

МБОУ СОШ №43 г. Белгорода

Решение уравнений

Трифонов Сергей Викторович – учитель математики (I квалификационная категория, МОУ-СОШ №43 г.Белгорода)

Трифорова Наталья Владимировна – учитель математики (I квалификационная категория, МОУ-СОШ №43 г.Белгорода)

Решение уравнений

Уравнение-следствие \Rightarrow

Равносильные преобразования \Leftrightarrow

Использование свойств соответствующих функций

Конечная ОДЗ

Оценка левой и правой части



Использование монотонности функции

«Ищи квадратный трехчлен»

Уравнение-следствие

Для получения уравнения-следствия достаточно посмотреть на заданное уравнение как на верное числовое равенство и гарантировать, что каждое следующее уравнение мы можем получить как верное числовое равенство

При использовании уравнений-следствий проверка подстановкой в исходное уравнение является составной частью решения.

Пример:



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$$

Решение:

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x},$$

$$x+1 = (1+\sqrt{4-x})^2,$$

$$x+1 = 1 + 2\sqrt{4-x} + 4-x,$$

$$\sqrt{2x-4} = 2\sqrt{4-x},$$

$$x-2 = \sqrt{4-x},$$

$$(x-2)^2 = 4-x,$$

$$x^2 - 3x = 0,$$

$$x(x-3) = 0,$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 3.$$

Проверка:

При $x=0$

получаем неверное равенство ($-1=1$)

При $x=3$

получаем верное равенство ($1=1$)

Посмотрим на данное уравнение как на верное числовое равенство. А именно: если в верном числовом равенстве перенести член из одной части в другую с противоположным знаком, то равенство не нарушится.

Если числа равны то и квадраты равны.

Если обе части верного неравенства разделить на число $2 \neq 0$, то равенство не нарушится.

Если числа равны то и квадраты равны.

Раскрывая скобки и перенося все члены в одну сторону, мы снова получаем верное равенство, откуда находим корни неполного квадратного уравнения

Поскольку для решения уравнения мы использовали уравнение-следствие, то в решение входит также проверка найденных корней подстановкой в исходное уравнение

Ответ: 3



СХЕМА ВЫПОЛНЕНИЯ РАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УРАВНЕНИЙ

1. Учесть ОДЗ исходного уравнения
2. Гарантировать (на ОДЗ) прямые и обратные преобразования

Пример:



$$\log_{2x-1}(x^2 + 3x + 7) = 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + 3x + 7) > 0, \\ 2x - 1 > 0, \\ 2x - 1 \neq 1, \\ x^2 + 3x + 7 = (2x - 1)^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ОДЗ} \\ \Leftrightarrow \\ \text{Равносильные} \\ \text{преобразования} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 > 0, \\ 2x - 1 \neq 1, \\ x^2 + 3x + 7 = (2x - 1)^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1, \\ 3x^2 - 7x - 6 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = - \end{array} \right] \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 3$$

Ответ: 3.

Т.к. $x^2 + 3x + 7 = (2x - 1)^2$ значит
 $(x^2 + 3x + 7) > 0$



Конечная ОДЗ

Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения

У некоторых уравнений область определения состоит только из конечного числа точек. Для решения таких уравнений достаточно проверить, не являются ли найденные числа из области определения уравнения корнями этого уравнения.

Пример:



$$\sqrt{x^2 - 1} + x = 1 + \sqrt{2 - 2x^2}$$

$$\text{ОДЗ} \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, & \begin{cases} x^2 \geq 1, \\ x^2 \leq 1. \end{cases} \\ 2 - 2x^2 \geq 0, \end{cases}$$

Эта система выполняется
только при $x^2=1$, тогда $x = \pm 1$

Решения уравнения могут находиться только внутри ОДЗ, т.е. среди чисел
 $x = 1$ и $x = -1$.

Проверяем эти числа:

$x = 1$ - корень уравнения ($1=1$)

$x = -1$ не является корнем уравнения ($-1 \neq 1$)

Ответ: 1.



Оценка левой и правой части уравнения

Позволяет решать уравнения вида $f(x) = g(x)$, при условии, что
 $f(x) \leq a, \quad g(x) \geq a$

Пример:

$$x^2 + 2^{|x|} = 1$$



Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.

Пример:

$$\sqrt{x-2} + |x^3 - 8| + \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) = 0$$



$$x^2 + 2^{|x|} = 1$$

Решение:

$$x^2 + 2^{|x|} = 1 \Leftrightarrow 2^{|x|} = 1 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Ответ: $x=0$

$$f(x) = 2^{|x|} \geq 1 \text{ (т.к. } |x| \geq 0),$$
$$g(x) = 1 - x^2 \leq 1$$



$$\sqrt{x-2} + |x^3 - 8| + \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) = 0$$

Решение:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} \geq 0, \\ |x^3 - 8| \geq 0, \\ \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0, \\ |x^3 - 8| = 0, \\ \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Ответ: $x=2$

Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.

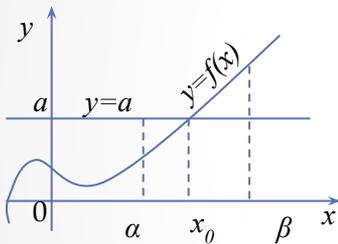
.....	



Использование монотонности функции

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.
2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет

Теорема 1

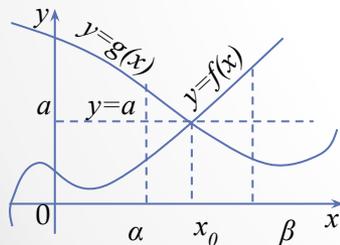


Если в уравнении $f(x)=a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке

Пример:



Теорема 2



Если в уравнении $f(x)=g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке

Пример:



$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$$

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.

Уравнение имеет корень $x=1$

$$\text{т.к. } \sqrt{1} + \sqrt[3]{1} = 2, \text{ т.е. } 2=2$$

2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет

Единственный корень,
т.к. функция $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ возрастает (на всей О.О. $x \geq 0$)

Ответ: $x=1$.



$$2^x = 6 - x$$

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.

Уравнение имеет корень $x=2$
т. к. $2^2 = 6 - 2$, т. е. $4 = 4$

2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет

единственный корень
т. к. $f(x) = 2^x$ - возрастает,
а $g(x) = 6 - x$ - убывает.

Ответ: $x=2$



«Ищи квадратный трёхчлен»

Попробуйте рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно какой-либо переменной (или какой-либо функции)

$$4^x - (7 - x)2^x + 12 - 4x = 0$$

Решение:

Запишем, что $4^x = 2^{2x}$ и введем замену $2^x = t$. Получаем
 $t^2 - (7 - x)t + 12 - 4x = 0$.

Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно t .

$$D = (7 - x)^2 - 4(12 - 4x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

$$t_{1,2} = \frac{7-x \pm (x+1)}{2},$$

$$t_1 = 4, \quad t_2 = 3 - x.$$

Обратная замена даёт:

$$2^x = 4 \text{ (отсюда } x=2)$$

$$\text{или } 2^x = 3 - x$$

$x=1$ (так как $f(x) = 2^x$ - возрастает, а $g(x) = 3 - x$ - убывает).

Ответ: 1; 2.



Используемая литература

- Е.П.Нелин Алгебра в таблицах 7-11, «Определения, свойства, методы решения задач в таблицах»;
- Е.П.Нелин Методы решения алгебраических задач (приложение к учебному пособию «Алгебра в таблицах»)

Используемые иллюстрации

- Е.П.Нелин Алгебра в таблицах 7-11, «Определения, свойства, методы решения задач в таблицах»;
- Office.com – кнопки для навигации по сайту.