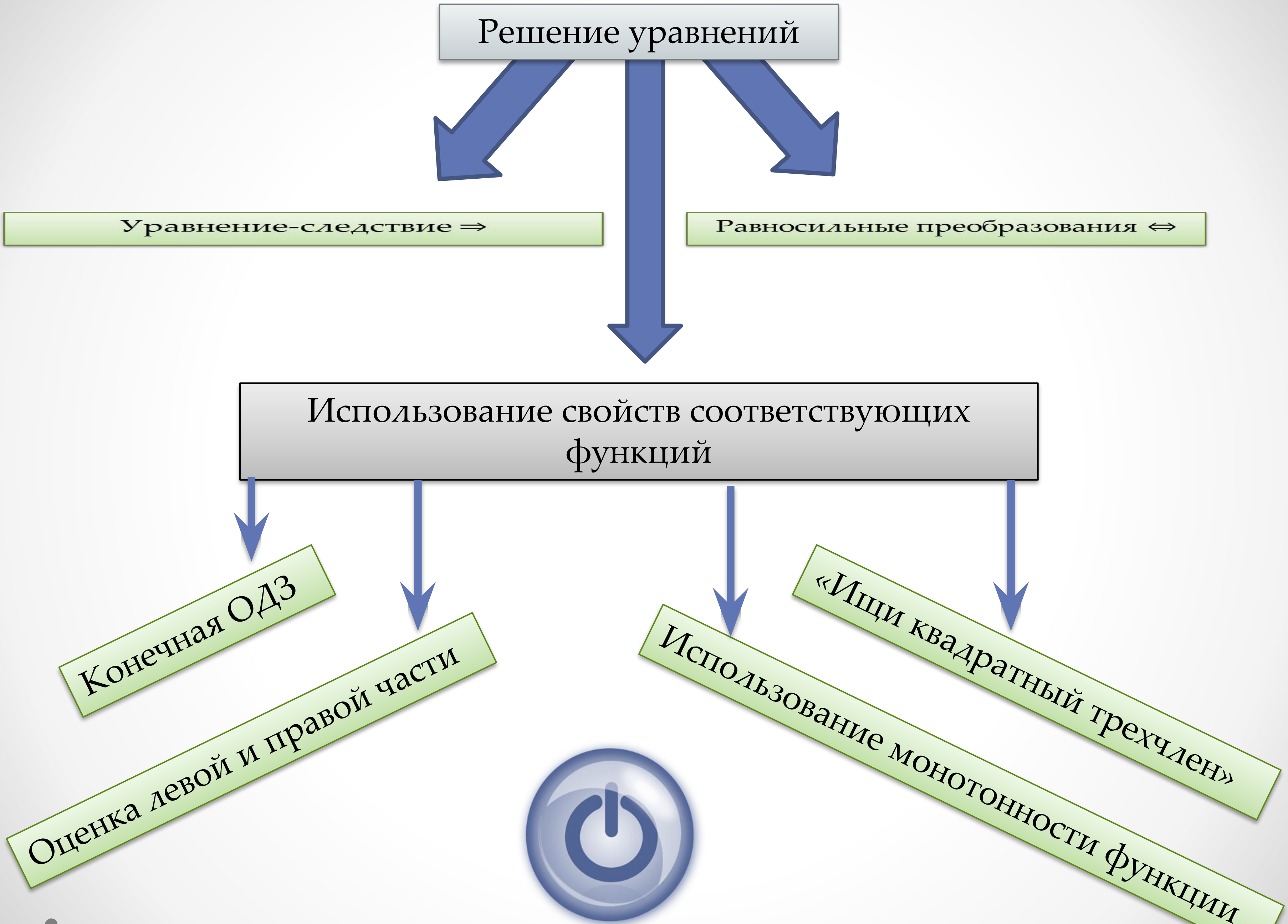
МБОУ СОШ №43 г. Белгорода

Решение уравнений

Трифонов Сергей Викторович – учитель математики (I квалификационная категория, МОУ-СОШ №43 г.Белгорода)
Трифонова Наталья Владимировна – учитель математики (I квалификационная категория, МОУ-СОШ №43 г.Белгорода)


Решение уравнений
Уравнение-следствие ⇒
Равносильные преобразования ⇔
Использование свойств соответствующих функций
Конечная ОДЗ
Оценка левой и правой части
Использование монотонности функции
«Ищи квадратный трехчлен»

Уравнение-следствие

Для получения уравнения-следствия достаточно посмотреть на заданное уравнение как на верное числовое равенство и гарантировать, что каждое следующее уравнение мы можем получить как верное числовое равенство

При использовании уравнений-следствий проверка подстановкой в исходное уравнение является составной частью решения.

Пример:

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$

Решение:

$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x},$

$x + 1 = \left(1+\sqrt{4-x}\right)^2,$

$x + 1 = 1 + 2\sqrt{4-x} + 4 - x,$

$2x - 4 = 2\sqrt{4-x},$

$x - 2 = \sqrt{4-x},$

$(x-2)^2 = 4 - x,$

$x^2 - 3x = 0,$

$x(x-3) = 0,$

$x_1 = 0; \quad x_2 = 3.$

Проверка:

При x=0

получаем неверное равенство (-1=1)

При x=3

получаем верное равенство (1=1)

Посмотрим на данное уравнение как на верное числовое равенство. А именно: если в верном числовом равенстве перенести член из одной части в другую с противоположным знаком, то равенство не нарушится.

Если числа равны то и квадраты равны.

Если обе части верного неравенства разделить на число 2≠0, то равенство не нарушится.

Если числа равны то и квадраты равны.

Раскрывая скобки и перенося все члены в одну сторону, мы снова получаем верное равенство, откуда находим корни неполного квадратного уравнения

Поскольку для решения уравнения мы использовали уравнение-следствие, то в решение входит также проверка найденных корней подстановкой в исходное уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$$

Ответ: 3

СХЕМА ВЫПОЛНЕНИЯ РАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УРАВНЕНИЙ

1. Учесть ОДЗ исходного уравнения
2. Гарантировать (на ОДЗ) прямые и обратные преобразования

Пример:

$$\log_{2x-1}(x^2+3x+7)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+3x+7)>0, \\ 2x-1>0, \\ 2x-1\neq 1, \\ x^2+3x+7=(2x-1)^2 \end{cases}$$

ОДЗ

$\Leftrightarrow$

Равносильные преобразования

$$\begin{cases} 2x-1>0, \\ 2x-1\neq 1, \\ x^2+3x+7=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x\neq 1, \\ 3x^2-7x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=- \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Ответ: 3.

Т.к. $x^2+3x+7=(2x-1)^2$ значит $(x^2+3x+7)>0$

Конечная ОДЗ

Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения

У некоторых уравнений область определения состоит только из конечного числа точек. Для решения таких уравнений достаточно проверить, не являются ли найденные числа из области определения уравнения корнями этого уравнения.

Пример:

$$\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$$

ОДЗ $\begin{cases} x^2-1\geq 0, \\ 2-2x^2\geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2\geq 1, \\ x^2\leq 1. \end{cases}$

Эта система выполняется только при x^2=1, тогда $x=\pm 1$

Решения уравнения могут находиться только внутри ОДЗ, т.е. среди чисел $x=1$ и $x=-1$.

Проверяем эти числа:

$x=1$ - корень уравнения (1=1)

$x=-1$ не является корнем уравнения (-1≠1)

Ответ: 1.

Оценка левой и правой части уравнения

Позволяет решать уравнения вида $f(x) = g(x)$, при условии, что
$f(x) \leq a, \qquad g(x) \geq a$

Пример: $x^2 + 2^{|x|} = 1$

Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.

Пример: $\sqrt{x-2} + |x^3 - 8| + \lg\left(1 + \sqrt{x^2 - 4}\right) = 0$

$$x^2 + 2^{|x|} = 1$$

Решение:

$$x^2 + 2^{|x|} = 1 \Leftrightarrow 2^{|x|} = 1 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Ответ: x=0

$$f(x) = 2^{|x|} \geq 1 \text{ (т. к. } |x| \geq 0\text{)},$$
$$g(x) = 1 - x^2 \leq 1$$

$$\sqrt{x-2}+|x^3-8|+\lg\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)=0$$

Решение:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2}\geq 0, \\ |x^3-8|\geq 0, \\ \lg(1+\sqrt{x^2-4})\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=0, \\ |x^3-8|=0, \\ \lg\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2$$

Ответ: x=2

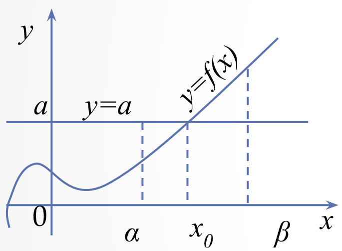
Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.

…………….	

Использование монотонности функции

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.
2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет

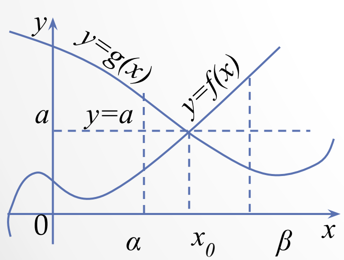
Теорема 1



Если в уравнении $f(x)=a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке

Пример:

Теорема 2



Если в уравнении $f(x)=g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке

Пример:

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$$

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.

Уравнение имеет корень *x=1*

т. к. $\sqrt{1} + \sqrt[3]{1} = 2$, т.е. 2=2

2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет

Единственный корень,

т.к. функция $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ возрастает (на всей О.О. $x \geq 0$)

Ответ: *x=1.*

$$2^x = 6 - x$$

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.

Уравнение имеет корень *x=2*

т. к. $2^2 = 6 - 2$, т. е. $4 = 4$

2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет

единственный корень

т. к. $f(x) = 2^x$ - возрастает,

а $g(x) = 6 - x$ – убывает.

Ответ: *x=2*

«Ищи квадратный трёхчлен»

Попробуйте рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно какой-либо переменной
(или какой-либо функции)

$$4^x - (7-x)2^x + 12 - 4x = 0$$

Решение:

Запишем, что $4^x = 2^{2x}$ и введем замену $2^x = t$. Получаем
$t^2 - (7-x)t + 12 - 4x = 0.$
Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно t.
$D = (7-x)^2 - 4(12-4x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$
$t_{1,2} = \frac{7-x\pm(x+1)}{2},$
$t_1 = 4,\ t_2 = 3-x.$
Обратная замена даёт:
$2^x = 4$ (отсюда $x=2$)
или $2^x = 3-x$
$x=1$ (так как $f(x) = 2^x$ - возрастает, а $g(x) = 3-x$ – убывает).
Ответ: 1; 2.

Используемая литература

- Е.П.Нелин Алгебра в таблицах 7-11, «Определения, свойства, методы решения задач в таблицах»;
- Е.П.Нелин Методы решения алгебраических задач *(приложение к учебному пособию «Алгебра в таблицах»)*

Используемые иллюстрации

- Е.П.Нелин Алгебра в таблицах 7-11, «Определения, свойства, методы решения задач в таблицах»;
- Office.com – кнопки для навигации по сайту.