

# Рациональные уравнения

Вишняков А.Ю.



2008год

В данной презентации достаточно полно изложена теория решения различных видов рациональных уравнений, за исключением линейных и квадратных уравнений, а также общей теории решения уравнений 3-й и 4-й степеней.

Нет здесь и примеров, решаемых с помощью теоремы Безу.

Каждый вид уравнения сопровождается решением соответствующего примера.

Данные материалы могут быть использованы частично на уроках алгебры в обычных классах, но в большей мере пригодятся для изучения этой темы в классах с углубленным изучением математики.

# Рациональные уравнения

## Целые

## Дробные

Способ подстановки

возвратные

распадающиеся

биквадратные

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$$

симметричные  
3-го 3-го и 4-го порядка

Однородное 2-го порядка

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$$



end

# Рациональные уравнения

Целые

Дробные

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

Сумма двух и более дробей

$$a \frac{P(x)}{Q(x)} + b \frac{Q(x)}{P(x)} + c = 0$$

$$\frac{px}{ax^2 + bx + c} + \frac{qx}{ax^2 + dx + c} = r, (r \neq 0)$$



end

# Способ подстановки



- При решении некоторых целых рациональных уравнений есть смысл ввести новую переменную величину, обозначив некоторое рациональное выражение новой буквой.
- Например, в уравнении  $a \cdot P^2(x) + b \cdot P(x) + c = 0$  где  $P(x)$  – многочлен, удобно ввести новую переменную  $y = P(x)$ , решить полученное квадратное уравнение  $ay^2 + by + c = 0$  относительно  $y$  и, наконец, решить уравнение  $P(x) = y_0$ , где  $y_0$  – корень уравнения  $ay^2 + by + c = 0$



Обратно  
в меню



Пример

# Пример



- Решите уравнение  $(x^2 - 5x + 7)^2 - 2(x^2 - 5x + 6) = 1$ .
- Решение. Введем новую переменную. Пусть

$$x^2 - 5x + 7 = y$$

Тогда получим уравнение

$$y^2 - 2(y - 1) = 1.$$

Находим корень  $y = 1$  и делаем обратную подстановку.

$$x^2 - 5x + 7 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: 2; 3.



Обратно  
в меню

# Распадающееся уравнение



- Рациональное уравнение называется распадающимся, если его можно привести к виду  $P(x) \cdot Q(x) = 0$ , где  $P(x), Q(x)$  – рациональные выражения с переменной  $x$ .
- Для решения воспользуемся равносильным переходом

$$P(x) \cdot Q(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) = 0. \end{cases}$$

- Применяемые приемы разложения на множители:
  - вынесение общего множителя за скобки;
  - способ группировки;
  - формулы сокращенного умножения.



Обратно  
в меню



Пример

# Пример



- Решите уравнение  $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = 0$ .
- Решение. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$(x^4 - x^3) - (4x^2 - 4x) = 0, \Leftrightarrow x^3(x-1) - 4x(x-1) = 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2 - 4) = 0, \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)(x+2) = 0. \Leftrightarrow$$

Воспользуемся равносильным переходом:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x - 1 = 0, \\ x - 2 = 0, \\ x + 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1, \\ x = 2, \\ x = -2. \end{cases}$$

Ответ: -2; 0; 1; 2.



# Однородное уравнение 2-го порядка



$$aP^2(x) + bP(x)Q(x) + cQ^2(x) = 0$$

- При решении уравнения надо проверить две ситуации:

1)  $\begin{cases} P(x) = 0, \text{ т.е. корнями заданного уравнения} \\ Q(x) = 0. \end{cases}$  являются решения этой системы.

2) Если  $Q(x) \neq 0$ , то после деления заданного уравнения на  $Q^2(x)$  получим уравнение

$$a\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^2 + b\frac{P(x)}{Q(x)} + c = 0,$$

которое подстановкой  $\frac{P(x)}{Q(x)} = t$  сводится к квадратному уравнению  $at^2 + bt + c = 0$

**В ответ включают числа, полученные при рассмотрении обеих ситуаций.**



# Пример



- Решить уравнение

$$(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x)(x^2 - x - 2) - 2(x^2 - x - 2)^2 = 0.$$

- Решение. Возможны две ситуации.

- Рассмотрим первую:

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2, \\ x = -1, \\ x = 2, \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

Найден первый корень уравнения  $x=2$ .



Обратно  
в меню



# Продолжение решения



- Рассмотрим вторую ситуацию: разделим почленно заданное уравнение на  $(x^2 - x - 2)^2$  при условии, что  $x \neq -1$  и  $x \neq 2$ .

Уравнение принимает вид

$$\left( \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} \right)^2 - \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} - 2 = 0.$$

Обозначим  $t = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} = \frac{x}{x+1}$  и решим квадратное уравнение  $t^2 - t - 2 = 0$ . Получаем  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 2$ .

Обратная подстановка дает уравнения

$$\frac{x}{x+1} = -1, \frac{x}{x+1} = 2, \text{ откуда } x = -0,5 \text{ и } x = -2.$$

С учетом обеих ситуаций получаем

**ОТВЕТ:** - 0,5; -2; 2.



Обратно  
в меню

# Биквадратное уравнение



- Уравнение имеет вид

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

- Сделаем подстановку  $x^2 = t$ . Значит,  $x^4 = t^2$ .

Получаем квадратное уравнение

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Находим значения  $t$  и, сделав обратную подстановку, находим корни исходного уравнения.

## Замечание.

При решении биквадратного уравнения можно получить от 1 до 4-х корней или же это уравнение может совсем не иметь корней.



Обратно  
в меню

Пример

# Пример



- Решите уравнение  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ .

- Решение.

Сделаем подстановку  $x^2 = t$ . Получаем квадратное уравнение

$$t^2 - 3t - 4 = 0,$$

корни которого  $t = -1$  и  $t = 4$ .

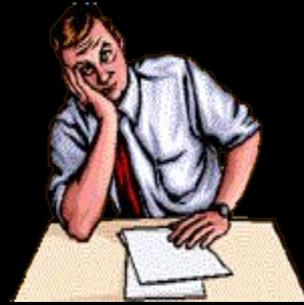
Обратная замена дает два уравнения  $x^2 = -1$  и  $x^2 = 4$ , из которых первое уравнение не имеет корней, а корни второго уравнения  $-2$  и  $2$ .

**Ответ:**  $-2; 2$ .



Обратно  
в меню

# Симметричное уравнение 3-го порядка



- Уравнение имеет вид

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

- Сгруппируем слагаемые:  $a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0.$

Применим формулу суммы кубов

$$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0$$

и выполним разложение на множители

$$(x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0.$$

Получили распадающееся уравнение. Значит,

$$x + 1 = 0 \text{ или } ax^2 + (b - a)x + a = 0.$$

Решив эти два уравнения, найдем корни  
исходного уравнения.



Обратно  
в меню

Пример

# Пример



- Решите уравнение  $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ .
- Решение. Сгруппируем слагаемые парами и в каждой паре вынесем общий множитель за скобки:

$$2(x^3 + 1) - 3x(x + 1) = 0.$$

Применим формулу суммы кубов и вынесем общий множитель  $(x+1)$ :

$$\begin{aligned} 2(x+1)(x^2 - x + 1) - 3x(x+1) &= 0, \\ (x+1)(2x^2 - 5x + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Решив эти два уравнения, найдем корни исходного уравнения:  $-1; 0,5; 2$ .

**Ответ:**  $-1; 0,5; 2$ .



Обратно  
в меню

# Симметричное уравнение 4-го порядка



- Уравнение имеет вид

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

- Сгруппируем слагаемые и разделим обе части уравнения на  $x^2$ . Получаем

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Сделаем подстановку  $x + \frac{1}{x} = t$ , тогда  $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Получаем квадратное уравнение

$$a(t^2 - 2) + bt + c = 0.$$

Находим значения  $t$  и делаем обратную подстановку.



Обратно  
в меню

Пример

# Пример



- Решите уравнение  $2x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 3x + 2 = 0$ .
- **Решение.** Разделим обе части уравнения на  $x^2 \neq 0$  и, удобно группируя, получим равносильное уравнение:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 0.$$

Сделаем подстановку  $x + \frac{1}{x} = t$ , тогда  $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ .

Получаем квадратное уравнение  $2t^2 + 3t - 14 = 0$ , корни которого 2 и -3,5.

Обратная подстановка дает два рациональных

уравнения  $x + \frac{1}{x} = 2$  и  $x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{5}$ ,

откуда и находим корни исходного уравнения.

**Ответ:**  $1; \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}$ .



# Возвратное уравнение

- Уравнение вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$



где  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  и  $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$ ,

называется возвратным уравнением четвертого порядка.

Это уравнение сводится к квадратному с помощью подстановки

$$t = x + \frac{d}{bx}$$



Обратно  
в меню



Пример

# Пример



- Решить уравнение

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 2x + 4 = 0.$$

- **Решение.** Заметим, что  $\left(\frac{4}{1}\right) = \left(\frac{-2}{1}\right)^2$  и, следовательно, данное уравнение есть возвратное уравнение четвертого порядка.

Так как  $x = 0$  не является решением уравнения, разделим на  $x^2$  и получим равносильное уравнение

$$x^2 + \frac{4}{x^2} + x - \frac{2}{x} - 6 = 0.$$

Обозначим  $t = x - \frac{2}{x}$ , тогда  $x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4$ ,

и уравнение примет вид  $t^2 + t - 2 = 0$ , корни которого  $t_1 = -2$  и  $t_2 = 1$ .

Делаем обратную замену и после умножения на  $x \neq 0$

получаем два квадратных уравнения

$$x^2 + 2x - 2 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0,$$

откуда и получим корни исходного уравнения.

**Ответ:**

$$-1 \pm \sqrt{3}; -1; 2.$$



Обратно  
в меню

# Уравнения вида

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$$



- Если  $a + b = c + d$ , то это уравнение сводится к квадратному уравнению. Действительно,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x + c)(x + d) = x^2 + (c + d)x + cd = \\ = x^2 + (a + b)x + cd$$

- Обозначив  $x^2 + (a + b)x = t$ , получим квадратное уравнение

$$(t + ab)(t + cd) = m$$

*Из этого уравнения найдем значения  $t$  и, сделав обратную подстановку, закончим решение исходного уравнения.*



Обратно  
в меню

Пример

# Пример



- Решить уравнение

$$(x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 19.$$

- **Решение.** Заметим, что  $-2 + 7 = 1 + 4$ . Удобно группируя, получим

$$[(x - 2)(x + 7)] \cdot [(x + 1)(x + 4)] = 19$$

или

$$(x^2 + 5x - 14)(x^2 + 5x + 4) = 19.$$

Обозначим  $t = x^2 + 5x - 14$ , тогда  $x^2 + 5x + 4 = t + 18$ .

Уравнение примет вид

$$t(t + 18) = 19 \quad \text{или} \quad t^2 + 18t - 19 = 0,$$

откуда  $t = -19$  и  $t = 1$ .

Сделав обратную подстановку, получим

$$x^2 + 5x - 14 = -19 \quad \text{и} \quad x^2 + 5x - 14 = 1.$$

Окончательный ответ:  $\frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{-5 \pm \sqrt{85}}{2}$ .



Обратно  
в меню

# Уравнение вида

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$$



- Используя подстановку  $t = x + \frac{a+b}{2}$ , уравнение можно свести к биквадратному уравнению относительно  $t$ .

Действительно, подставив в уравнение  $x = t - \frac{a+b}{2}$ , получим

$$\left(t + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{a-b}{2}\right)^4 = c. \text{ Обозначим } \frac{a-b}{2} = m \text{ и возведем}$$

каждое слагаемое в 4-ю степень. После приведения подобных получим биквадратное уравнение

$$2t^4 + 12m^2t^2 + (2m^4 - c) = 0.$$



Обратно  
в меню

Пример

# Пример



- Решить уравнение

$$(x + 3)^4 + (x - 1)^4 = 82.$$

- Решение. Сделаем подстановку  $t = x + \frac{3 + (-1)}{2} = x + 1$

Получим следующее уравнение относительно  $t$ :

$$(t + 2)^4 + (t - 2)^4 = 82$$

или

$$t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t + 16 + t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 - 82 = 0.$$

Откуда получим биквадратное уравнение

$$t^4 + 24t^2 - 25 = 0,$$

корни которого  $t = \pm 1$ .

Следовательно,  $x + 1 = \pm 1$ .

Значит, корни исходного уравнения

$$x = -2 \text{ и } x = 0.$$

**Ответ: -2;0.**



Обратно  
в меню

Уравнение вида  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$



- Решить уравнение  $P(x) = 0$ .
- Для каждого корня уравнения  $P(x) = 0$  сделать проверку: удовлетворяет ли он условию  $Q(x) \neq 0$  или нет. Если да, то это — корень заданного уравнения, а если нет, то этот корень является посторонний для заданного уравнения и в ответ его включать не следует.



# Пример



- Решите уравнение  $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x} = 0$ .

- Решение.

Приравняем числитель дроби к нулю и решим полученное уравнение:

$$x^2 - 6x + 8 = 0, \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 4. \end{cases}$$

Значение  $x = 2$  не удовлетворяет условию  $x^2 - 2x \neq 0$ .

Следовательно, уравнение имеет один корень  $x = 4$ .

**Ответ: 4.**



Обратно  
в меню

Уравнение вида  $a \frac{P(x)}{Q(x)} + b \frac{Q(x)}{P(x)} + c = 0$



- Подстановкой  $\frac{P(x)}{Q(x)} = t$  это уравнение сводится к виду

$$at + b \frac{1}{t} + c = 0$$

- Умножим на  $t \neq 0$  и решим полученное квадратное уравнение относительно  $t$ .

Остается сделать обратную подстановку  $\frac{P(x)}{Q(x)} = t_0$ ,  
где  $t_0$  - корень квадратного уравнения,

и решить полученное уравнение  
относительно  $x$ .



Уравнение вида  $a \frac{P(x)}{Q(x)} + b \frac{Q(x)}{P(x)} + c = 0$



- Подстановкой  $\frac{P(x)}{Q(x)} = t$  это уравнение сводится к виду

$$at + b \frac{1}{t} + c = 0$$

- Умножим на  $t \neq 0$  и решим полученное квадратное уравнение относительно  $t$ .

Остается сделать обратную подстановку  $\frac{P(x)}{Q(x)} = t_0$ , где  $t_0$  - корень квадратного уравнения,

и решить полученное уравнение относительно  $x$ .





# Пример

- Решите уравнение  $\frac{x}{2x+1} + \frac{2x+1}{x} = 2$ .

- Решение.

Сделаем подстановку  $\frac{x}{2x+1} = t$  и решим полученное уравнение относительно  $t$ :

$$t + \frac{1}{t} = 2, \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0, \Rightarrow t = 1.$$

Обратная подстановка приводит к уравнению

$$\frac{x}{2x+1} = 1, \text{ корень которого } x = -1.$$

**Ответ: -1.**



Обратно  
в меню

# Уравнения, состоящие из суммы двух и более дробей



## 1-й способ

- Перенести все члены уравнения в одну часть.
- Привести уравнение к виду  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  и найти корни полученного уравнения.

## 2-й способ

- Определить О.Д.З. уравнения.
- Умножить обе части уравнения на общий знаменатель дробей и получить целое уравнение.
- Найти корни полученного уравнения и проверить их соответствие О.Д.З.



Обратно  
в меню



Пример

# Пример



- Решите уравнение

$$\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x(2-x)}$$

- **Решение.** Найдём О.Д.З. Знаменатели дробей не могут обращаться в нуль. Значит, О.Д.З. уравнения:  $x \neq 2$  и  $x \neq 0$ . Перенесём члены из правой части уравнения в левую и приведём к общему знаменателю.

$$\frac{2 \cdot 2x + x(2-x) - 4 \cdot 2}{2x(2-x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 6x - 8}{2x(2-x)} = 0.$$

Приравняем числитель дроби к нулю:  $x^2 - 6x + 8 = 0$ .

Находим корни квадратного уравнения:  $x = 4$  и  $x = 2$ .

Значение  $x = 2$  не удовлетворяет О.Д.З.

Следовательно, уравнение имеет один корень  $x = 4$ .

**Ответ: 4.**



Обратно  
в меню

# Уравнения вида

$$\frac{px}{ax^2 + bx + c} + \frac{qx}{ax^2 + dx + c} = r, (r \neq 0)$$



Данное уравнение сводится к квадратному уравнению заменой переменной

$$t = ax + \frac{c}{x}$$



Обратно  
в меню



Пример

# Пример



- Решить уравнение 
$$\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6.$$
- **Решение.** О.Д.З. уравнения есть множество  $R \setminus \left\{1; 1\frac{1}{2}\right\}.$

Поскольку  $x = 0$  не является решением данного уравнения, перепишем уравнение в виде

$$\frac{2}{2x - 5 + \frac{3}{x}} + \frac{13}{2x + 1 + \frac{3}{x}} = 6$$

(разделим числитель и знаменатель каждой дроби на  $x$ ).

Обозначим

$$t = 2x + \frac{3}{x} \text{ и уравнение примет вид}$$

$$\frac{2}{t - 5} + \frac{13}{t + 1} = 6.$$



Обратно  
в меню



## Продолжение решения



О.Д.З. полученного уравнения  $t \neq 5$  и  $t \neq -1$ .

Решая это уравнение, приходим к квадратному уравнению

$$2t^2 - 13t + 11 = 0,$$

корни которого  $t_1 = 1$  и  $t_2 = 11/2$  удовлетворяют О.Д.З..

Делаем обратную подстановку и получаем два рациональных уравнения

$$2x + \frac{3}{x} = 1, \quad 2x + \frac{3}{x} = \frac{11}{2},$$

решив которые находим корни заданного уравнения.

Ответ:  $\frac{3}{4}; 2.$



Обратно  
в меню

# Литература

- Алгебра и математический анализ, 10 Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд
- Алгебра и начала анализа. 8 – 11 кл. Пособие для школ и классов с углубл. изучением математики (серия «Дидактические материалы») Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В.