Функция у = cos x

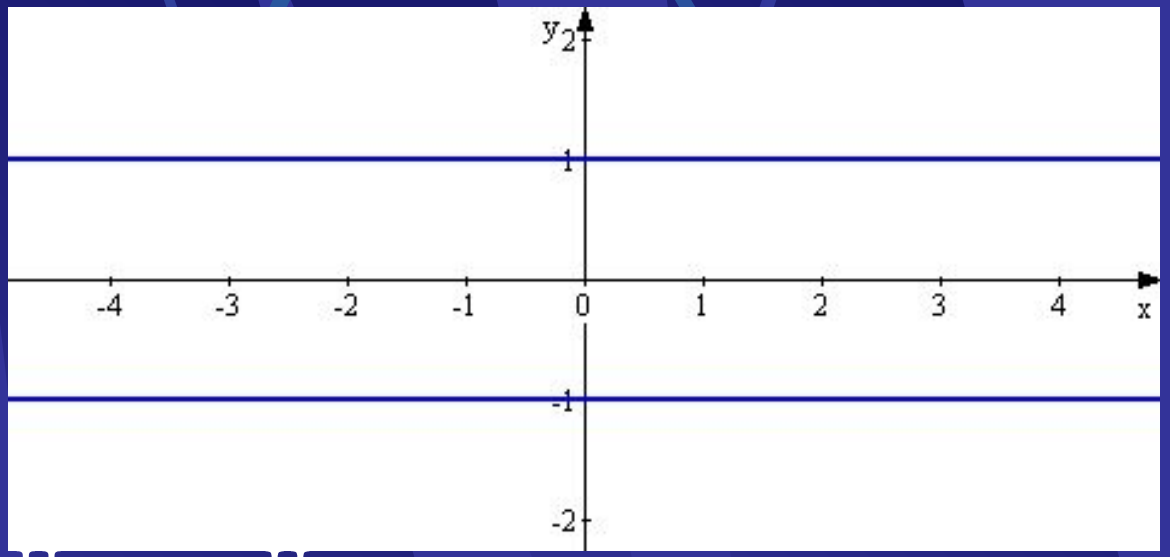
Ее свойства и график

Сегодня мы рассмотрим

- **Построение графика функции y = cos x;**
- **Свойства функции y = cos x;**
- **Изменение графика функции y = cos x в зависимости от изменения функции и аргумента;**
- **Изменение свойств функции y = cos x в зависимости от изменения функции и аргумента;**
- **Примеры построения графиков функций путем анализа изменения их свойств.**

Построение графика

- **Функция *y = cos x* определена на всей числовой прямой и множеством ее значений является отрезок [-1; 1]. Следовательно, график этой функции расположен в полосе между прямыми *y = -1 и y = 1*.**



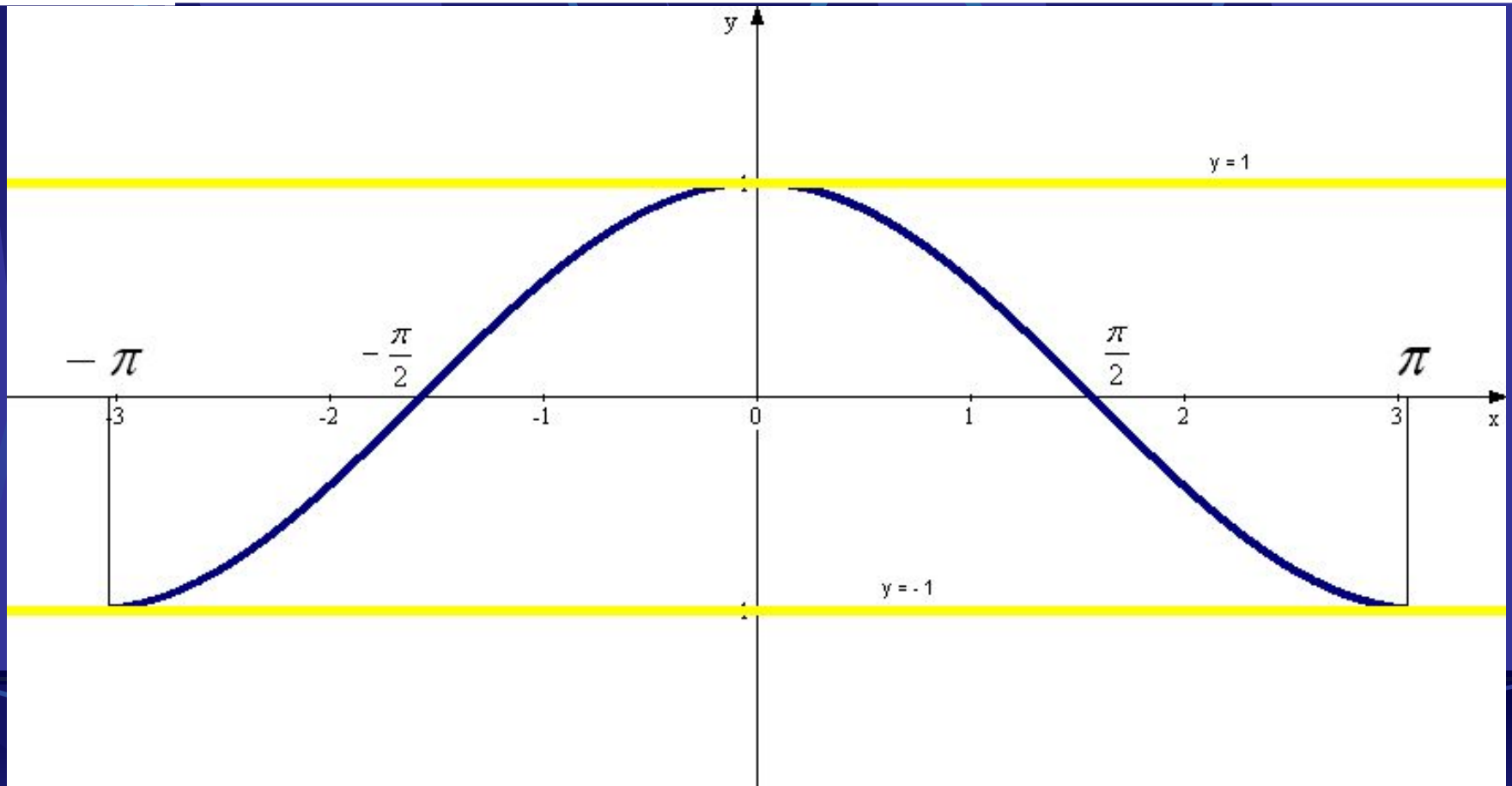
Как использовать периодичность и четность при построении

- Так как функция периодическая с периодом 2π, то достаточно построить ее график на каком – нибудь промежутке длиной 2π, например на отрезке $-\pi \le x \le \pi$; тогда на промежутках, получаемых сдвигами выбранного отрезка на $2\pi n$, $n \in Z$, график будет таким – же.

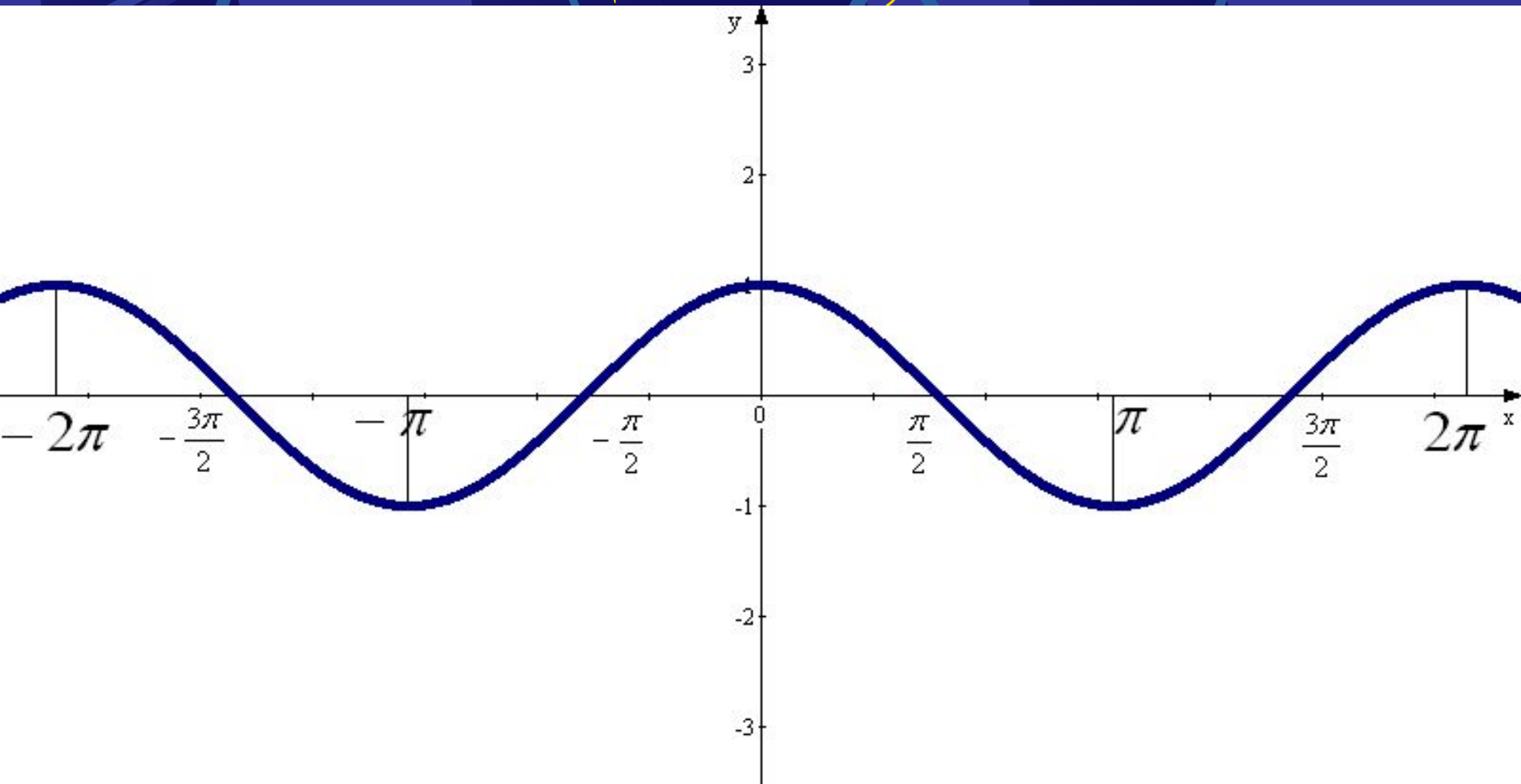
- Функция $y = \cos x$ является четной. Поэтому ее график симметричен относительно оси OY. Для построения графика на отрезке $-\pi \le x \le \pi$ достаточно построить его для $0 \le x \le \pi$, а затем симметрично отразить относительно оси OY.

Найдем несколько точек для построения графика на отрезке [0; π] и отразим, полученную часть графика симметрично относительно оси OY.

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π
y=cos x	1	√3/2	√2/2	½	0	-½	-√2/2	-√3/2	-1



Распространим полученный график на всей числовой прямой с помощью сдвигов на 2π, 4π и т.д. вправо, на -2π, -4π и т.д. влево, т.е. вообще на $2\pi n$, $n \in Z$.



Итак, график функции y = cos x построен геометрически на всей числовой прямой, начиная с построения его части на отрезке [0; π]. Поэтому свойства функции y = cos x можно получить , опираясь на свойства этой функции на отрезке [0; π]. Например, функция y = cos x возрастает на отрезке [-π; 0], так как она убывает на отрезке [0; π] и является четной.

Перечислим основные свойства функции y = cos x.

Для этого нужно вспомнить

- **Как найти область определения и множество значений тригонометрических функций;**
- **Какие функции называются периодическими и как найти период функции;**
- **Какие функции называются четными (нечетными);**
- **Когда функция возрастает (убывает);**
- **Как найти нули функции;**
- **Как определить на каких промежутках функция принимает положительные (отрицательные) значения;**
- **Как определить когда функция принимает наибольшее (наименьшее) значения.**

Область определения

- **Каждому действительному числу x соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки (1; 0) на угол x радиан. Для этого угла определены $\sin x$ и $\cos x$. Тем самым каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $\sin x$ и $\cos x$, т.е. на множестве R всех действительных чисел определены функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$.**

- ***Таким образом, областью определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество R всех действительных чисел.***

Множество значений

- **Чтобы найти множество значений функции $y = \cos x$, нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т.е. установить, для каких значений y есть такие значения x, при которых $\cos x = y$. Известно, что уравнение $\cos x = a$ имеет корни, если $|a| \leq 1$, и не имеет корней, если $|a| > 1$.**

- ***Следовательно множеством значений функции $y = \cos x$ является отрезок $-1 \leq y \leq 1$.***

Периодичность

- **Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из ее области определения выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T называется периодом функции.**

- **Известно, что для любого значения x верны равенства $sin(x + 2\pi) = sin\ x$, $cos(x + 2\pi) = cos\ x$. Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса периодически повторяются при изменении аргумента на 2π. Такие функции называются периодическими с периодом 2π.**

Четность, нечетность

- **Функция $y = f(x)$ называется четной, если для каждого значения x из ее области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, график симметричен относительно оси ординат.**

- **Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если для каждого значения x из ее области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, график симметричен относительно начала координат.**

Возрастание, убывание

- **Функция $y = f(x)$ называется возрастающей, если наибольшему (наименьшему) значению функции соответствует наибольшее (наименьшее) значение аргумента. Т.е. если $y_1 > y_2$ $(y_1 < y_2)$, *то* $x_1 > x_2$ $(x_1 < x_2)$.**

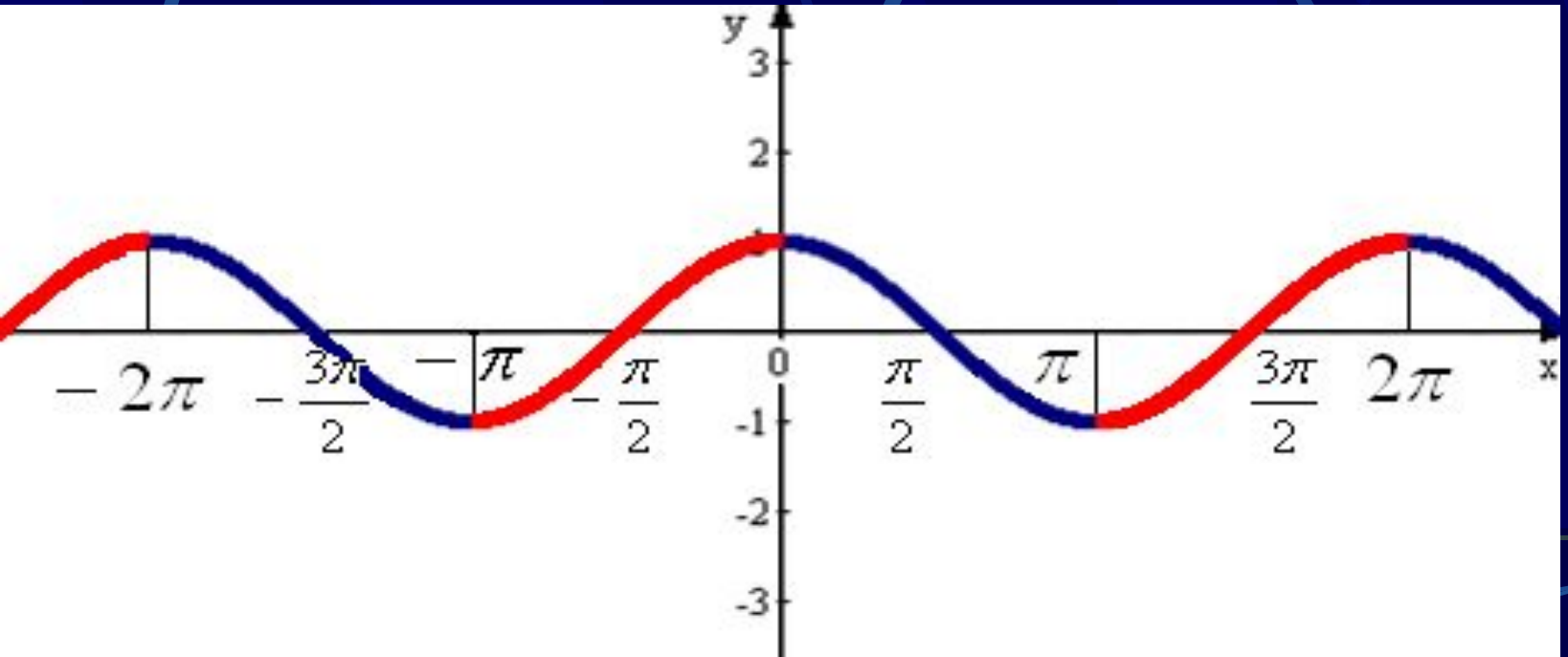
- **Функция $y = f(x)$ называется убывающей, если наибольшему (наименьшему) значению функции соответствует наименьшее (наибольшее) значение аргумента. Т.е. если $y_1 > y_2$ $(y_1 < y_2)$,** то **$x_1 < x_2$ $(x_1 > x_2)$.**

Нули функции, положительные и отрицательные значения, наименьшее и наибольшее значения.

- Для того чтобы определить когда функция $y = \cos x$ принимает значения, равные:
  - нулю;
  - положительные;
  - отрицательные;
  - наименьшее;
  - наибольшее,
- необходимо решить:
  - уравнение $\cos x = 0$;
  - неравенство $\cos x > 0$;
  - неравенство $\cos x < 0$;
  - уравнение $\cos x = -1$;
  - уравнение $\cos x = 1$;

Свойства функции y = cos x

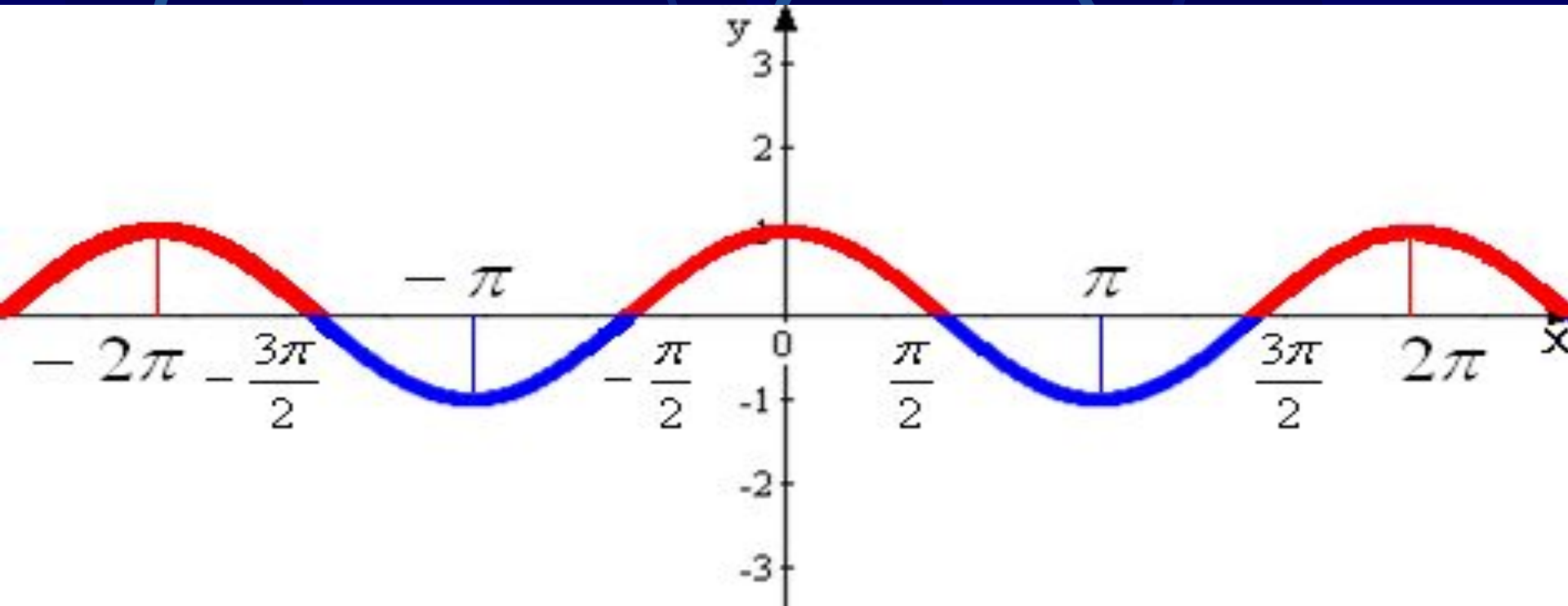
- **Область определения:** D(f): $x \in R$;
- **Множество значений:** $y \in [-1;1]$;
- **Периодичность:** $T = 2\pi$;
- **Четность:** *четная, т.к.* $\cos(-x) = \cos x$, *график симметричен относительно оси ординат;*
- **Функция возрастает при:** $\pi+2\pi n \le x \le 2\pi(n+1), n \in Z$;
- **Функция убывает при:** $\pi n \le x \le \pi + 2\pi n, n \in Z$.



Свойства функции y = cos x

(продолжение)

- **Функция принимает значения:**
  - **Равные нулю при $x=\pi/2+\pi n,\ n\in Z$;**
  - **Положительные при $-\pi/2+2\pi n < x < \pi/2+2\pi n,\ n\in Z$;**
  - **Отрицательные при $\pi/2+2\pi n < x < 3\pi/2+2\pi n,\ n\in Z$;**
  - **Наибольшее, равное 1, при $x = 2\pi n,\ n \in Z$;**
  - **Наименьшее, равное –1, при $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.**



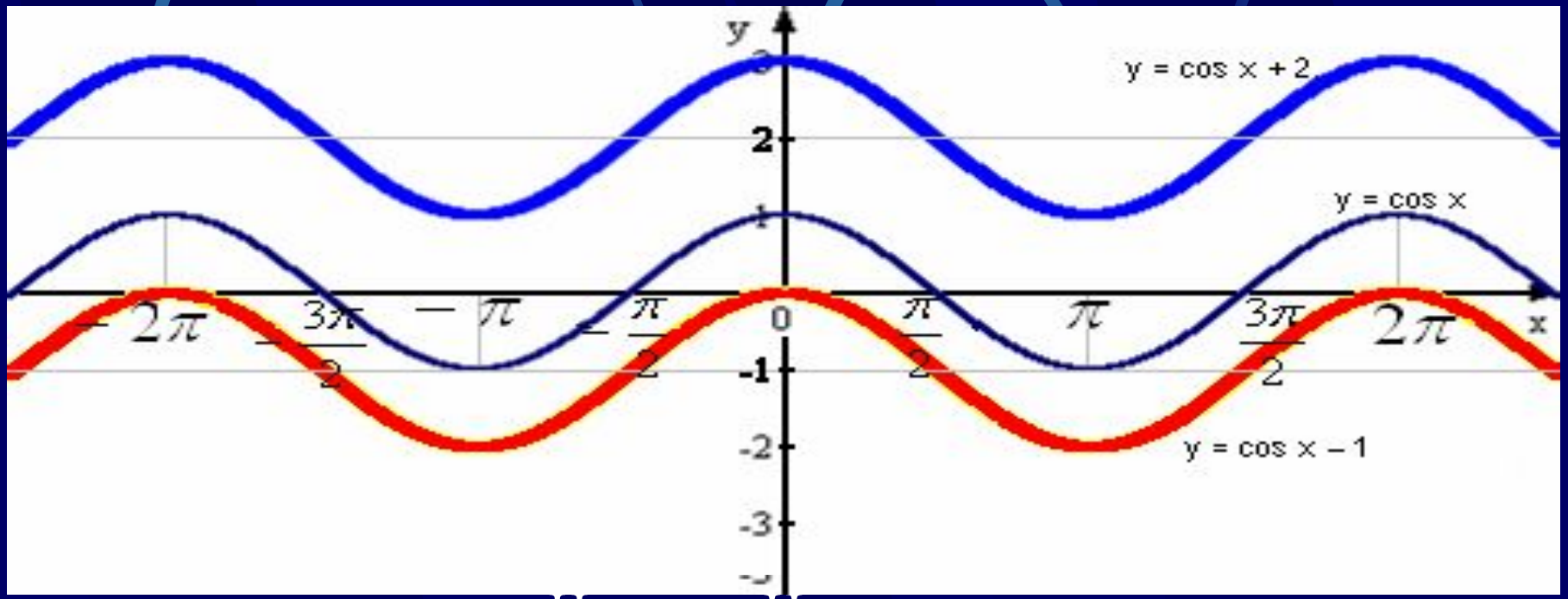
Преобразование графика функции y = cos x

- Изменение функции
  - $y = \cos x + A$
  - $y = k \cdot \cos x$
  - $y = - \cos x$
  - $y = |\cos x|$

- Изменение аргумента
  - $y = \cos (x - a)$
  - $y = \cos (k \cdot x)$
  - $y = \cos (- x)$
  - $y = \cos |x|$

y = cos x + A

- **Параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси ординат на A единиц вверх, если A > 0 и на |A| единиц вниз, если A < 0.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos x + 2; y = cos x – 1.***



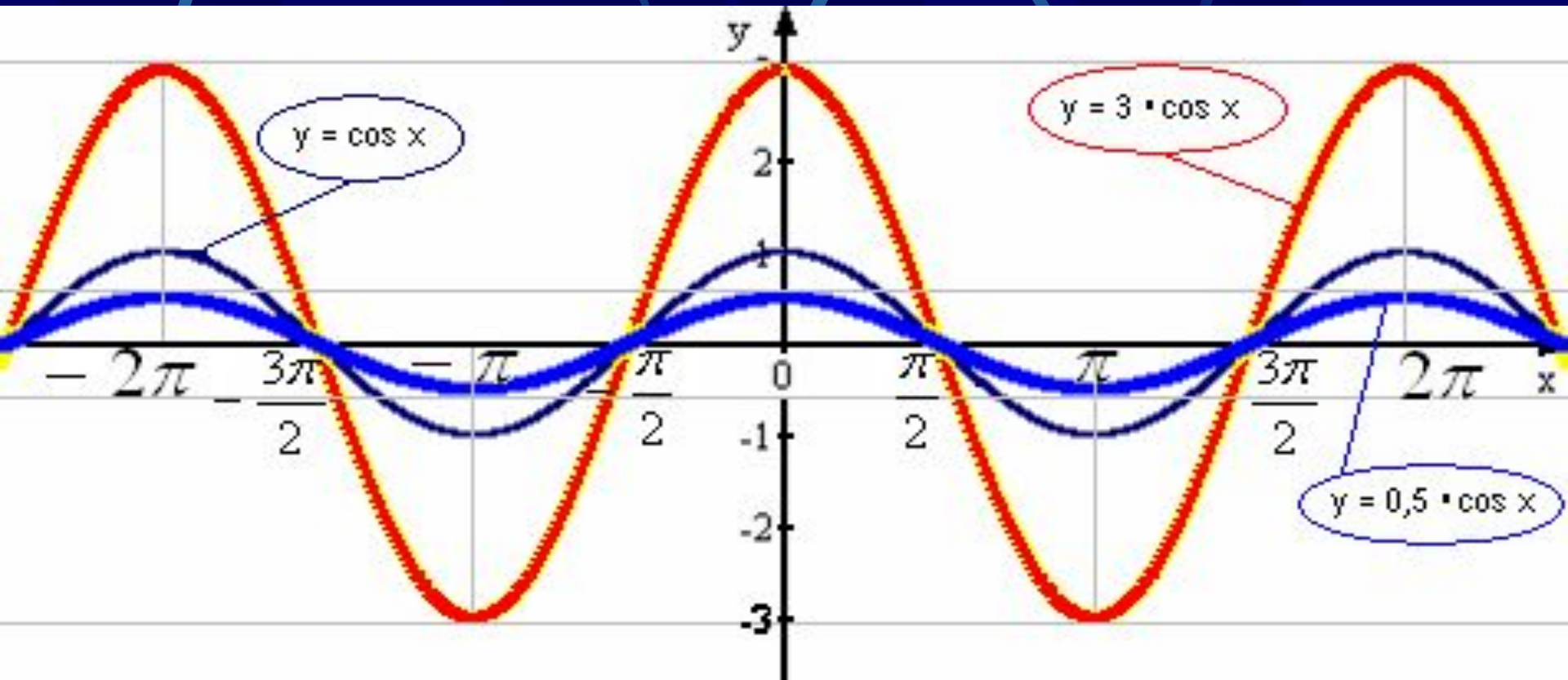
y = cos x + A (свойства)

- **Изменяются множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения; нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**
- **Например:** $y = \cos x + 2$.

  - *E (f):* $\cos x + 2 = a \Rightarrow \cos x = a - 2$, *т.к.* $-1 \le y \le 1$, *то* $-1 \le a - 2 \le 1 \Rightarrow 1 \le a \le 3$, *т.е.* $y \in [1; 3]$.
  - *Нули функции:* $\cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -2$ *данное уравнение не имеет корней т.к.* $|-2| > 1 \Rightarrow$ *график данной функции не пересекает ось абсцисс.*
  - $f(x) > 0$: *при любом значении x.*
  - $f(x) < 0$: *нет.*
  - y *(наиб)* $= 3$, *при:* $x = 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $\cos x + 2 = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n,\ n \in Z$).
  - y *(наим)* $= 1$, *при:* $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $\cos x + 2 = 1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$).

y = k · cos x

- **Растяжение графика функции y = cos x вдоль оси ординат относительно оси абсцисс в k раз, если k > 0 и сжатие в 1/k раз, если 0 < k < 1.**
- **Например:** ***y = 3 • cos x;*** ***y = 0,5 • cos x.***

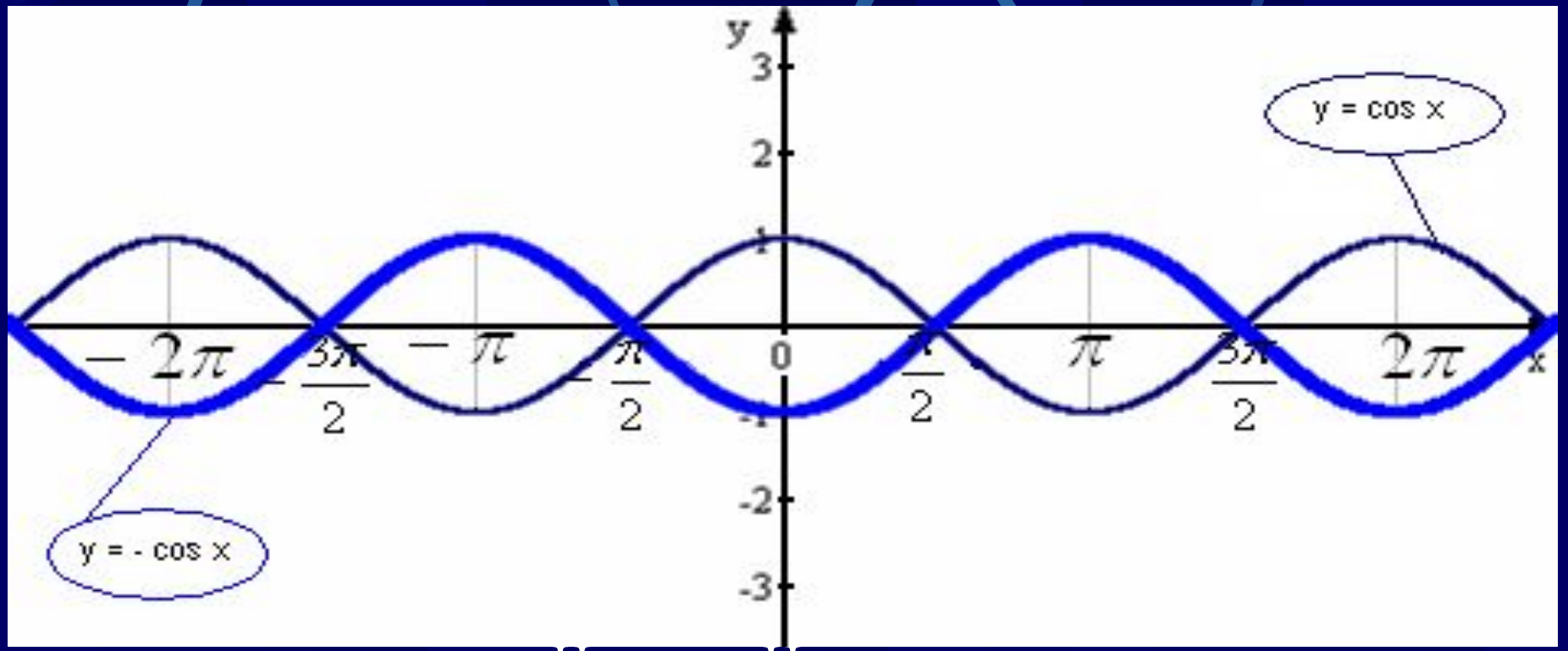


$y = k \cdot \cos x$ (свойства)

- **Изменяется множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения.**
- **Например:** $y = 3 \cdot \cos x$
  - ***E (f):*** $3 \cdot \cos x = a \Rightarrow \cos x = a/3$, *т.к.* $-1 \le y \le 1$, *то* $-1 \le a/3 \le 1 \Rightarrow -3 \le a \le 3$, *т.е.* $y \in [-3; 3]$.
  - ***Функция принимает наибольшее значение, равное 3, при:*** $x = 2\pi n, n \in Z$ (*т.к.* $3\cos x = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in Z$).
  - ***Функция принимает наименьшее значение, равное – 3, при:*** $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ (*т.к.* $3\cos x = -3 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in Z$).

y = - cos x

- **Симметричное отражение графика функции y = cos x относительно оси абсцисс.**

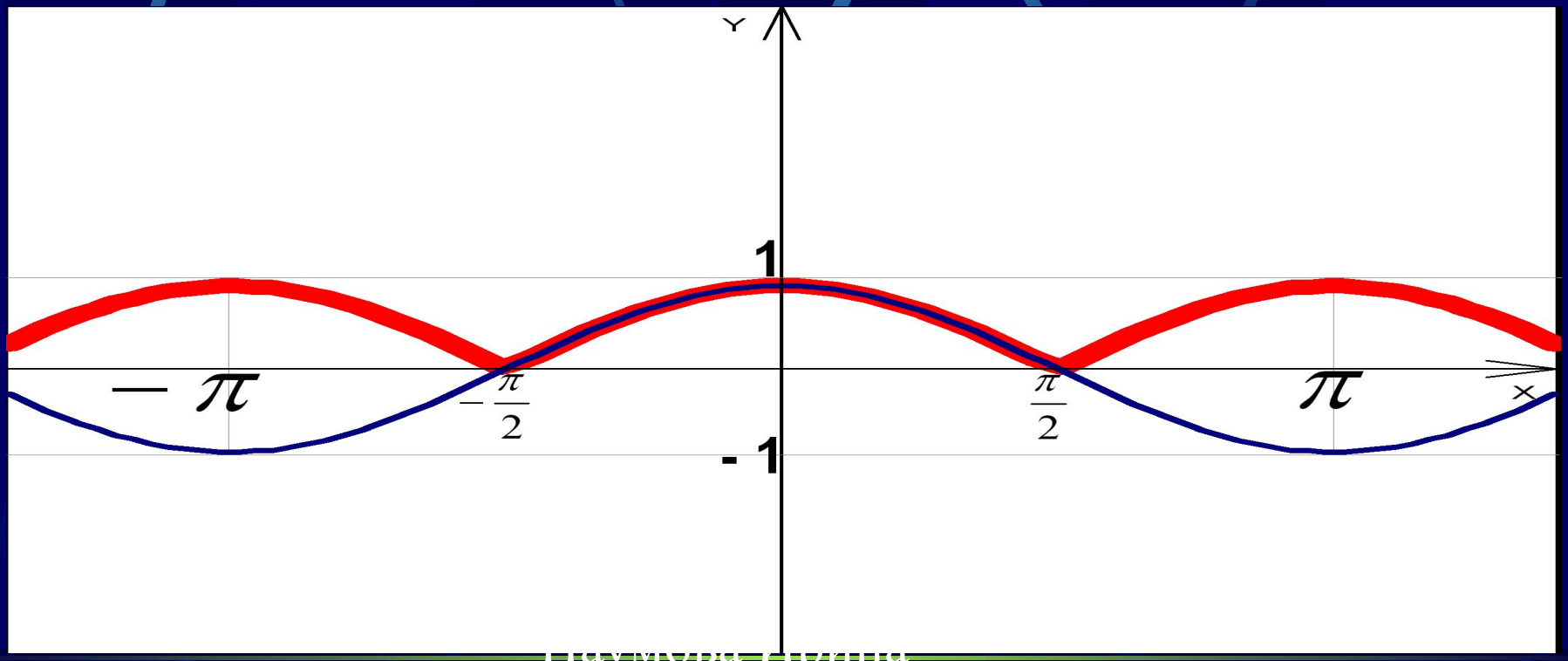


y = - cos x (свойства)

- **Изменяются промежутки возрастания (убывания); промежутки положительных (отрицательных) значений.**
  - ***Функция возрастает* на отрезке [0; π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn, n = ±1, ±2, ±3…**
  - ***Функция убывает* на отрезке [π; 2π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn, n = ±1, ±2, ±3…**
  - ***Функция принимает положительные значения* на интервале (π/2; 3π/2) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn, n = ±1, ±2…**
  - ***Функция принимает отрицательные значения* на интервале (-π/2; π/2) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn, n = ±1, ±2…**

y = | cos x |

- **Часть графика, расположенная ниже оси абсцисс симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения.**

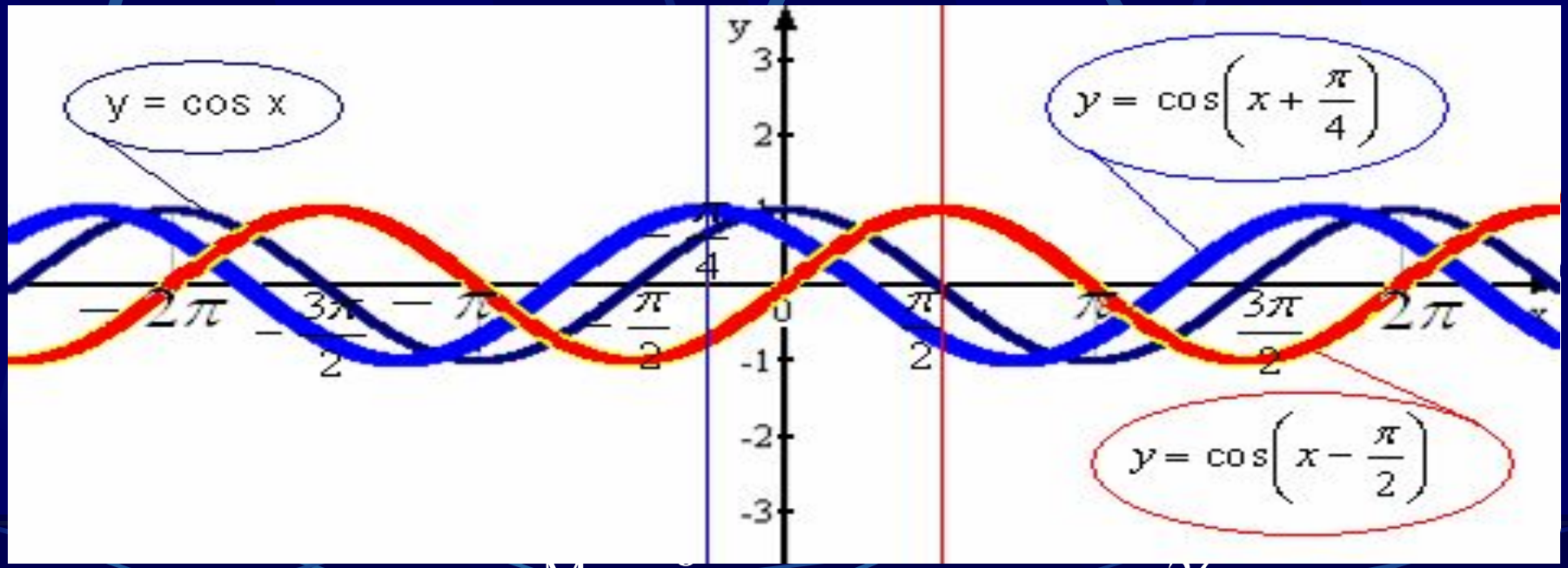


y = |cos x| (свойства)

- **Изменяются: множество значений функции; период; промежутки возрастания (убывания); наибольшее (наименьшее) значение.**
  - ***E (f):*** $y \in [0; 1]$
  - ***Периодичность:*** $T = \pi$
  - ***Функция возрастает на промежутке*** $(\pi/2; \pi) + \text{сдвиги на } \pi n, n \in Z$
  - ***Функция убывает на промежутке*** $(0; \pi/2) + \text{сдвиги на } \pi n, n \in Z$
  - ***f (x) > 0:*** *при любом значении x*
  - ***f (x) < 0:*** *нет*
  - ***y (наиб) = 1,*** $\text{при } x = 2\pi n, n \in Z$
  - ***y (наим) = 0,*** $\text{при } x = \pi/2 + \pi n, n \in Z$

y = cos (x – a)

- **Параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс на a единиц вправо, если a > 0, на |a| единиц влево, если a < 0.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos (x - π/2); y = cos (x +π/4).***



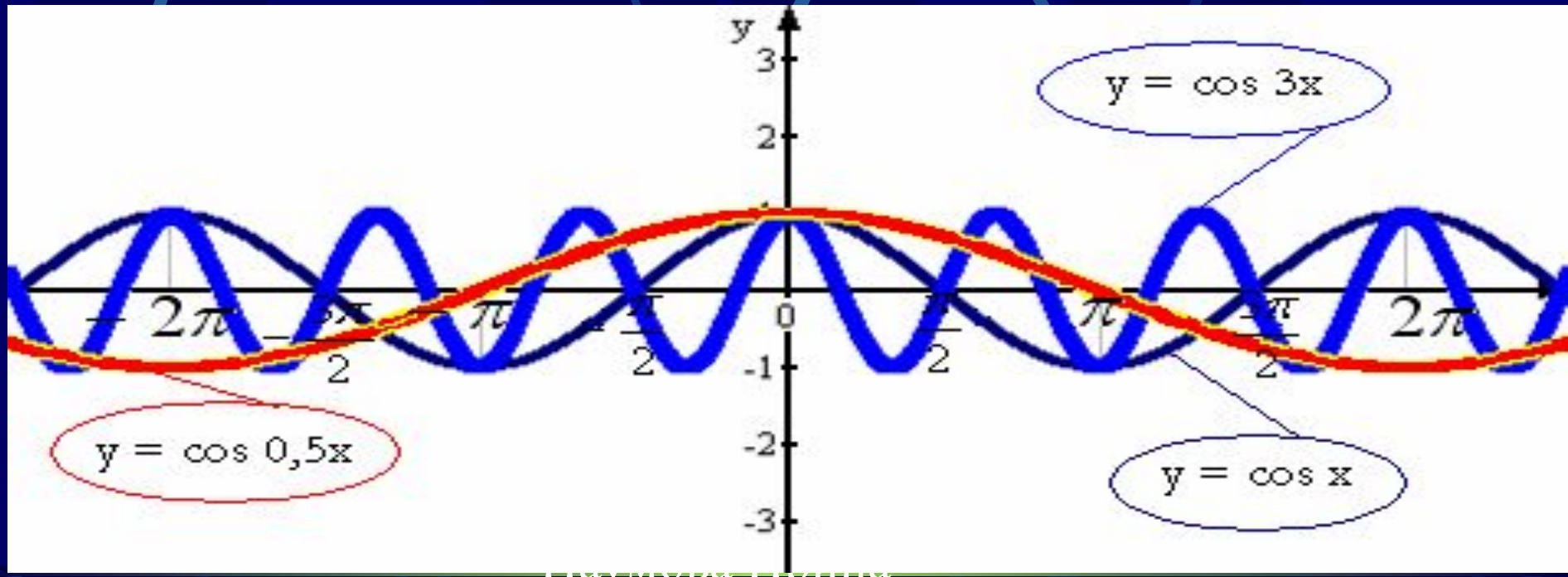
y = cos (x – a) (свойства)

- **Изменяются: четность; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**

- **Например: y = cos (x + π/4)**
  - ***Четность:*** $f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$, *т.к.* $\cos(-(x + \pi/4)) = \cos(-x - \pi/4)$
  - ***Функция возрастает*** *на* $[3\pi/4; 11\pi/4]$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$
  - ***Функция убывает*** *на* $[-\pi/4; 3\pi/4]$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$
  - $f(x) = 0$ *при* $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in Z$
  - $f(x) > 0$ *при* $x \in (-3\pi/4; \pi/4)$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$
  - $f(x) < 0$ *при* $x \in (\pi/4; 5\pi/4)$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$

y = cos (k · x)

- **Сжатие графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс относительно оси ординат в k раз, если k > 1 , и растяжение в 1/k раз, если 0 < k < 1.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos 3x; y = cos 0,5x.***

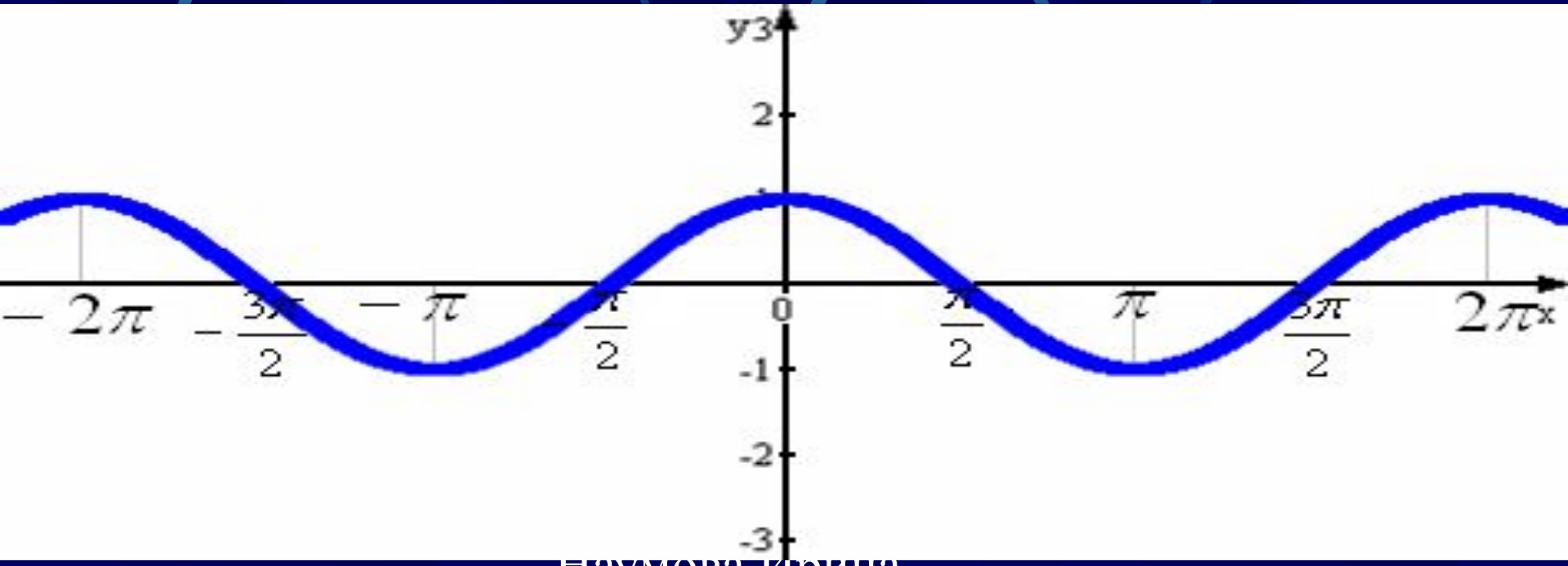


$y = \cos(k \cdot x)$ (свойства)

- **Изменяются: период; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**
- **Например:** $y = \cos 3x$
  - ***Период:*** $T = 2\pi/3$, *(т.к. наименьший положительный период функции* $y = \cos x$ *равен* 2π, *то* $3T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi/3$*).*
  - ***Функция возрастает*** *на* $[\pi/3; 2\pi/3]$ + *сдвиги на* $2\pi n/3$, $n \in Z$.
  - ***Функция убывает*** *на* $[0; \pi/3]$ + *сдвиги на* $2\pi n/3$, $n \in Z$.
  - $f(x) = 0$ *при* $x = \pi/6 + \pi n/3$.
  - $f(x) > 0$ *при* $x \in (-\pi/6; \pi/6)$ + *сдвиги на* $2\pi n/3$, $n \in Z$.
  - $f(x) < 0$ *при* $x \in (\pi/6; \pi/2)$ + *сдвиги на* $2\pi n/3$, $n \in Z$.

y = cos (- x)

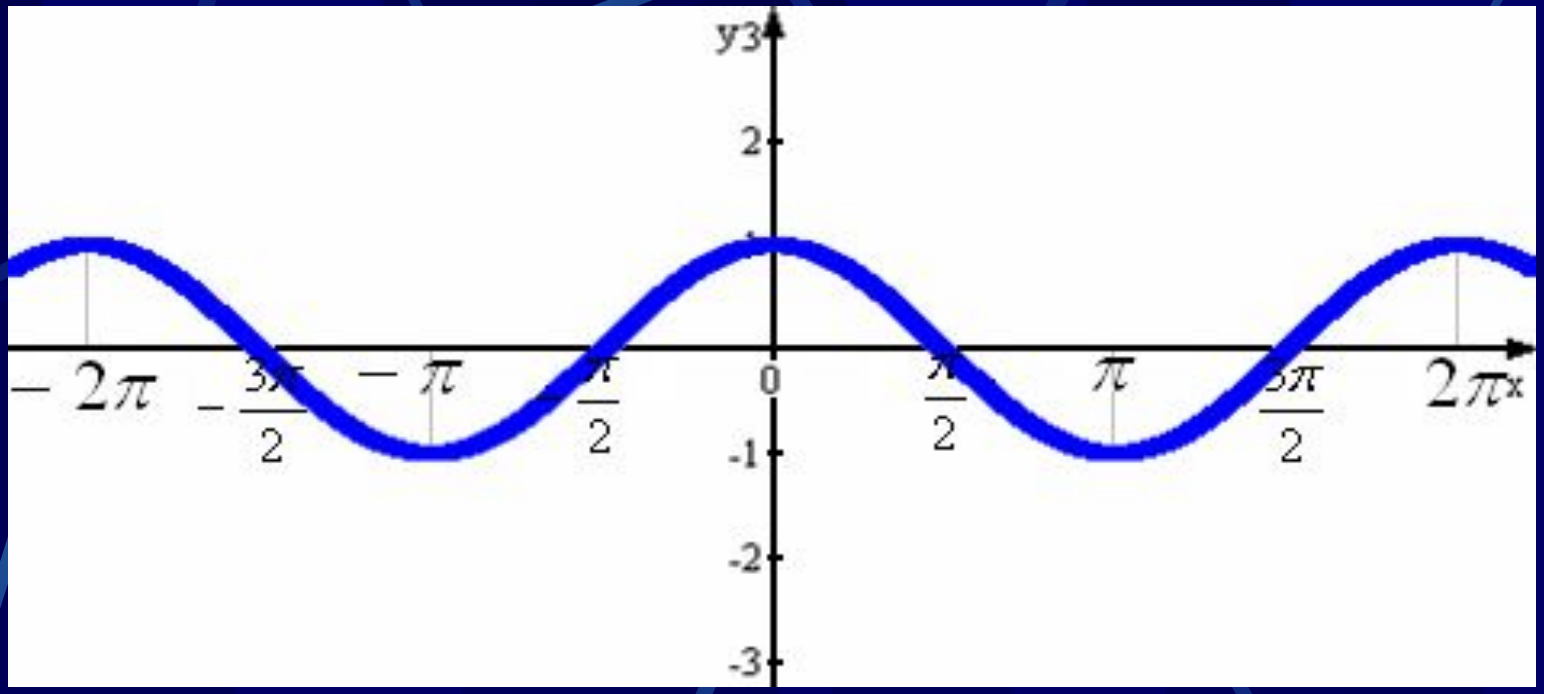
- Симметричное отражение относительно оси абсцисс.



y = cos (-x) (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция y = cos x – четная и cos (-x) = cos (x) ⇒ все свойства функции y = cos x справедливы и для функции y = cos (-x)

y = cos | x |

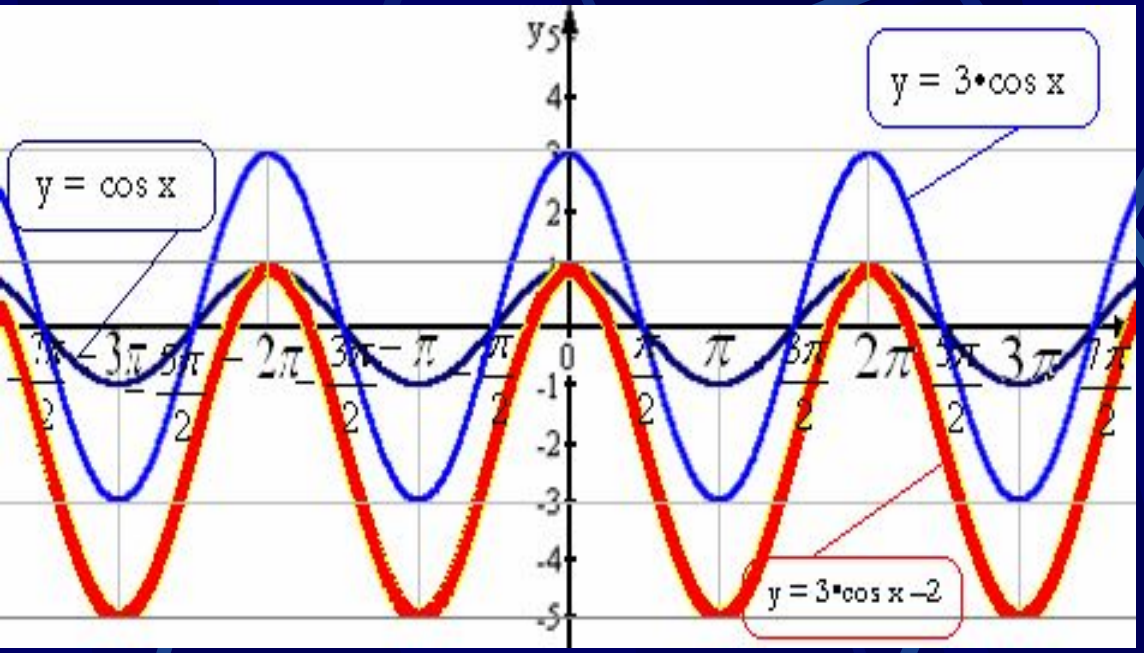


- **Часть графика, расположенная в области $x \geq 0$, остается без изменения, а его часть для области $x \leq 0$ заменяется симметричным отображением относительно оси ординат части графика для $x \geq 0$.**

y = cos |x| (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция y = cos x – четная и cos |x| = cos (-x) = cos (x) ⇒ все свойства функции y = cos x справедливы и для функции y = cos |x|

y = 3 · cos x – 2



- **Построить график функции y = cos x;**
- **Построить график функции y = 3•cos x *(растяжение графика функции y = cos x вдоль оси OY в 3 раза);***

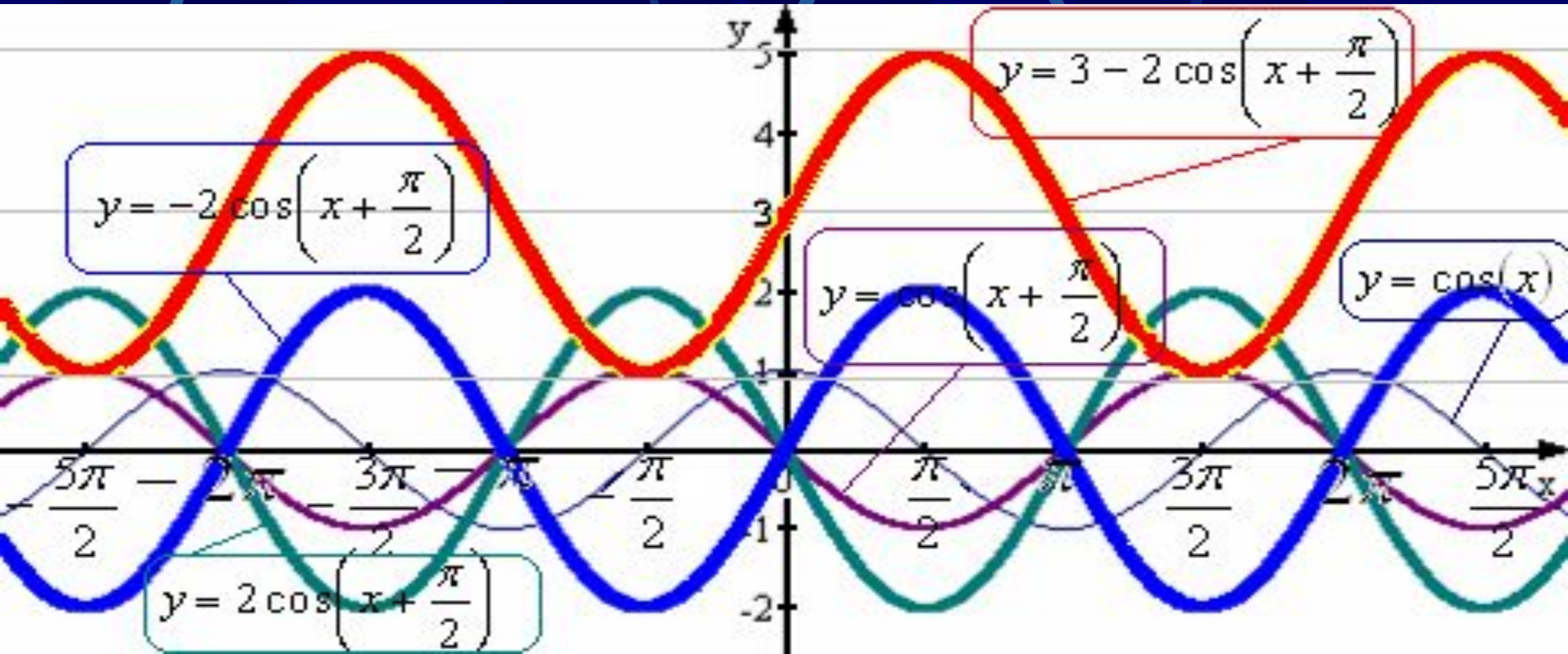
- **Построить график функции y = 3•cos x –2 *(параллельный перенос графика y = 3•cos x вдоль оси OY на 2 единицы вниз).***

Свойства функции $y = 3 \cdot \cos x - 2$

- **Область определения:** $D(f): x \in R;$
- **Множество значений:** $y \in [-5; 1]$, т.к. $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\cos x \le 3 \Rightarrow -5 \le 3\cos x - 2 \le 1;$
- **Периодичность:** $T = 2\pi;$
- **Четность:** четная, т.к. $3\cos(-x) - 2 = 3\cos x - 2 \Rightarrow$ график функции симметричен относительно оси $OY;$
- **Возрастает:** на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2; \pm3\ldots;$
- **Убывает:** на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \pm3\ldots$

$y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- Построим график функции $y = \cos x$;
- Построим график функции $y = \cos(x + \pi/2)$(параллельный перенос графика функции $y = \cos x$ вдоль оси абсцисс на $\pi/2$ единиц влево);
- Построим график функции $y = 2\cos(x + \pi/2)$(растяжение графика функции $y = \cos(x + \pi/2)$ вдоль оси OY в 2 раза);
- Построим график функции $y = -2\cos(x + \pi/2)$(симметричное отражение графика функции $y = 2\cos(x + \pi/2)$ относительно оси OX);
- Построим график функции $y = 3 - 2\cos(x + \pi/2)$ (параллельный перенос графика функции $y = -2\cos(x + \pi/2)$ вдоль оси OY на 3 единицы вверх).



Свойства функции $y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- **Область определения**: $D(f)$: $x \in R$;
- **Множество значений**: $y \in [1; 5]$, т.к. $-1 \le \cos(x + \pi/2) \le 1 \Rightarrow$
  $-2 \le 2\cos(x + \pi/2) \le 2 \Rightarrow 1 \le 3 - 2\cos(x + \pi/2) \le 5$;
- **Периодичность**: $T = 2\pi$;
- **Четность**: ни четная, ни нечетная, т.к. $y(-x) \ne y(x) \ne -y(x)$ (график не симметричен ни оси OY, ни началу координат)
- **Возрастает**: на $[3\pi/2; 5\pi/2]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \pm3\ldots$
- **Убывает:** на $[\pi/2; 3\pi/2]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \pm3\ldots$
- **Функция принимает значения равные:**
  - *нулю*: нет (уравнение $3 - 2\cos(x + \pi/2) = 0$ не имеет корней т.к. $|-3/2| > 1$);
  - *положительные*: при любом x;
  - *наибольшее, равное 5*: при $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.
  - *наименьшее, равное 1*: при $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.