

**ТЕМА УРОКА:** Повторение геометрии при подготовке к итоговой аттестации

**ЦЕЛИ УРОКА:**

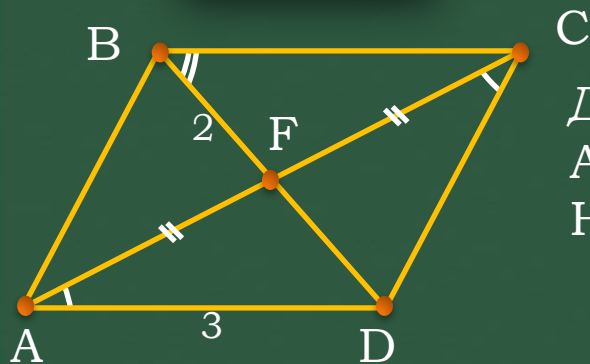
- ✓ обобщить и систематизировать полученные и приобретенные знания, умения, навыки;
- ✓ активация элементов ранее изученного материала;
- ✓ повторить свойства фигур, рассмотреть различные способы расположения геометрических фигур на плоскости;
- ✓ при решении стандартных задач рассматривать возможность другой конфигурации фигур.

**АВТОРЫ:** *Веприкова Римма Хабибулаевна (учитель математики)*  
*Зайцева Вера Васильевна (учитель информатики)*  
*МОУ – Гимназия № 2 г. Клин Московской области*

## Задача 1

## Задача 2

## Задача 3



Дано:  $\angle CBD=35^\circ$ ;  $BF=2\text{см}$ ;  $AD=3\text{см}$ ;  
 $AF=FC$ ;  $\angle CAD=\angle ACB$ .  
Найти:  $\angle ADF$ ;  $FD$ ;  $BC$ .

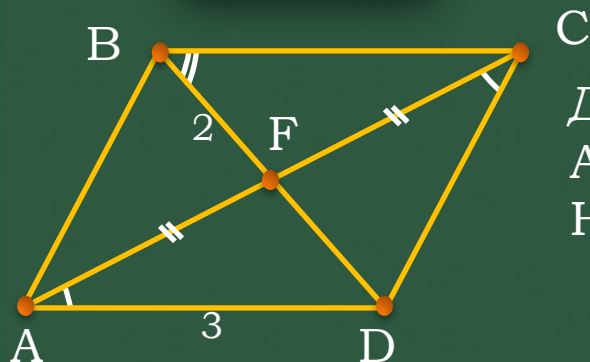
Решение



## Задача 1

## Задача 2

## Задача 3



Дано:  $\angle CBD=35^\circ$ ;  $BF=2\text{см}$ ;  $AD=3\text{см}$ ;  
 $AF=FC$ ;  $\angle CAD=\angle ACB$ .  
 Найти:  $\angle ADF$ ;  $FD$ ;  $BC$ .

## Решение

1). Так как  $\angle CAD=\angle ACB$  – накрест лежащие, то по признаку параллельности прямых  $BC\parallel AD$ .

2). Рассмотрим  $\triangle AFD=\triangle BFC$  по стороне и двум прилежащим углам (1.  $AF=FC$ ; 2.  $\angle CAD=\angle ACB$ ; 3.  $\angle AFD=\angle BFC$ ).

$\Rightarrow BF=FD$ ;  $\angle FBC=\angle ADF$ ;  $BC=AD$

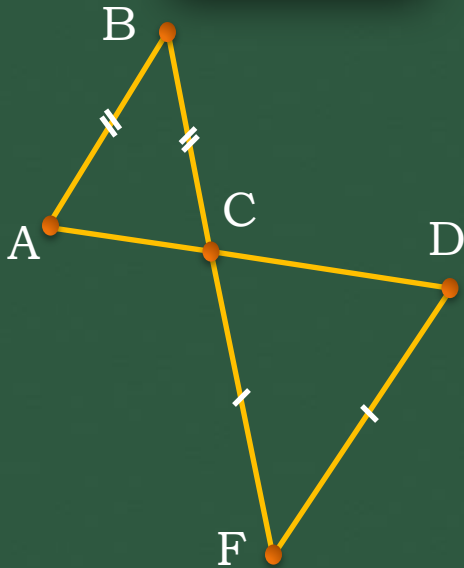
$\Rightarrow BC=AD=3$  (см);  $BF=FD=2$  (см);  $\angle ADF=35^\circ$ .

Ответ:  $35^\circ$ ; 3 см; 2 см.

## Задача 1

## Задача 2

## Задача 3



Дано:  
 $AB=BC$ ;  $CF=FD$ .  
Доказать, что  $AB \parallel DF$ .

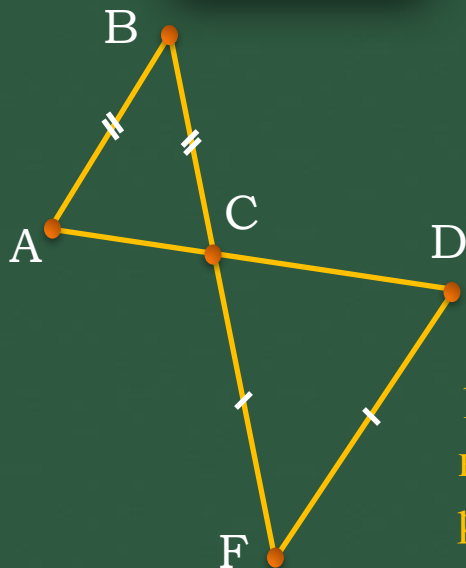
Доказательство



## Задача 1

## Задача 2

## Задача 3



Дано:

$AB=BC$ ;  $CF=FD$ .

Доказать, что  $AB\parallel DF$ .

### Доказательство

1).  $\triangle ABC$  – равнобедренный (по определению), так как  $AB=BC \Rightarrow \angle BAC = \angle ACB$  по свойству равнобедренного треугольника.

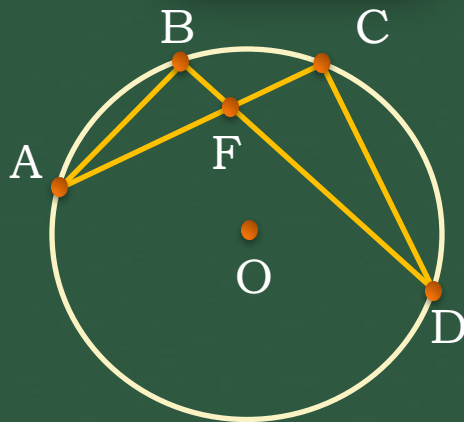
2).  $\triangle CDF$  – равнобедренный по определению, так как  $CF=FD \Rightarrow \angle DCF = \angle CDF$  (по свойству).

3)  $\angle ACB = \angle DCF$  – вертикальные  $\Rightarrow \angle BAC = \angle CDF$  – накрест лежащие, то по признаку параллельности прямых  $\Rightarrow AB\parallel FD$ , что и требовалось доказать.

## Задача 1

## Задача 2

## Задача 3



Дано:  $(O;R)$  – окружность

$\text{т.} A, B, C, D \in (O;R)$

$AC \cap BD = \text{т.} F$

Записать: пропорциональные отрезки.

Решение

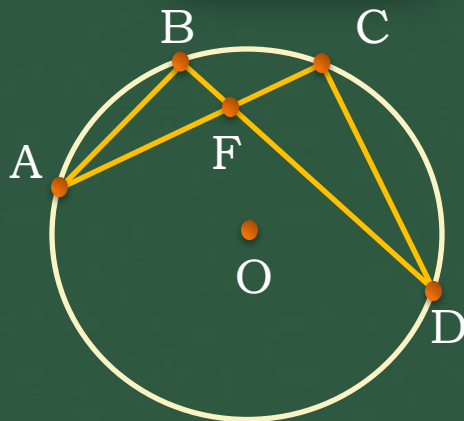




## Задача 1

## Задача 2

## Задача 3



Дано:  $(O;R)$  – окружность  
 $\text{т.} A, B, C, D \in (O;R)$   
 $AC \cap BD = \text{т.} F$   
 Записать: пропорциональные отрезки.

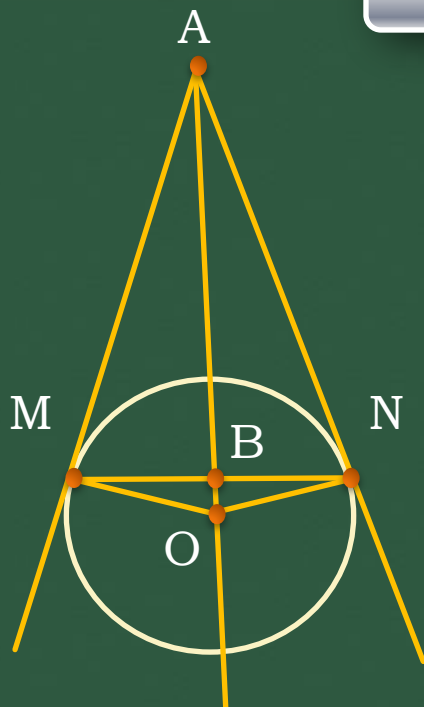
## Решение

- 1).  $\angle ABD = \angle ACD$  – вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу  $\cup AD$ .
- 2).  $\angle BAC = \angle CDB$  – вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу  $\cup BC$ .
- 3).  $\angle AFB = \angle CFD$  – вертикальные  $\Rightarrow$  стороны  $AF$  и  $DF$ ;  $BF$  и  $CF$ ;  $AB$  и  $CD$  – сходственные стороны  $\Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle CDF \Rightarrow$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BF}{CF} = \frac{AF}{DF} \text{ – пропорциональные стороны.}$$

## Задача 1

## Задача 2



Из точки  $A$  проведены две прямые, касающиеся окружности радиуса  $r$  в точках  $M$  и  $N$ . Найти длину отрезка  $MN$ , если расстояние от точки  $A$  до центра окружности равно  $a$ .

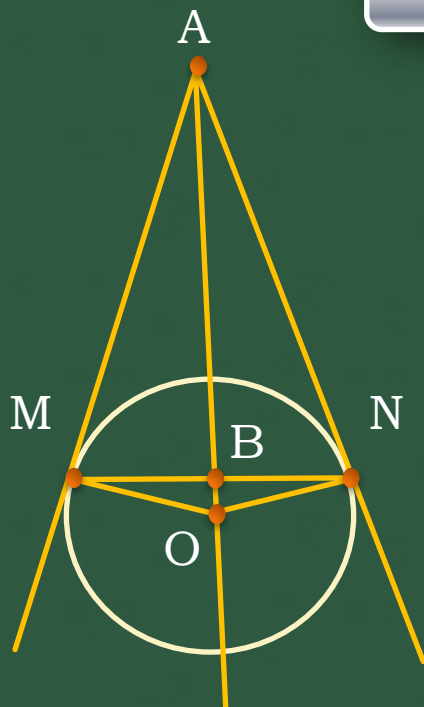
Решение





## Задача 1

## Задача 2



## Решение

OM и ON – радиусы окружности; по свойству радиуса, проведенного в точку касания,  $OM \perp MA$ ;  $ON \perp NA$ .

$\triangle AMO = \triangle ANO$  – прямоугольные (по катету и гипотенузе:  $OM = ON = r$ ;  $OA$  – общая)  $\Rightarrow \angle OAM = \angle OAN$ .

$AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$  – равнобедренный (по определению)  $\angle AOM = \angle AON$ .

По свойству равнобедренного треугольника:  $AB$  – биссектриса, медиана и высота  $MB = BN$ ;  $AB \perp MN$ .

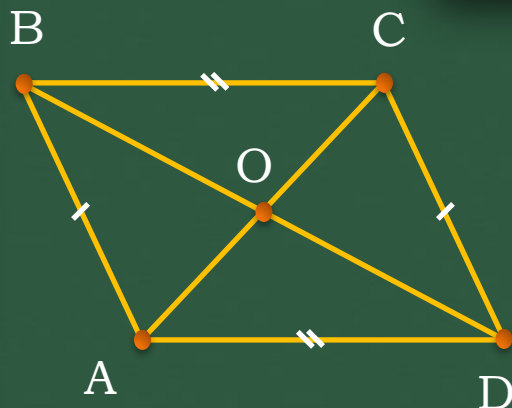
$S(\triangle AMO) = \frac{1}{2} MB \cdot AO$  или  $S(\triangle AMO) = \frac{1}{2} MO \cdot AM$

Из  $\triangle AMO$ : по теореме Пифагора:  $MA = \sqrt{OA^2 - OM^2}$ ;  $MA = \sqrt{a^2 - r^2}$ .

$$MB = \frac{r}{a} \sqrt{a^2 - r^2} \quad \text{и} \quad MN = \frac{2r}{a} \sqrt{a^2 - r^2} \quad \text{Ответ:} \quad \frac{2r}{a} \sqrt{a^2 - r^2}$$

## Задача 1

## Задача 2



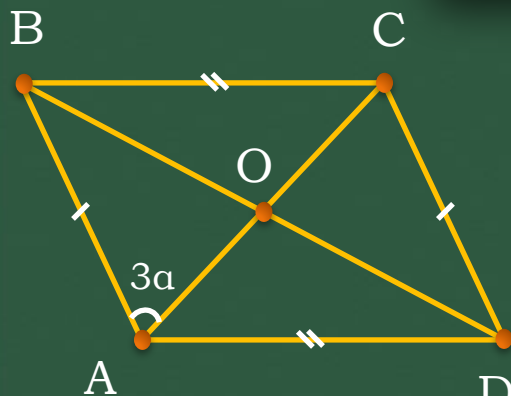
В параллелограмме ABCD ( $AB \parallel CD$ ) диагонали  $AC=c$ ;  $BD=3c/2$ . Найти площадь параллелограмма, если  $\angle CAB=2\angle ABD$ .

Решение



## Задача 1

## Задача 2



## Решение

Точка  $O$  – точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ . Для вычисления площади применим формулу  $S(ABCD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOB$ ;  
 $S(ABCD) = \frac{3}{4}c^2 \cdot \sin \angle AOB$

$D$  Пусть  $\angle DBA = \alpha$ , тогда  $\angle CAB = 2\alpha$ ,  $\angle AOB = \pi - 3\alpha$ .

По теореме синусов из  $\triangle AOB$ :

$$\frac{c}{2 \sin \alpha} = \frac{3c}{4 \sin 2\alpha}, \text{ откуда } \cos \alpha = \frac{3}{4}; \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

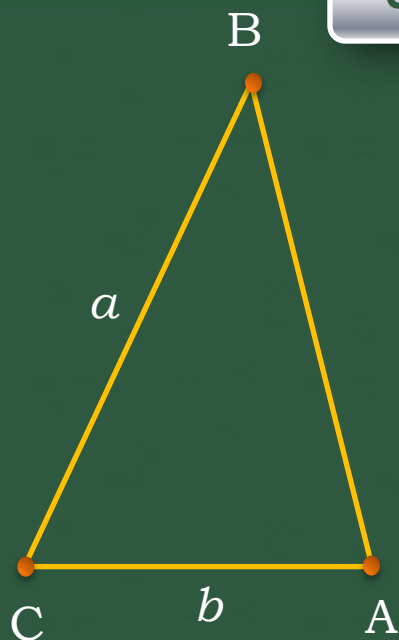
Тогда, используя формулу  $\sin 3\alpha$ , получаем

$$\sin \angle AOB = \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ и } S = \frac{15\sqrt{7}}{64} c^2$$

Ответ:  $\frac{15\sqrt{7}}{64} c^2$

## Задача 1

## Задача 2



Две стороны треугольника равны  $a$  и  $b$ . Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны  $b$ .

Решение

Искомую сторону  $\triangle ABC$  обозначим  $c$ , то есть  $AB=c$



1

2

3

4

5

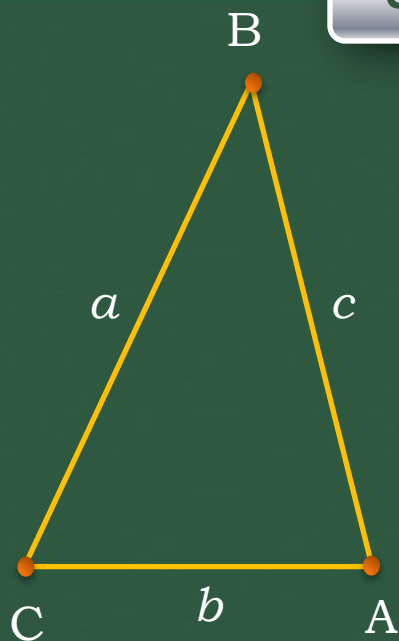
6

T

8

## Задача 1

## Задача 2



Две стороны треугольника равны  $a$  и  $b$ . Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны  $b$ .

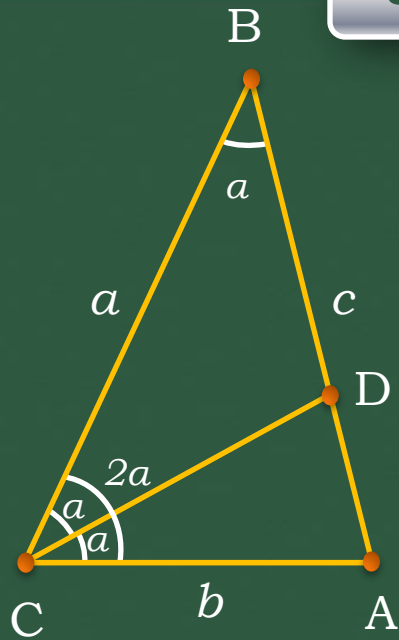
## Решение

Искомую сторону  $\triangle ABC$  обозначим  $c$ , то есть  $AB=c$   
 $\angle B=\alpha$ , тогда  $\angle C=2\alpha$ . Проведем  $CD$  – биссектрису  $\angle C$ .



## Задача 1

## Задача 2



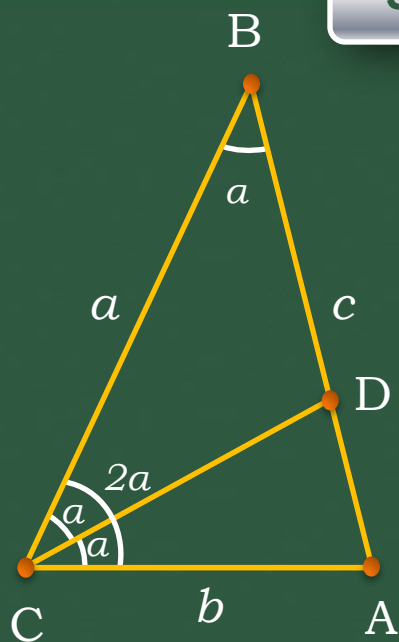
Две стороны треугольника равны  $a$  и  $b$ . Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны  $b$ .

## Решение

Искомую сторону  $\triangle ABC$  обозначим  $c$ , то есть  $AB=c$   
 $\angle B=\alpha$ , тогда  $\angle C=2\alpha$ . Проведем  $CD$  – биссектрису  $\angle C$ .

## Задача 1

## Задача 2



Две стороны треугольника равны  $a$  и  $b$ . Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны  $b$ .

## Решение

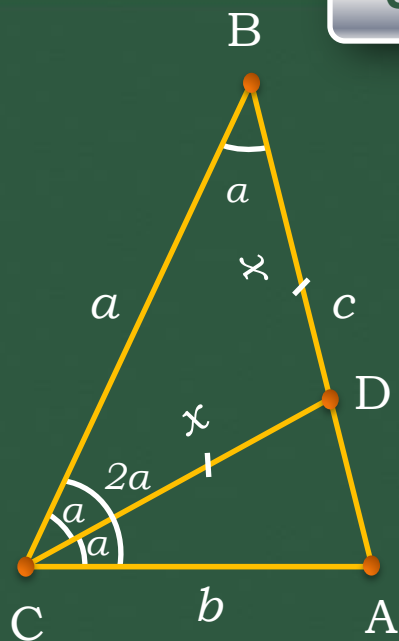
Искомую сторону  $\triangle ABC$  обозначим  $c$ , то есть  $AB=c$   
 $\angle B=\alpha$ , тогда  $\angle C=2\alpha$ . Проведем  $CD$  – биссектрису

Рассмотрим  $\triangle CBD$  –  <sup>$\angle C$</sup> равнобедренный, так как  $\angle BCD=\angle B=\alpha$  (углы при основании  $\triangle ABD$ )  $\Rightarrow BD=CD$ .

Пусть  $BD = x$ , тогда  $AD=c - x$ ,  $CD=x$ .

## Задача 1

## Задача 2



Две стороны треугольника равны  $a$  и  $b$ . Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны  $b$ .

## Решение

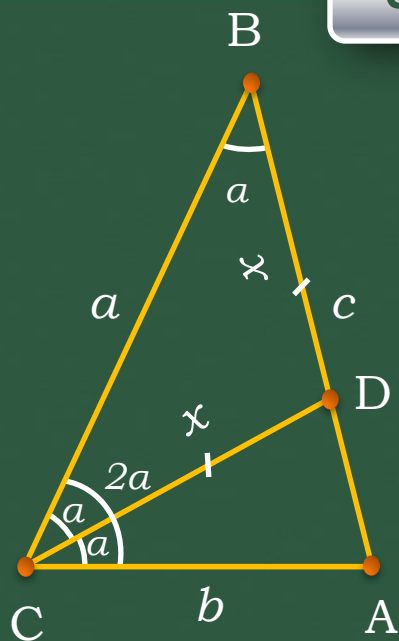
Искомую сторону  $\triangle ABC$  обозначим  $c$ , то есть  $AB=c$   
 $\angle B=\alpha$ , тогда  $\angle C=2\alpha$ . Проведем  $CD$  – биссектрису

Рассмотрим  $\triangle CBD$  –  <sup>$\angle C$</sup>  равнобедренный, так как  $\angle BCD=\angle B=\alpha$  (углы при основании  $\triangle ABD$ )  $\Rightarrow BD=CD$ .

Пусть  $BD = x$ , тогда  $AD=c - x$ ,  $CD=x$ .

## Задача 1

## Задача 2



Две стороны треугольника равны  $a$  и  $b$ . Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны  $b$ .

## Решение

Искомую сторону  $\triangle ABC$  обозначим  $c$ , то есть  $AB=c$   
 $\angle B=\alpha$ , тогда  $\angle C=2\alpha$ . Проведем  $CD$  – биссектрису  
 Рассмотрим  $\triangle CBD$  – равнобедренный, так как  $\angle BCD=\angle B=\alpha$  (углы при основании  $\triangle ABD$ )  $\Rightarrow BD=CD$ .  
 Пусть  $BD$  –  $x$ , тогда  $AD=c-x$ ,  $CD=x$ .

По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника



## Задача 1

## Задача 2

**Теорема о биссектрисе**

Биссектриса любого внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

**Доказательство**

Пусть AD – биссектриса  $\triangle ABC$ .

Так как площади треугольников, имеющих общую вершину A, относятся как длины их оснований, то

$$\frac{S_{(\triangle ACD)}}{S_{(\triangle ABD)}} = \frac{CD}{BD} \quad (1),$$

с другой стороны, эти площади относятся как длины сторон:

$$\frac{S_{(\triangle ACD)}}{S_{(\triangle ABD)}} = \frac{0,5 AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD}{0,5 AB \cdot AD \cdot \sin \angle DAB} = \frac{AC}{AB} \quad (2).$$

Из (1) и (2) следует, что  $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$ . Теорема доказана

1

2

3

4

5

6

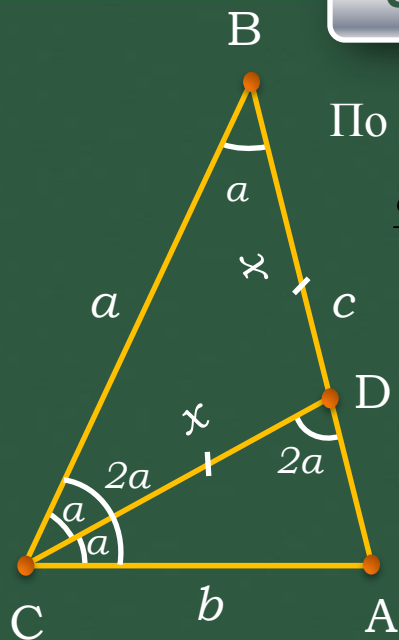
T

8



## Задача 1

## Задача 2



По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника:

$$\frac{c-x}{x} = \frac{b}{a} \text{ или } x = \frac{a}{a+b} \cdot c \quad (1)$$

С другой стороны,  $\angle ACD = \alpha$ , а  $\angle ADC = 2\alpha$  (как внешний угол  $\triangle CBD$ ). Тогда три угла  $\triangle ACD$  равны трем углам  $\triangle ABC$ , следовательно,  $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ .

Из подобия треугольников найдем

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{x}; \quad x = \frac{ab}{c} \quad (2)$$

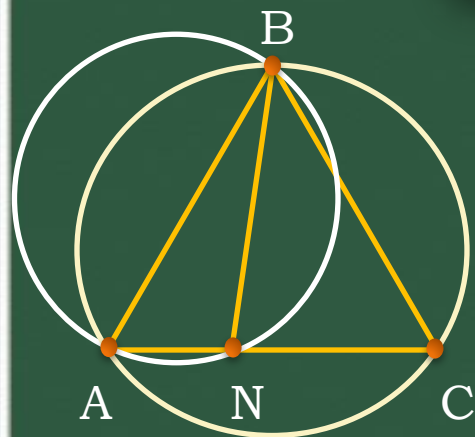
Приравняв правые части (1) и (2) равенства, получим

$$\frac{ab}{c} = \frac{ac}{a+b}; \quad ac^2 = ab(a+b); \quad c^2 = \frac{ab(a+b)}{a}; \quad c^2 = b(a+b); \quad c = \sqrt{(a+b)b}$$

Ответ:  $BC = \sqrt{(a+b)b}$

## Задача 1

## Задача 2



Точка N лежит на стороне AC правильного треугольника ABC. Найти отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABN и ABC, если  $AN:AC=n$

Решение

Обозначим сторону треугольника ABC через  $a$ , тогда  $AN=na$ .

Сторону BN найдем по теореме косинусов:

$$BN^2 = AB^2 + AN^2 - 2AB \cdot AN \cdot \cos 60^\circ; \quad BN = a\sqrt{1+n^2-n}$$

$R_1$  – радиус окружности, описанной около  $\triangle ABN$ .

$R_2$  – радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

Применим формулу  $S = \frac{abc}{4R}$



## Задача 1

## Задача 2

Около всякого треугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из середин сторон этого треугольника.

Радиус  $R$  окружности, описанной около треугольника, по его сторонам и полупериметру вычисляется по формуле:

$$R = \frac{abc}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}; \text{ где } p - \text{ полупериметр: } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Также радиус  $R$  окружности, описанной около треугольника, может быть вычислен по формулам:

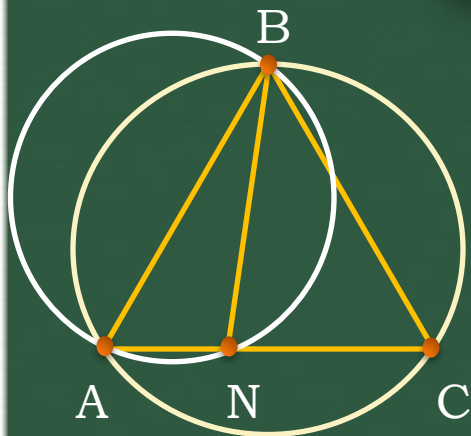
$$R = \frac{ab}{2h_c}; R = \frac{abc}{4S},$$

где  $S$  – площадь треугольника,

$h_c$  – высота, проведенная из вершины  $C$ .

## Задача 1

## Задача 2



Применяя формулу  
получим, что

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S_{(\triangle ABN)} = \frac{na^3 \sqrt{1+n^2-n}}{4R_1}; S_{(\triangle ABC)} = \frac{a^3}{4R_2}.$$

Если у треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания. А так как  $\triangle ABN$  и  $\triangle ABC$  имеют общую высоту, проведенную из вершины  $B$ , то их площади относятся как длины оснований:  $S_{(\triangle ABN)} = n \cdot S_{(\triangle ABC)}$ .

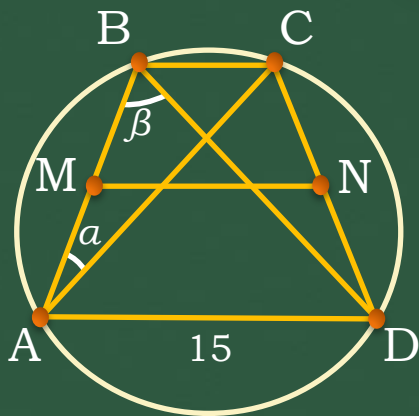
Подставляя выражения для площадей, получим:

$$\frac{na^3 \sqrt{1+n^2-n}}{4R_1} = \frac{na^3}{4R_2}; \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{1+n^2-n}.$$

Ответ:  $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{1+n^2-n}.$

## Задача 1

## Задача 2



Трапеция  $ABCD$  вписана в окружность. Найти среднюю линию трапеции, если ее большее основание  $AD$  равно 15, синус  $\angle BAC$  равен  $1/3$ , синус  $\angle ABD$  равен  $5/9$ .

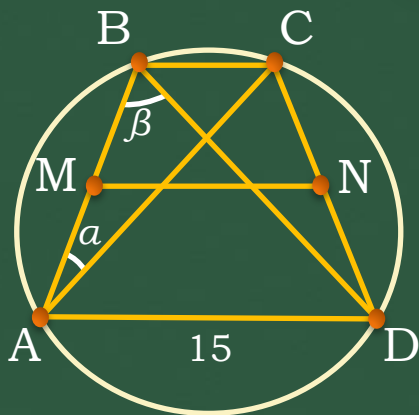
Решение





## Задача 1

## Задача 2



## Решение

Средняя линия трапеции равна  $MN = \frac{AD + BC}{2}$ .

Для нахождения средней линии надо найти длину основания BC.

Используя свойства вписанных и центральных углов окружности, а также радиус описанной окружности  $R$ , выразим:

$$AD = 2R \cdot \sin \angle \beta; BC = 2R \cdot \sin \angle \alpha;$$

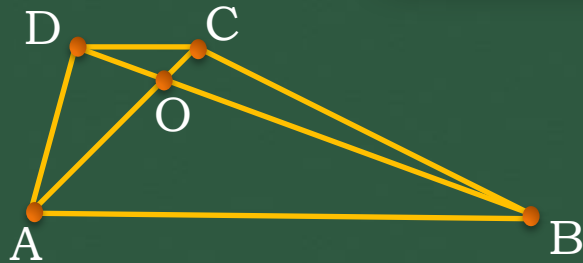
$$\frac{BC}{AD} = \frac{\sin \angle \alpha}{\sin \angle \beta} = \frac{1 \cdot 9}{3 \cdot 5} = \frac{3}{5}; BC = \frac{3}{5} AD; BC = 9$$

$$\text{Длина } MN = \frac{15 + 9}{2}; MN = 12$$

Ответ: 12

## Задача 1

## Задача 2



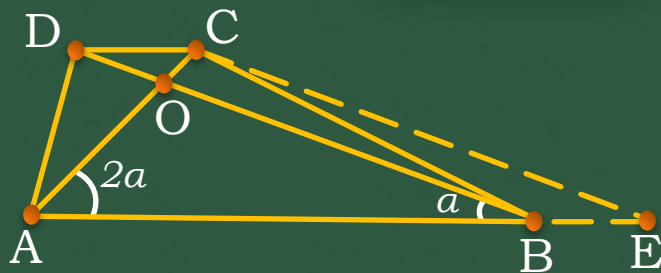
В трапеции ABCD ( $AB \parallel CD$ )  
диагонали  $AC=a$  и  $BD=7/5a$ .  
Найти площадь трапеции, если  
 $\angle CAB=2\angle DBA$ .

Решение



## Задача 1

## Задача 2



## Решение

Пусть  $\angle DBA = \alpha$ , тогда  $\angle CAB = 2\alpha$ .

Через вершину  $C$  проведем  $CE \parallel DB$  до пересечения ее с продолжением основания  $AB$  в точке  $E$ .

$BE = CD$ ;  $CE = BD$ ;  $\angle CEA = \angle DBA = \alpha$  – соответственные при  $DB \parallel CE$  и  $AE$  секущая.

$$S(\triangle ACE) = \frac{1}{2} AE \cdot h = \frac{1}{2} (AB + BE) \cdot h = \frac{1}{2} (AB + DC) \cdot h = S(ABCD)$$

$h$  – высота  $\triangle ACE$  и трапеции  $ABCD$ .

$$S(\triangle ACE) = \frac{1}{2} AC \cdot EC \cdot \sin \angle ACE = \frac{1}{2} a \cdot \frac{7a}{5} \cdot \sin(\pi - 3\alpha) = \frac{7}{10} a^2 \cdot \sin 3\alpha.$$

Для  $\triangle ACE$  применим теорему синусов:  $\frac{CE}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin \alpha}$ ;  $\cos \alpha = \frac{7}{10}$ ;  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$ .

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha; \quad \sin 3\alpha = \frac{12\sqrt{51}}{125}, \text{ следовательно,}$$

$$S(\triangle ABCD) = S(\triangle ACE) = \frac{42\sqrt{51}}{125 \cdot 5} \cdot a^2$$

Ответ:

$$\frac{42\sqrt{51}}{625} \cdot a^2$$

Устная работа

Проверка д/з

Решение задач

Д/з

**Спасибо за внимание**

Выход