

МБОУ СОШ №43 г. Белгорода

# Решение уравнений

Трифонов Сергей Викторович – учитель математики (I квалификационная категория, МОУ-СОШ №43 г.Белгорода)

Трифорова Наталья Владимировна – учитель математики (I квалификационная категория, МОУ-СОШ №43 г.Белгорода)

Решение уравнений

Уравнение-следствие  $\Rightarrow$

Равносильные преобразования  $\Leftrightarrow$

Использование свойств соответствующих функций

Конечная ОДЗ

Оценка левой и правой части



Использование монотонности функции

«Ищи квадратный трехчлен»

## Уравнение-следствие

Для получения уравнения-следствия достаточно посмотреть на заданное уравнение как на верное числовое равенство и гарантировать, что каждое следующее уравнение мы можем получить как верное числовое равенство

**При использовании уравнений-следствий проверка подстановкой в исходное уравнение является составной частью решения.**

Пример:



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$$

**Решение:**

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x},$$

$$x+1 = (1+\sqrt{4-x})^2,$$

$$x+1 = 1 + 2\sqrt{4-x} + 4-x,$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$$

$$2x-4 = 2\sqrt{4-x},$$

$$x-2 = \sqrt{4-x},$$

$$(x-2)^2 = 4-x,$$

$$x^2 - 3x = 0,$$

$$x(x-3) = 0,$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 3.$$

**Проверка:**

При  $x=0$

*получаем неверное равенство ( $-1=1$ )*

При  $x=3$

*получаем верное равенство ( $1=1$ )*

Посмотрим на данное уравнение как на верное числовое равенство. А именно: если в верном числовом равенстве перенести член из одной части в другую с противоположным знаком, то равенство не нарушится.

Если числа равны то и квадраты равны.

Если обе части верного неравенства разделить на число  $2 \neq 0$ , то равенство не нарушится.

Если числа равны то и квадраты равны.

Раскрывая скобки и перенося все члены в одну сторону, мы снова получаем верное равенство, откуда находим корни неполного квадратного уравнения

Поскольку для решения уравнения мы использовали уравнение-следствие, то в решение входит также проверка найденных корней подстановкой в исходное уравнение

**Ответ:** 3



## СХЕМА ВЫПОЛНЕНИЯ РАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УРАВНЕНИЙ

1. Учесть ОДЗ исходного уравнения
2. Гарантировать (на ОДЗ) прямые и обратные преобразования

Пример:



$$\log_{2x-1}(x^2 + 3x + 7) = 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + 3x + 7) > 0, \\ 2x - 1 > 0, \\ 2x - 1 \neq 1, \\ x^2 + 3x + 7 = (2x - 1)^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ОДЗ} \\ \Leftrightarrow \\ \text{Равносильные} \\ \text{преобразования} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 > 0, \\ 2x - 1 \neq 1, \\ x^2 + 3x + 7 = (2x - 1)^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1, \\ 3x^2 - 7x - 6 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1, \\ \left[ \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = - \end{array} \right] \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 3$$

**Ответ: 3.**

Т.к.  $x^2 + 3x + 7 = (2x - 1)^2$  значит  
 $(x^2 + 3x + 7) > 0$



## Конечная ОДЗ

Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения

*У некоторых уравнений область определения состоит только из конечного числа точек. Для решения таких уравнений достаточно проверить, не являются ли найденные числа из области определения уравнения корнями этого уравнения.*

Пример:



$$\sqrt{x^2 - 1} + x = 1 + \sqrt{2 - 2x^2}$$

$$\text{ОДЗ} \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, & \begin{cases} x^2 \geq 1, \\ x^2 \leq 1. \end{cases} \\ 2 - 2x^2 \geq 0, \end{cases}$$

Эта система выполняется  
только при  $x^2=1$ , тогда  $x = \pm 1$

Решения уравнения могут находиться только внутри ОДЗ, т.е. среди чисел  
 $x = 1$  и  $x = -1$ .

Проверяем эти числа:

$x = 1$  - корень уравнения ( $1=1$ )

$x = -1$  не является корнем уравнения ( $-1 \neq 1$ )

**Ответ: 1.**





## Оценка левой и правой части уравнения

Позволяет решать уравнения вида  $f(x) = g(x)$ , при условии, что  
 $f(x) \leq a, \quad g(x) \geq a$

Пример:

$$x^2 + 2^{|x|} = 1$$



Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.

Пример:

$$\sqrt{x-2} + |x^3 - 8| + \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) = 0$$



$$x^2 + 2^{|x|} = 1$$

Решение:

$$x^2 + 2^{|x|} = 1 \Leftrightarrow 2^{|x|} = 1 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

**Ответ:  $x=0$**

$$f(x) = 2^{|x|} \geq 1 \text{ (т.к. } |x| \geq 0),$$
$$g(x) = 1 - x^2 \leq 1$$




$$\sqrt{x-2} + |x^3 - 8| + \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) = 0$$

**Решение:**

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} \geq 0, \\ |x^3 - 8| \geq 0, \\ \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0, \\ |x^3 - 8| = 0, \\ \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

**Ответ:**  $x=2$

Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.

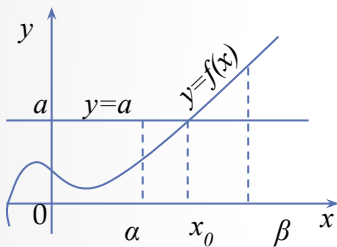
.....	



## Использование монотонности функции

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.
2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет

### Теорема 1

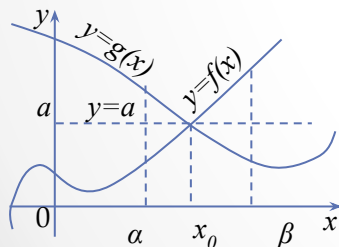


Если в уравнении  $f(x)=a$  функция  $f(x)$  возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке

Пример:



### Теорема 2



Если в уравнении  $f(x)=g(x)$  функция  $f(x)$  возрастает на некотором промежутке, а функция  $g(x)$  убывает на этом промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке

Пример:



$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$$

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.

Уравнение имеет корень  $x=1$

$$\text{т.к. } \sqrt{1} + \sqrt[3]{1} = 2, \text{ т.е. } 2=2$$

2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет

Единственный корень,  
т.к. функция  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$  возрастает (на всей О.О.  $x \geq 0$ )

**Ответ:**  $x=1$ .



$$2^x = 6 - x$$

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.

Уравнение имеет корень  $x=2$   
т.к.  $2^2 = 6 - 2$ , т.е.  $4 = 4$

2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет

единственный корень  
т.к.  $f(x) = 2^x$  - возрастает,  
а  $g(x) = 6 - x$  - убывает.

**Ответ:**  $x=2$



## «Ищи квадратный трёхчлен»

Попробуйте рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно какой-либо переменной (или какой-либо функции)

$$4^x - (7 - x)2^x + 12 - 4x = 0$$

**Решение:**

Запишем, что  $4^x = 2^{2x}$  и введем замену  $2^x = t$ . Получаем  
 $t^2 - (7 - x)t + 12 - 4x = 0$ .

Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно  $t$ .

$$D = (7 - x)^2 - 4(12 - 4x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

$$t_{1,2} = \frac{7-x \pm (x+1)}{2},$$

$$t_1 = 4, \quad t_2 = 3 - x.$$

Обратная замена даёт:

$$2^x = 4 \text{ (отсюда } x=2)$$

$$\text{или } 2^x = 3 - x$$

$x=1$  (так как  $f(x) = 2^x$  - возрастает, а  $g(x) = 3 - x$  - убывает).

**Ответ:** 1; 2.



# Используемая литература

- Е.П.Нелин Алгебра в таблицах 7-11, «Определения, свойства, методы решения задач в таблицах»;
- Е.П.Нелин Методы решения алгебраических задач (приложение к учебному пособию «Алгебра в таблицах»)



# Используемые иллюстрации

- Е.П.Нелин Алгебра в таблицах 7-11, «Определения, свойства, методы решения задач в таблицах»;
- Office.com – кнопки для навигации по сайту.