметрии относительно точки  $O$ ;
  - симметрии относительно оси абсцисс и оси ординат.
- А можно строить график методом исследования функции с помощью производной.

# Итог

Методы математического анализа позволяют строить достаточно точный график заданной функции, если только удастся хорошо изучить свойства этой функции.

Вот что сказал Декарт по поводу методов:

«Под методом же я разумею точные и простые правила, строгое соблюдение которых всегда препятствует принятию ложного за истинное, и без излишней траты умственных сил, но постепенно и непрерывно увеличивая знания, способствует тому, что ум достигает истинного познания всего, что доступно.»

[Далее](#)

# Историческая справка

Математика развивалась стремительно, но без понятия производной многие исследования не имели смысла.

В 1679 году Пьер Ферма находил экстремумы функции, касательные, наибольшие и наименьшие значения функций. Но в своих записях он использовал сложнейшую символику Виета, и поэтому эти исследования не привели к созданию теории интегральных и дифференциальных исчислений.

В 1736 году Исаак Ньютон получил теорию интегральных и дифференциальных исчислений методом флюксий (производных). Но вся теория была осмыслена с точки зрения физики. Математики хотели строгих логических обоснований.

Современник Ньютона Лейбниц предложил новый подход к математическому анализу. Он ввёл обозначения дифференциала, интеграла, функции, такие понятия как ордината, абсцисса, координата. Но в его теории было много “тёмных мест”.

И вот в 18 веке величайший математик Леонард Эйлер создал теорию дифференциальных и интегральных исчислений, и в таком виде она изучается и по сей день.

[Ход урока](#)

[Далее](#)

# Рефлексия

Ответив на вопросы, оцените свои умения.

Исследуя функцию с помощью производной, я научился находить :

- ✓ Область определения функции;
- ✓ Определять четность функции;
- ✓ Критические точки и выделять из них точки экстремума;
- ✓ Промежутки монотонности функции;
- ✓ Точки перегиба;
- ✓ Промежутки выпуклости;
- ✓ Строить график функции

*Спасибо за урок*

До свидания!!!

Удачи вам!!!

# Литература

1. Программы для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев. Математика, 5-11 классы; М. : Дрофа 2004.
2. Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд . Алгебра и математический анализ 11. Учебник для углубленного изучения математики в общеобразовательных учреждениях. М.: Мнемозина, 2005.
3. И.Н. Галицкий. Дидактические материалы по алгебре для 10 класса, учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1998.
4. И.Н. Галицкий и др. Методическое пособие для учителя «Углубленное изучение алгебры и математического анализа в 10 классе». М.: Просвещение, 2000.