

# Логарифмические уравнения

Теория, примеры и решения.  
Рекомендуется учащимся-старшеклассникам  
для самостоятельной подготовки к уроку, к  
ЕГЭ по математике, в ВУЗ.

- Определение логарифма
- Об истории развития логарифмов
- Основные свойства логарифмов  
(Формулы преобразования логарифмов)
- О монотонности логарифмической функции
- Логарифмические уравнения
- Методы решения логарифмических уравнений
- Этапы решения логарифмических уравнений
- Проверь Проверь\_ Проверь себя
- Готовься к ЕГЭ

## Определение

○: Пусть  $b > 0$ ,  $a > 0$  и  $a \neq 1$ . Число  $c$  называется логарифмом числа  $b$  по основанию  $a$ , если  $a^c = b$ .

Число  $b$  называется аргументом логарифма,

число  $a$  - основанием логарифма. Обозначение:  $c = \log_a b$ .

Из определения следуют основные логарифмические тождества:

$$1. a^{\log_a b} = b; \quad 2. \log_a a^b = b.$$

○: Логарифм по основанию 10

называется десятичным логарифмом. Обозначение:  $\lg x$ .

○: Логарифм с основанием  $e$  называется

натуральным логарифмом Обозначение:  $\ln x$ .  $\ln x = \log_e x$ .

Далее см. [интерактивный урок](#)



Определение и свойства  
логарифма  
(смотри урок-фильм)

Для продолжения урока-фильма Меню - Control – Play (Ctrl+Enter)



# Об истории развития логарифмов

Слово **логарифм** происходит от слияния греческих слов и переводится как отношений чисел, одно из которых является членом арифметической прогресс, а другое геометрической. Впервые это понятие ввел английский математик **Джон Непер**. Кроме того, этот человек известен тем, что он первый изобрел таблицу логарифмов, которая пользовалась большой популярностью среди ученых на протяжении долгих лет. В таблицы Непера, изданные в книгах под названием «Описание удивительной таблицы логарифмов» и «Устройство удивительной таблицы логарифмов», вошли значения логарифмов синусов, косинусов и тангенсов углов от 0 до 99 градусов.

Первые **таблицы десятичных логарифмов** были составлены в 1617 г. английским математиком Бриггсом. Многие из них были выведены с помощью выведенной Бриггсом формулы.

Изобретатели логарифмов не ограничились созданием логарифмических таблиц, уже через 9 лет после их разработки в 1623 г. Английским математиком Гантером была создана первая логарифмическая линейка. Она стала рабочим инструментом для многих поколений. В настоящее время мы можем находить значения логарифмов, используя компьютер. Так, в языке программирования BASIC с помощью встроенной функции можно находить натуральные логарифмы чисел.



Слово **ЛОГАРИФМ**  
происходит от греческих  
слов  $\lambda\sigma\upsilon\omicron\phi$  - число и  
 $\alpha\rho\iota\theta\mu\omicron\phi$  - отношение



*Джон Непер (1550-1617)*

Первые таблицы логарифмов

назывались

*«Описание удивительной  
таблицы логарифмов»*

(1614 г.) и

*«Устройство удивительной  
таблицы логарифмов»*

(1619 г.)

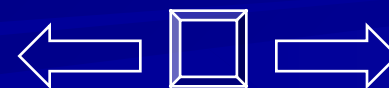




Таблица XVI. ЛОГАРИФМЫ СИНОСОВ УГЛОВ ОТ 14 ДО 90°.

A	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'
50°	1,8843	8849	8855	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899	1,8905	39°	1	2	3
51°	8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959	8965	38°	1	2	3
52°	8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018	9023	37°	1	2	3
53°	9023	9029	9035	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074	9080	36°	1	2	3
54°	9080	9085	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128	1,9134	35°	1	2	3
55°	1,9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181	9186	34°	1	2	3
56°	9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231	9236	33°	1	2	3
57°	9236	9241	9246	9251	9255	9260	9265	9270	9275	9279	9284	32°	1	2	2
58°	9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326	9331	31°	1	2	2
59°	9331	9335	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371	1,9375	30°	1	1	2
60°	1,9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	9418	29°	1	1	2
61°	9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455	9459	28°	1	1	2
62°	9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495	9499	27°	1	1	2
63°	9499	9503	9506	9510	9514	9518	9522	9525	9529	9533	9537	26°	1	1	2
64°	9537	9540	9544	9548	9551	9555	9558	9562	9566	9569	1,9573	25°	1	1	2
65°	1,9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	9607	24°	1	1	2
66°	9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	9640	23°	1	1	2
67°	9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9662	9666	9669	9672	22°	1	1	2
68°	9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699	9702	21°	0	1	1
69°	9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	1,9730	20°	0	1	1
70°	1,9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	9757	19°	0	1	1
71°	9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9780	9782	18°	0	1	1
72°	9782	9785	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804	9806	17°	0	1	1
73°	9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826	9828	16°	0	1	1
74°	9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847	1,9849	15°	0	1	1
75°	1,9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867	9869	14°	0	1	1
76°	9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885	9887	13°	0	1	1
77°	9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902	9904	12°	0	1	1
78°	9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918	9919	11°	0	1	1
79°	9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932	1,9934	10°	0	0	1
80°	1,9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945	9946	9°	0	0	1
81°	9946	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	9958	8°	0	0	1
82°	9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967	9968	7°	0	0	1
83°	9968	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975	9976	6°	0	0	0
84°	9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983	1,9983	5°	0	0	0
85°	1,9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	4°	0	0	0
86°	9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994	9994	3°	0	0	0
87°	9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996	9997	9997	9997	9997	2°	0	0	0
88°	9997	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	1,9999	1°	0	0	0
89°	9999	9999	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0,0000	0°	0	0	0
90°	0,0000														
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	A	1'	2'	3'

ЛОГАРИФМЫ КОСИНУСОВ УГЛОВ ОТ 0 ДО 76°.

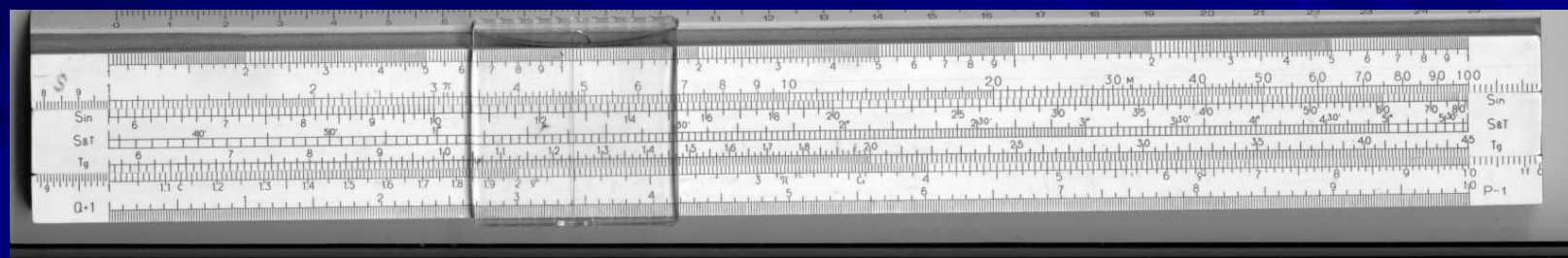


**Таблица XX. РАЗНЫЕ ТАБЛИЦЫ.**  
**1) Натуральные логарифмы (основание  $e=2,71828\dots$ ).**

Единицы Десятки	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
1	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
2	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
3	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
4	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
5	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
6	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341
7	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
8	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
9	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
10	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913



# Логарифмическая линейка



Логарифм можно найти теперь с помощью ПК  
LOG(x) - встроенная функция языка  
программирования BASIC, возвращает  $\ln x$

1)  $x = \text{LOG}(2.7)$

PRINT x

Ответ: .993124...

2)  $x = \text{LOG}(1)$

PRINT x

Ответ: 0

3)  $x \% = \text{LOG}(2.7)$

PRINT x

Ответ: 1

# Основные свойства логарифмов

Если  $a, b, c > 0$ , и  $c \neq 1$ , то верны свойства:

$$\log_c 1 = 0$$

$$\log_c c = 1$$

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b. \text{ При } a=1 \log_c \frac{1}{b} = -\log_c b$$

Пусть, дополнительно,  $k$  - произвольное число. Тогда:

$$\log_c a^k = k \log_c a. \text{ Если } k=2n, \text{ то } \log_c b^{2n} = 2n \log_c b$$

$$\text{Log}_c b^r = r \text{Log}_c b$$

$$\log_{c^k} a = \frac{1}{k} \log_c a$$

Пусть, кроме того,  $d > 0$  и  $d \neq 1$ . Тогда

$$\log_c a = \frac{\log_d a}{\log_d c}. \text{ В частности, при } d=a \log_c a = \frac{1}{\log_a c}$$

## Формулы за работой

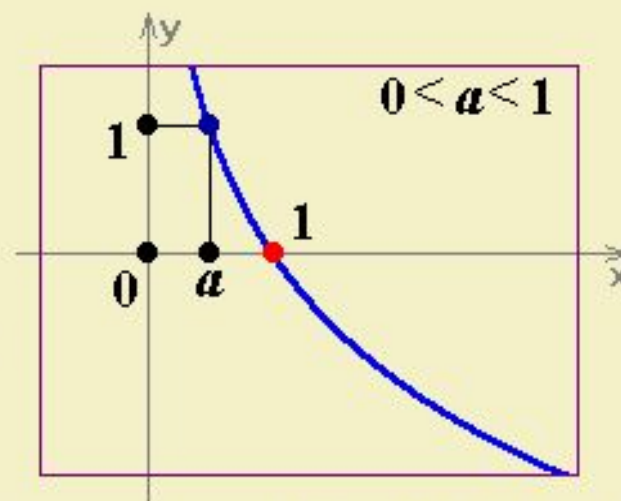
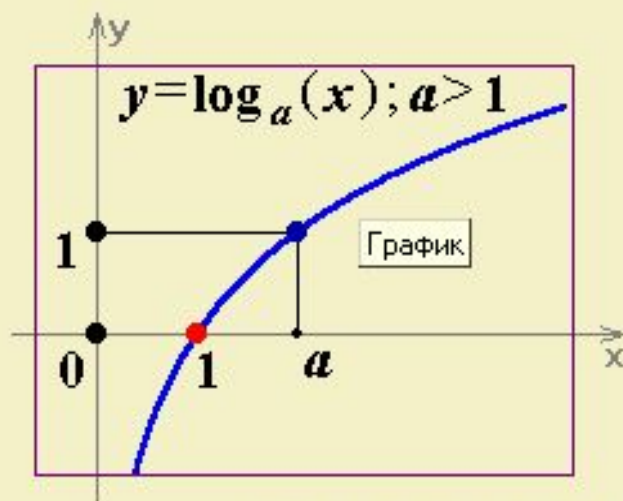
**О монотонности  
логарифмической  
функции**

Пусть  $a > 0$  и  $a \neq 1$ . Логарифмической функцией  
с основанием  $a$  называется функция  $y = \log_a x$ .

Область определения

Область изменения

$$D(\log_a x) = (0; +\infty); \quad E(\log_a x) = (-\infty; +\infty).$$



При  $a > 1$  функция  $y = \log_a x$  возрастает на всей области определения;

при  $0 < a < 1$  функция  $y = \log_a x$  убывает на всей области определения.

**Уравнение вида**  
 **$\log_a f(x) = \log_a g(x)$**   
(или сводящееся к этому виду)  
**называют логарифмическим**

Уравнение может быть решено с помощью равносильных преобразований. При этом не происходит ни потери корней, ни приобретения посторонних корней.

В процессе решения уравнения можно перейти к уравнению-следствию. При этом потери корней не происходит, однако могут появиться посторонние корни.

Поэтому при решении уравнения, включающем переходы к уравнению-следствию,

проверка корней является обязательной частью решения.

Если  $f(x) > 0$  и  $g(x) > 0$ ,  $a > 0$  и  $a \neq 1$ ,  
то уравнение  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$   
равносильно уравнению  
 $f(x) = g(x)$

Решая уравнение, следует помнить также теорему о корне

### Теорема о корне

Пусть функция  $f(x)$  возрастает (или убывает) на промежутке  $X$ , число  $a$  – любое значение функции на этом промежутке. Тогда уравнение  $f(x) = a$  имеет единственный корень в промежутке  $X$ .



4) Сколько корней имеет уравнение?

Вариант 1

$$\log_2 |x| = 1,2$$

Вариант 2

$$|\log_2 |x|| = 1,2$$

Ответ

# Методы решения логарифмических уравнений:

## 1. Потенцирование

Пример 1 Пример 1 Пример 2 Пример 1 Пример 2 Пример  
3 Пример 1 Пример 2 Пример 3 Пример 4

Для продолжения решения: Меню - Control - Play

## 2. Введение новой переменной

Пример 1

Для продолжения решения: Меню - Control - Play

## 3. Переход к новому основанию

Пример 1

Для продолжения решения: Меню - Control - Play

## 4. Разные методы решения

Пример 1 Пример 1 Пример Пример 1 Пример 2

Для продолжения решения: Меню - Control - Play

## Этапы решения уравнения

- **Найти область допустимых значений (ОДЗ) переменной**
- **Решить уравнение, выбрав метод решения**
- **Проверить найденные корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение или выяснить, удовлетворяют ли они условиям ОДЗ**

[Посмотри еще один подход к решению логарифмического уравнения](#)

Вычисли устно:

$$\log_{1/2} 4 = -2$$

$$\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} = 3$$

$$\log_5 \sqrt{5} = 1/2$$

$$5^{2\log_5 3} = 9$$

$$8^{\log_2 3} = 27$$

Ответы (щелкни)



Реши устно уравнения:

$$\log_3 x = 3$$

$$x = 27$$

$$\log_{1/3} x = -3$$

$$x = 27$$

$$\log_2 3x = \log_2 4 + \log_2 6$$

$$x = 8$$

$$\log_x 8 - \log_x 2 = 2$$

$$x = 2$$

Ответы (щелкни)

1) Сравни с 1  $\log_{1099} 1098$

меньше 1

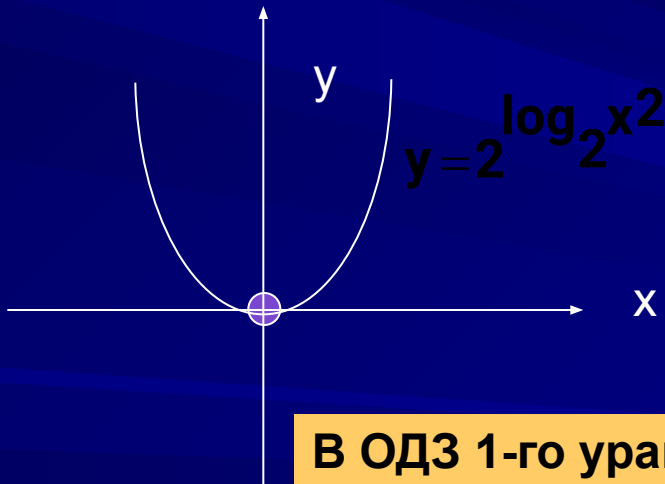
2) Сравни с 1  $\log_{296} 297$

больше 1

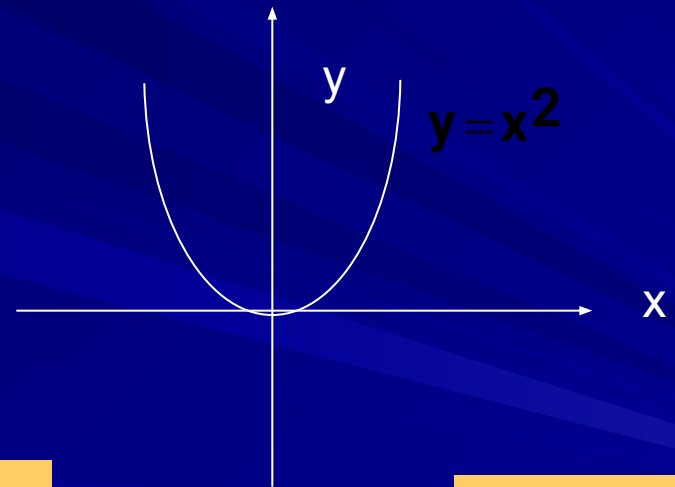
3) Графики уравнений отличаются или совпадают?

$$y = 2^{\log_2 x^2}$$

$$y = x^2$$



В ОДЗ 1-го уравнения не входит точка  $x=0$ , (точка «выколота»).



Ответ:  
отличаются

Ответы (щелкни)

4) Сколько корней имеет уравнение?

Вариант 1

$$\log_2 |x| = 1,2$$

Вариант 2

$$|\log_2 |x|| = 1,2$$

Ответ



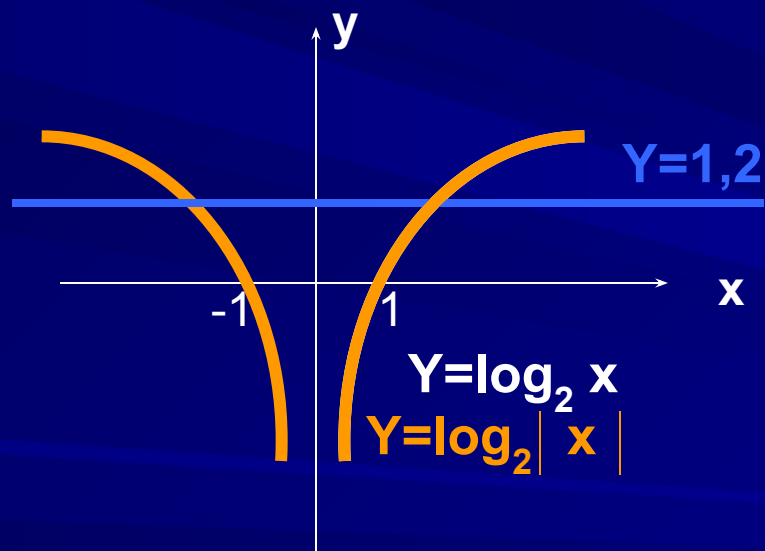
4) Сколько корней имеет уравнение?

B1

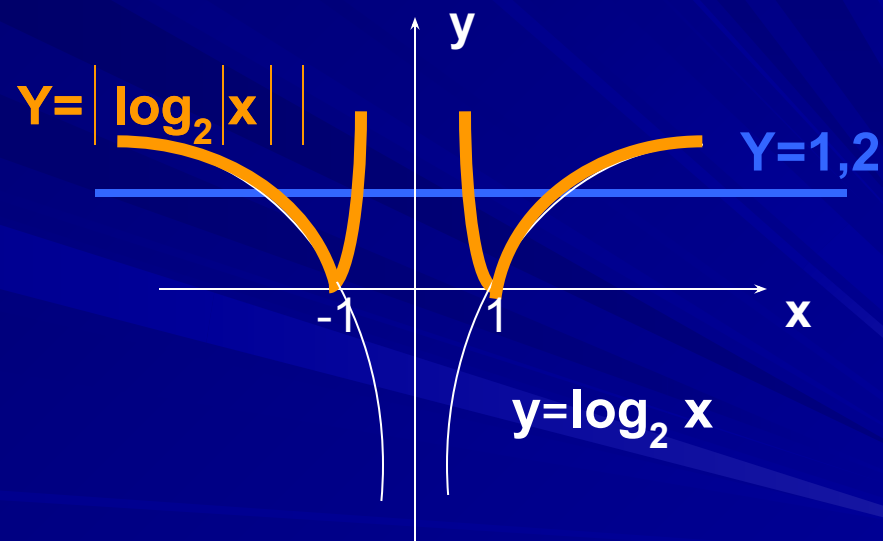
B2

$$\log_2 |x| = 1,2$$

$$|\log_2 |x|| = 1,2$$



Ответ: 2



Ответ: 4



<http://www.eureka><http://www.eur>

[ekanet](http://www.eurekanet.ru)<http://www.eurekanet.ru>

<http://www.college.ru>

<http://www.http://>

[www.EGE](http://www.EGE)<http://>

<http://www.http://www.m>  
~~[www.EGE.ru](http://www.EGE.ru)~~

[ediahouse](http://www.m)<http://www.m>

[ediahouse](http://www.m)[ediahouse.ru](http://www.m)



# Формулы преобразования логарифмов и их использование при решении задач

- Примеры 1
- Примеры 2

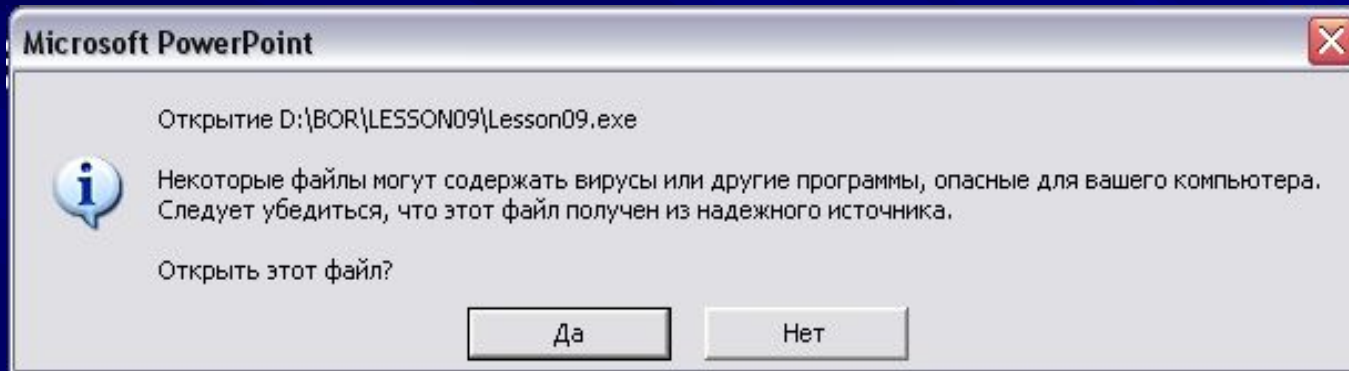
Для продолжения фильма: Ctrl + Enter



## Внимание!

Для прослушивания речевых комментариев необходимо иметь наушники или колонки, иначе электронный материал утрачивает смысл.

Если при запуске интерактивных программных файлов появится сообщение



выбрать «Да».

Выход



Существует несколько методических подходов к решению логарифмических уравнений. Особенно популярным является первый подход, указанный выше.

Автор учебника «Алгебра и начала анализа 10-11» А.Г. Мордкович сравнивает разные подходы к решению:

«... Второй подход заключается в следующем: не находят ОДЗ, а сразу решают уравнение  $f(x) = g(x)$ . Затем все найденные корни проверяют непосредственной их подстановкой в исходное уравнение.

Чем плох первый подход? Тем, что иногда решение системы неравенств, определяющей ОДЗ уравнения, бывает весьма затруднительным, отвлекающим от основной работы — от решения уравнения. При этом часто бывает так, что уравнение  $f(x) = g(x)$  вообще не имеет корней, так что вся работа по опережающему отысканию ОДЗ оказывается пустой тратой времени.

Бывает и так, что указанное уравнение имеет настолько простые корни, что их проверка подстановкой в исходное уравнение осуществляется легко и быстро. В таких случаях предпочтительнее второй подход.

[Далее](#)



*А чем плох второй подход?*

*Тем, что мы рискуем "нарваться" на проверку подстановкой "плохих" корней. В этом случае предпочтительнее первый подход.*

*Хотя второй подход предпочтительнее по идейным соображениям. В принципе сначала нужно решить уравнение, затем сделать проверку. А при первом подходе, еще ничего не сделав для собственно решения уравнения, мы начинаем "подстилать соломку", находить ОДЗ, думая о возможном появлении посторонних корней и о необходимости их отсева.*

*Мы отдаем предпочтение третьему подходу, который, на наш взгляд, нивелирует недостатки, как первого, так и второго подходов.*

*План решения уравнения  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  заключается в следующем: решаем уравнение  $f(x) = g(x)$ ; если уравнение имеет корни, то делаем проверку. Для этого составляем систему неравенств:*

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

*но не решаем ее, а проверяем найденные корни уравнения подстановкой в неравенства системы (что значительно проще).*

*Но, вообще говоря, тактика решения логарифмического уравнения может быть достаточно гибкой: если ОДЗ можно найти без труда, выбирайте первый подход; если с ОДЗ много возни, то выбирайте третий подход (или второй — в случае очень простых корней).»*

[Далее](#)

## Еще раз о третьем подходе к решению логарифмических уравнений

При решении логарифмических уравнений важно помнить следующее утверждение: если  $f(x) > 0$  и  $g(x) > 0$ , то логарифмическое уравнение  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  (где  $a > 0$  и  $a \neq 1$ ) равносильно уравнению  $f(x) = g(x)$ .

На практике это утверждение применяют так: переходят от уравнения  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  к уравнению  $f(x) = g(x)$  (такой переход называют потенцированием), решают уравнение  $f(x) = g(x)$ , а затем проверяют его корни по условиям  $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$ , определяющим область допустимых значений переменной (ОДЗ). Те корни уравнения  $f(x) = g(x)$ , которые удовлетворяют этим условиям, являются корнями исходного уравнения. Те корни уравнения  $f(x) = g(x)$ , которые не удовлетворяют хотя бы одному из этих условий, объявляются посторонними корнями для уравнения  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ .

(«Готовимся к ЕГЭ» В.Н. Студенецкая)



**НЕПЕР Джон (1550-1617)**, шотландский математик, изобретатель логарифмов.

Потомок старинного воинственного шотландского рода. Изучал логику, теологию, право, физику, математику, этику. Увлекался алхимией и астрологией. Изобрел несколько полезных сельскохозяйственных орудий. В 1590-х годах пришел к идее логарифмических вычислений и составил первые таблицы логарифмов, однако свой знаменитый труд "Описание удивительных таблиц логарифмов" опубликовал лишь в 1614 году. В конце 1620-х годов была изобретена логарифмическая линейка, счетный инструмент, использующий таблицы Непера для упрощения вычислений. С помощью логарифмической линейки операции над числами заменяются операциями над логарифмами этих чисел.

*[www.km.ru](http://www.km.ru)*



○: Основание показательной функции, график которой пересекает ось ординат под углом  $45^\circ$ , называется числом "e".

Обозначение:  $e$ .

$e$  - иррациональное число.

$e = 2,718281828459045\dots$

