Математика

Приемы доказательства неравенств, содержащих переменные

Автор: Жагалкович Полина Сергеевна
Учебное заведение: МОУ Лицей№1 г.Комсомольск-на-Амуре
Адрес автора: Хабаровский край, с.п. «Село Хурба» ул. Добровольского, ДОС 2-10

Руководитель: Будлянская Наталья Леонидовна

Если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока есть к тому возможность. Она окажет вам потом огромную помощь во всей вашей работе.

(М.И. Калинин)

1. Представление левой части неравенства в виде суммы неотрицательных слагаемых (правая часть равна 0) с использованием тождеств.

Пример 1. *Доказать что для любого x*є*R*

$$x^4 - 7x^2 - 2x + 20 > 0$$

Доказательство*.* *<u>1 способ</u>.*

$$x^4 - 7x^2 - 2x + 20 = (x^4 - 8x^2 + 16) + (x^2 - 2x + 1) + 3 =$$
$$= (x^2 - 4)^2 + (x - 1)^2 + 3 > 0$$ *для x*єR

<u>2 способ</u>.

$$x^4 - 7x^2 - 2x + 20 = (x^2 - 4)^2 + x^2 - 2x + 4$$

$(x^2 - 4)^2 \geq 0$ *для x*єR

$x^2 - 2x + 4 > 0$ *для x*єR т. к.

$a = 1$ $\frac{D}{4} = 1 - 4 = -3 < 0$ атичной функции $y = x^2 - 2x + 4,$

что означает ее положительность при любом действительном *x*.

Пример 2. *Доказать, что для любых x и y*

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 \geq 0$$

Доказательство.

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 = (x - y)^2 + 2(x - y) + 1 =$$
$$= (x - y + 1)^2 \geq 0$$

и *y*

Пример 3. *Доказать, что* $x^2 + 4y^2 + 4y - 4x + 5 \geq 0$

Доказательство.

$$x^2 + 4y^2 + 4y - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) + (4y^2 + 4y + 1) =$$
$$= (x - 2)^2 + (2y + 1)^2 \geq 0$$

Пример 4. *Доказать, что для любых a и b*

Доказат $a^2 + b^2 - 2ab(a + b) + 2a^2b^2 \geq 0$

$$a^2 + b^2 - 2ab(a + b) + 2a^2b^2 =$$
$$= (a^2 - 2a^2b + a^2b^2) + (b^2 - 2ab^2 + a^2b^2) =$$
$$= a^2(1 - b)^2 + b^2(1 - a)^2 \geq 0$$

2. Метод от противного

Вот хороший пример применения данного метода.

Доказать, что $a^2+ab+b^2 \geq 0$ *для a, b є R.*

Доказательство.

Предположим, что $a^2+ab+b^2<0$.

Но $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$ о доказывает, что наше предположение неверно.

Ч.Т.Д.

Пример 5. *Доказать, что для любых чисел А,В,С справедливо неравенство*

$$\frac{A+B+C}{3} \le \sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{3}}$$

Доказательство. Очевидно, что данное неравенство достаточно установить для неотрицательных *А, В* и *С* … дующее

$$\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{3}} = \sqrt{\frac{|A|^2+|B|^2+|C|^2}{3}} \ge \frac{|A|+|B|+|C|}{3} \ge \frac{A+B+C}{3}$$

отношения:

, что является обоснованием исходного неравенства.

Пусть теперь нашлись такие неотрицательные числа *A, B* и *C*, для которых выполняется неравенство

$$\frac{A+B+C}{3} \leq \sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{3}}$$

$$\left(\frac{A+B+C}{3}\right)^2 > \frac{A^2+B^2+C^2}{3}$$

$$\frac{A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC}{9} > \frac{A^2+B^2+C^2}{3}$$

$$A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC-3A^2-3B^2-3C^2>0$$

$$-(2A^2+2B62+2C^2-2AB-2AC-2BC)>0$$

$$-((A-B)^2+(A-C)^2+(B-C)^2>0$$

, что невозможно ни при каких действительных *A,B* и *C*. Сделанное выше предположение опровергнуто, что доказывает исследуемое исходное неравенство.

Использование свойств квадратного трехчлена

Метод основан на свойстве неотрицательности кв $P(x) = ax^2 + bx + c$ ехчлен $a > 0$

$D < 0$, если

и .

$2x^2 - 6x + 13 > 0$ *для x*∈R

Пример 6. *Доказать, что*

Доказа $P(x) = 2x^2 - 6x + 13 > 0$

Г $\frac{D}{4} = 9 - 13 * 2 = -17, \frac{D}{4} < 0$ *2>0* $2x^2 - 6x + 13 > 0$ *для x*∈R

=>

Пример 7. *Доказать, что для любых действительных x и y имеет место быть неравенство* $x^2 + y^2 + xy + x - y + 3 > 0$

Доказательство. Рассмотрим левую часть неравенство как квадратный трехчлен относительно *x:*

$P(x) = x^2 + (y+1)x + y^2 - y + 3$

a>0, D<0 *для x*ϵR

D= $(y+1)^2 - 4y^2 + 4y - 12 = -3(y-1)^2$ *=> P(x)>0* и

$x^2 + y^2 + xy + x - y + 3 > 0$ верно при любых действительных значениях *x* и *y.*

Пример 8. *Доказать, что* $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0$

для любых действительных значениях x и y.

Доказательство. Пусть $P(y) = 3y^2 + 2(x+3)y + x^2 + 2x + 3$

$$\frac{D}{4} = (x+3)^2 - 3(x^2 + 2x + 3) =$$

$$= x^2 + 6x + 9 - 3x^2 - 6x - 9 = -2x^2 \leq 0$$

для $x \in R$

Это означает, что $P(y) \geq 0$ для любых действительных *y* и неравенство $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0$ выполняется при любых действительных *x* и *y*.

Метод введения новых переменных или метод подстановки

Пример 9. *Доказать, что для любых неотрицательных чисел x, y, z*

$$x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz}$$

Доказательство. Воспользуемся верным неравенством для $a \geq 0$, $b \geq 0 \quad c \geq 0$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$$

$$a = \sqrt{x}$$
$$b = \sqrt{y}$$
$$c = \sqrt{z}$$

Получаем исследуемое неравенство

$$x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz}$$

Использование свойств функций.

Пример 10. *Докажем неравенств* $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

для любых a и b.

Доказательство. Рассмотрим 2 случая:

1) Если a=b,то $a^2 + ab + b^2 = 3a^2 \geq 0$ о для $a \epsilon R$

причем равенство достигается только при a=b= $a \neq b$

2)Если

$a^2 + ab + b^2 = \frac{c^2 - b^2}{a - b}$ $y = x^3$ на R =>

($a - b$)* ($a^3 - b^3$)>0, что доказывает неравенство $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

Пример 11. *Докажем, что для любых* $a \neq b$

$$a^6 + b^6 > a^5b + ab^5$$

Доказательство.

$$a^6 + b^6 - a^5b - ab^5 = a^6 - a^5b + b^6 - ab^5 =$$
$$= a^5(a - b) - b^5(a - b) = (a - b)(a^5 - b^5)$$

$y = x^5$ на R.

Если $a \neq b$, то знаки чисел $(a - b)$ и $a^5 - b^5$ совпадают, что означает положительность исследуемой разности => $a^6 + b^6 > a^5b + ab^5$

Применение метода математической индукции

Данный метод применяется для доказательства неравенств относительно натуральных чисел.

Пример 12. *Дока* $3^n > n+1$ *что для любого n∈N*

1) Проверим истинность утверждения при $n = 1$

$3^1 > 1 + 1$ - (верно)

2) Предположим верность утверждения при $n = k$ (k>1)

$3^k > k + 1$

3) Докажем истинность утверждения при

$$3^{k+1} > k+2$$

$$3^k > k+1 \quad \Big| *3$$

$$3^{k+1} > 3k+3$$

Сравним $3k+3$ и $k+2$: $3k+3-k-2=2k+1$, $2k+1>0$

$$3k+3 > k+2$$

Имеем:

$$3k+3 > k+3$$

$$3k+3 > k+2$$

$$3^{k+1} > k+2$$

Вывод: утверждение верно для любого *n*ϵ*N.*

Использование замечательных неравенств

- Теорема о средних (неравенство Коши)
- Неравенство Коши – Буняковского
- Неравенство Бернулли

Рассмотрим каждое из перечисленных неравенств в отдельности.

Применение теоремы о средних (неравенства Коши)

Среднее арифметическое нескольких неотрицательных чисел больше или равно их среднего геометрического

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad a \geq 0$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

Рассмотрим частные случаи этой теоремы:

1. Пусть n=2, $a \geq 0$, $b \geq 0$, тогда $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
2. Пусть n=2, a>0, тогда $a + \frac{1}{a} \geq 2$
3. Пусть n=3 $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, тогда

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Пример 13. *Доказать, что для всех неотрицательных a,b,c выполняется неравенство* $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Доказательство.

$$\begin{array}{l} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ + \\ a^2 + c^2 \geq 2ac \\ + \\ c^2 + b^2 \geq 2cb \\ \hline 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac \end{array}$$

Неравенство Коши - Буняковского

Неравенство Коши - Буняковского утверждает, чт $a_1, a_2, \dots, a_n$ ы $b_1, b_2, \dots, b_n$ справедливо соотношение

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$$

Доказанное неравенство имеет геометрическую интерпретацию. Для n=2,3 оно выражает известный факт, что скалярное произведение двух векторов на плоскости и в пространстве не превосходит произведение их длин. Для n=2 нера

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

. Для n=3 получим

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Пример 14. *Доказать, что для любых a,b,c ϵ R справедливо неравенств* $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$

Доказательство. Запишем исследуемое неравенство в сл $(1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c)^2 \le (1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)$

Это заведомо истинное неравенство, так как является частным случаем неравенства Коши – Буняковского.

Пример 15. *Доказать, что* $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \ge abc(a+b+c)$ *справедливо неравенство*

Доказательство. Достаточно записать данное неравенство в виде

$$\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}\cdot\sqrt{(ac)^2+(ab)^2+(bc)^2} \ge abca+bcab+cabc$$

и сослаться на неравенство Коши – Буняковского.

Неравенство Бернулли

Неравенство Бернулли утверждает, что если x>-1, то для всех натуральных значений n выполняется неравенств $(1+x)^n \geq 1+nx$

Неравенство может применяться для выра $1{,}005^{200}$ или $0{,}992^{10}$

$$1{,}005^{200} = (1+0{,}005)^{200} \geq 1+200 \cdot 0{,}005 = 2$$

$$0{,}994^{10} = (1-1{,}006)^{10} \geq 1-10 \cdot 0{,}006 = 0{,}94$$

Кроме того, очень большая группа неравенств может быть легко доказана с помощью теоремы Бернулли.

Пример 16. *Доказать, что для любых n є N*

$$(1{,}5)^n \geq 1 + 0{,}5n$$

Доказательство $1{,}5^n = (1 + 0{,}5)^n$ П ожив *x=0,5 и* применив теорему Бернулли для $(1 + 0{,}5)^n$ жения

, получим требуемое неравенство.

Пример 17. Д $(0{,}7)^n \geq 1 - 0{,}3n$ *о для любых n є N*

Доказательство

$(0{,}7)^n = (1 - 0{,}3)^n \geq 1 - 0{,}3n$

по теореме Бернулли, что и требовалось.

Давида Гильберта спросили об одном из его бывших учеников. "А, такой-то? - вспомнил Гильберт. - Он стал поэтом. Для математики у него было слишком мало воображения.