

Теория вероятности

Лекция 1



Предмет теории вероятностей.

- Теория вероятностей изучает закономерности, возникающие в случайных экспериментах.
- Случайным называют эксперимент, результат которого нельзя предсказать заранее.
- Невозможность предсказать результат отличает случайное явление от детерминированного.

Предмет теории вероятностей.

- Не все случайные явления (эксперименты) можно изучать методами теории вероятностей, а лишь те, которые могут быть воспроизведены в одних и тех же условиях.
-

Предмет теории вероятностей.

- И в случайных экспериментах наблюдаются некоторые закономерности, например свойство «статистической устойчивости»: если A — некоторое событие, могущее произойти или не произойти в результате эксперимента, то доля $n(A) / n$ экспериментов, в которых данное событие произошло, имеет тенденцию стабилизироваться с ростом общего числа экспериментов n , приближаясь к некоторому числу $P(A)$.

Пространство элементарных исходов.

- Определение 1. Пространством элементарных исходов Ω («омега») называется множество, Ω содержащее все возможные результаты данного случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один. Элементы этого множества называют элементарными исходами и обозначают буквой ω («омега»).

Пространство элементарных исходов.

- Определение 2. Событиями мы будем называть подмножества множества Ω .
Говорят, что в результате эксперимента произошло событие $A \subseteq \Omega$, если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, входящих в множество Ω .

Пространство элементарных исходов.

Пример 1. Один раз подбрасывается кубик — игральная кость. Рассмотрим пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{\text{⊠}, \text{⊡}, \text{⊢}, \text{⊣}, \text{⊤}, \text{⊥}\}$, элементарные исходы здесь соответствуют числу выпавших очков.

Примеры событий: $A = \{1, 2\} = \{\text{⊠}, \text{⊡}\}$ — выпало одно или два очка;
 $B = \{1, 3, 5\} = \{\text{⊠}, \text{⊢}, \text{⊥}\}$ — выпало нечётное число очков.

Пространство элементарных исходов.

- **Определение 3.**

- 1. Достоверным называется событие, которое обязательно происходит в результате эксперимента, т. е. единственное событие, включающее все элементарные исходы — событие
- 2. Н е в о Ω о ж н ы м называется событие, которое не может произойти в результате эксперимента, т. е. событие, не содержащее ни одного элементарного исхода («пустое множество»). Заметим, что всегда

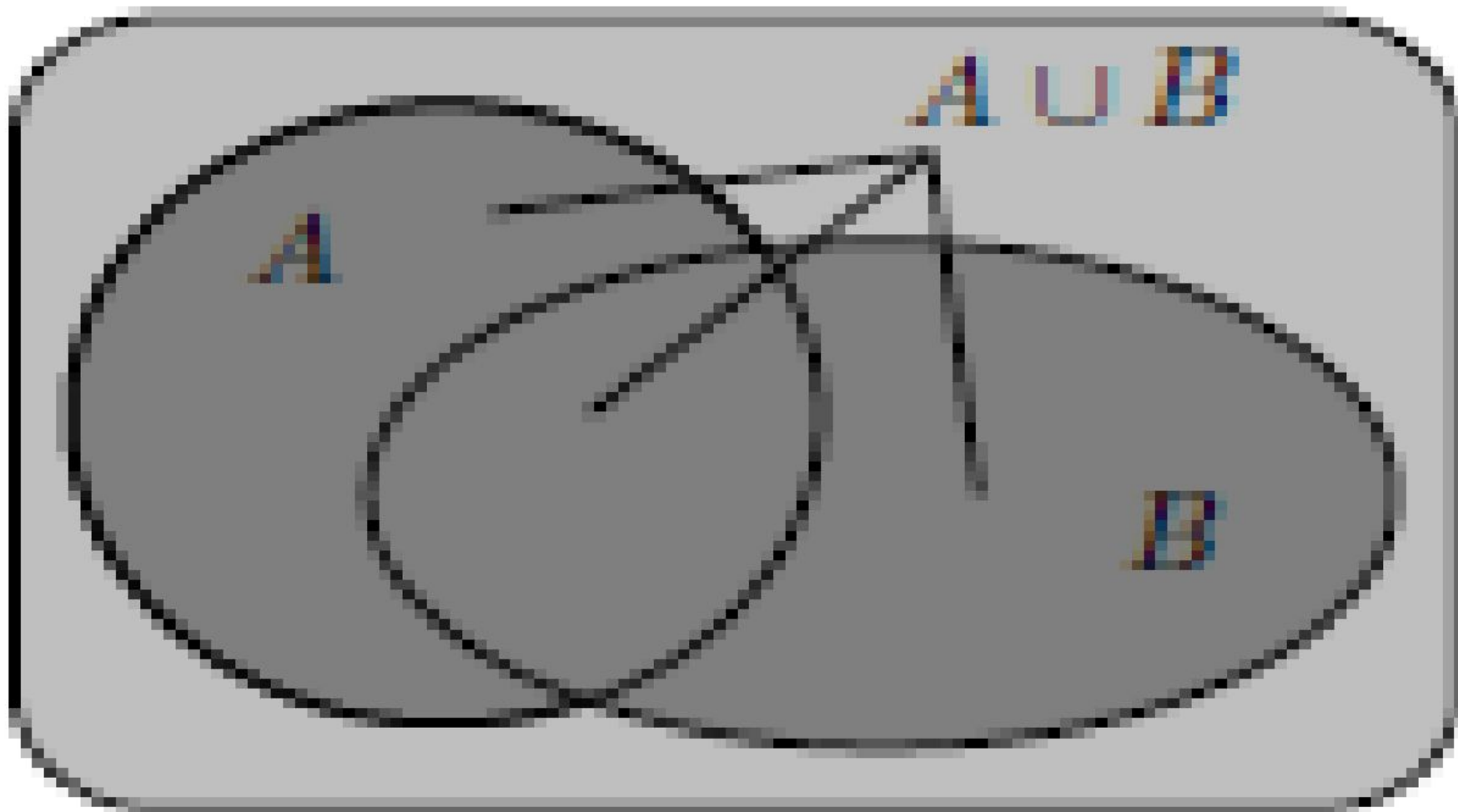
$$\emptyset$$

$$\emptyset \subset \Omega.$$

Объединение событий

- Определение 4. 1. Объединением $A \cup B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло либо A , либо B , либо оба события одновременно. На языке теории множеств $A \cup B$ есть множество, содержащее как элементарные исходы из множества A , так и элементарные исходы из множества B

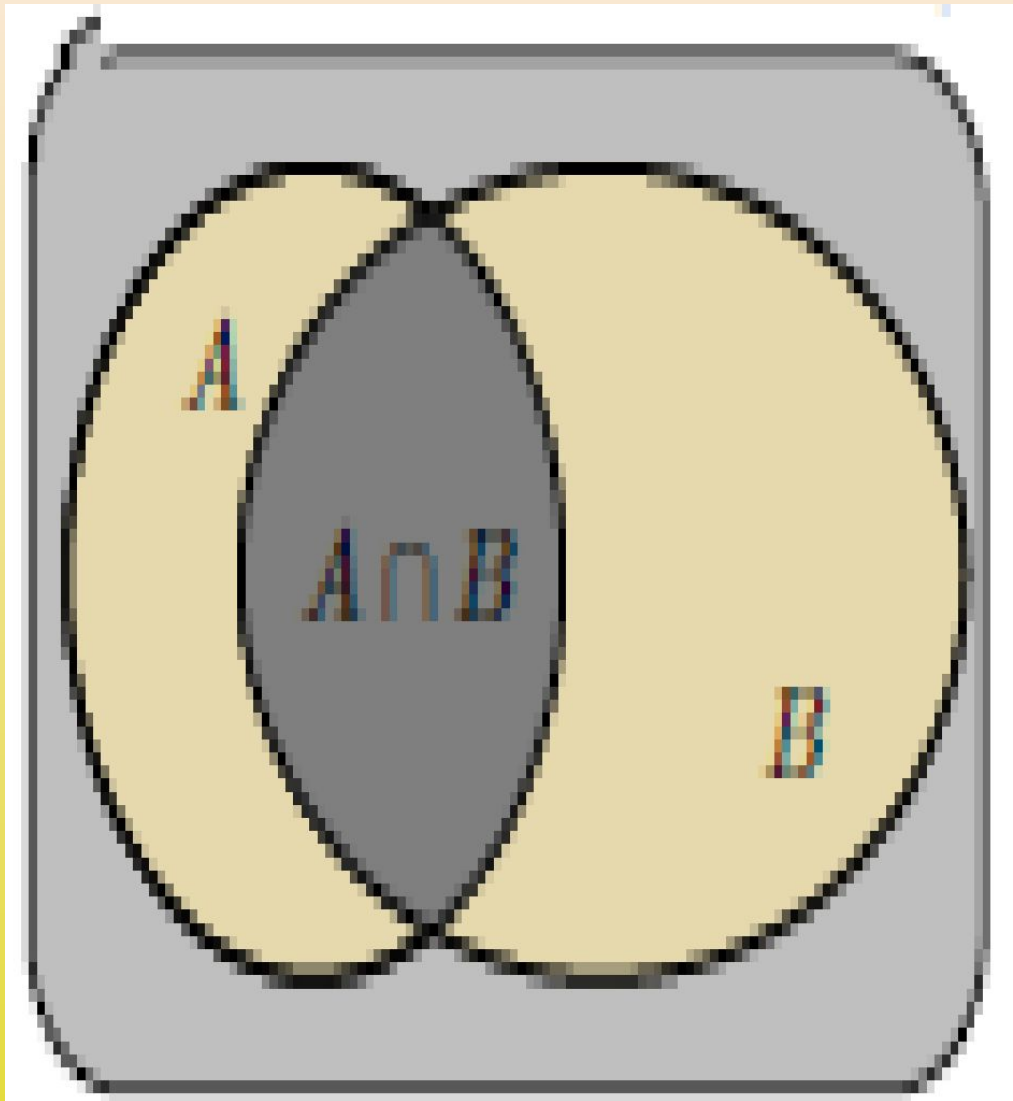
Объединение



Пересечение событий

- 2. Пересечением $A \cap B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошли оба события A и B одновременно. На языке теории множеств $A \cap B$ есть множество, содержащее элементарные исходы, входящие в пересечение множеств A и B .

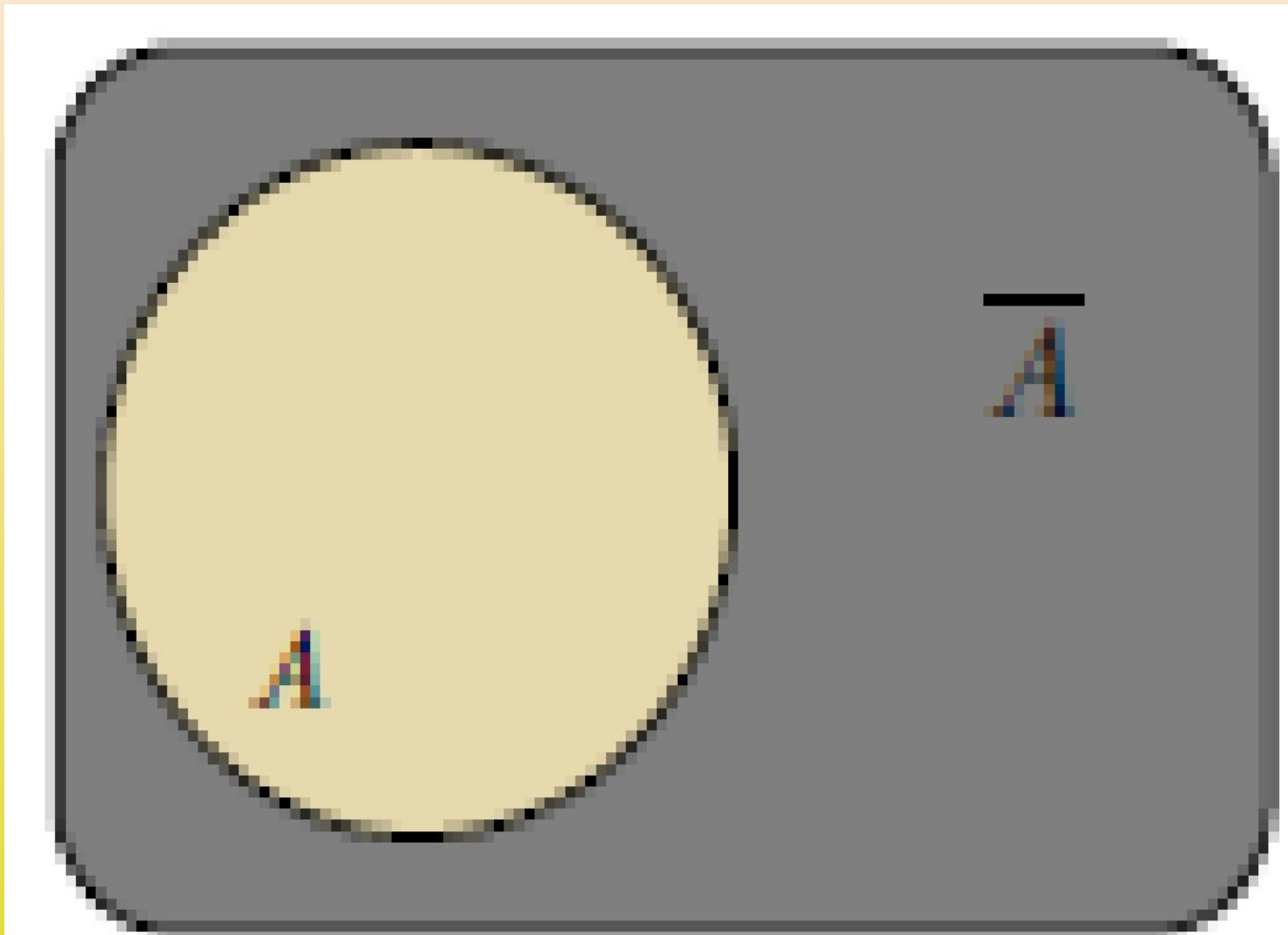
Пересечение



Противоположное событие

- 3. Противоположным (или дополнительным) к событию A называется событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$, состоящее в том, что событие A в результате эксперимента не произошло. Т. е. множество \bar{A} состоит из элементарных исходов, не входящих в A .

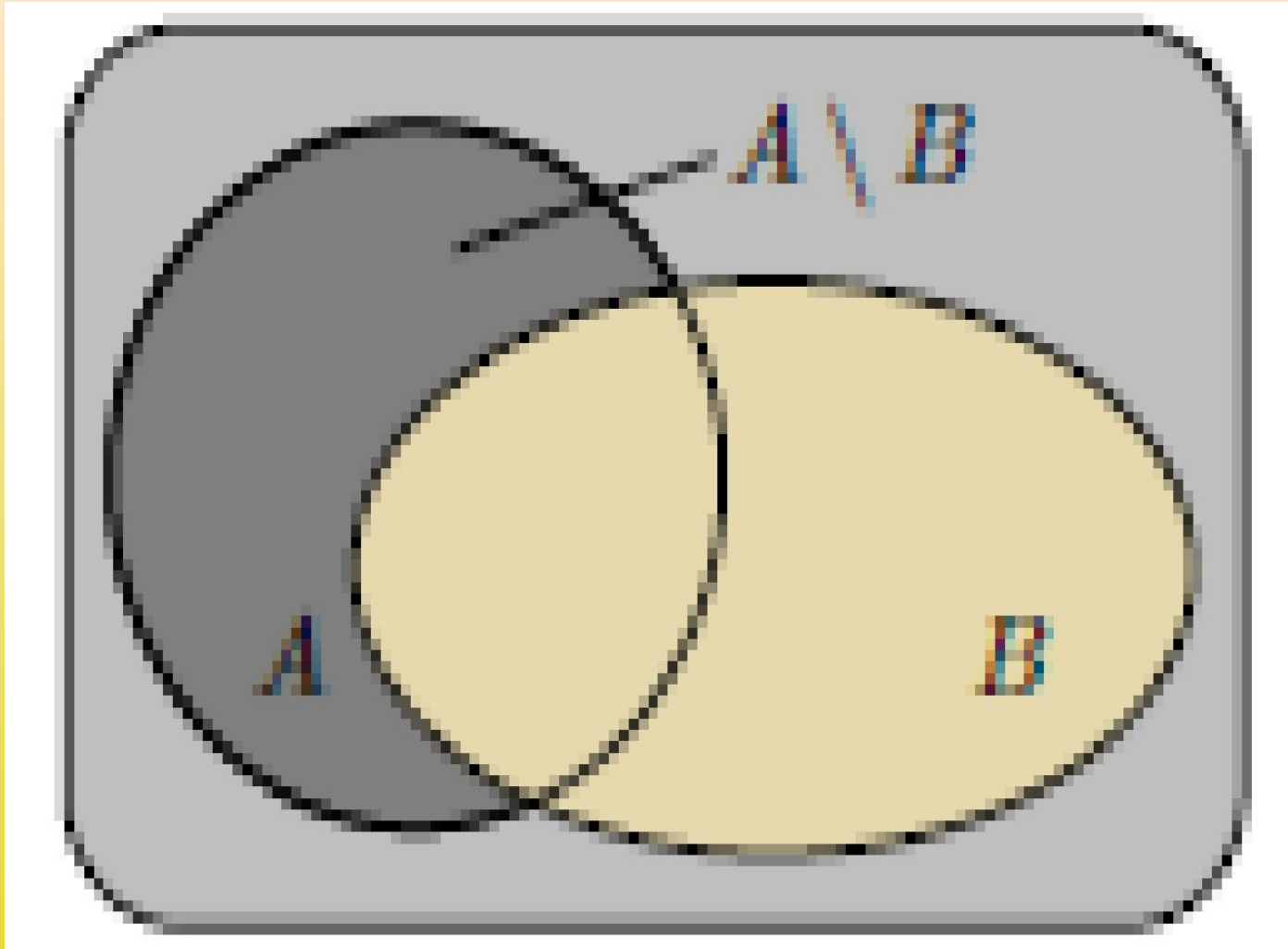
Противоположное событие



Дополнение

- 4. Дополнением $A \setminus B$ события B до A называется событие, состоящее в том, что произошло событие A , но не произошло B . Т. е. множество $A \setminus B$ содержит элементарные исходы, входящие в множество A , но не входящие в B .

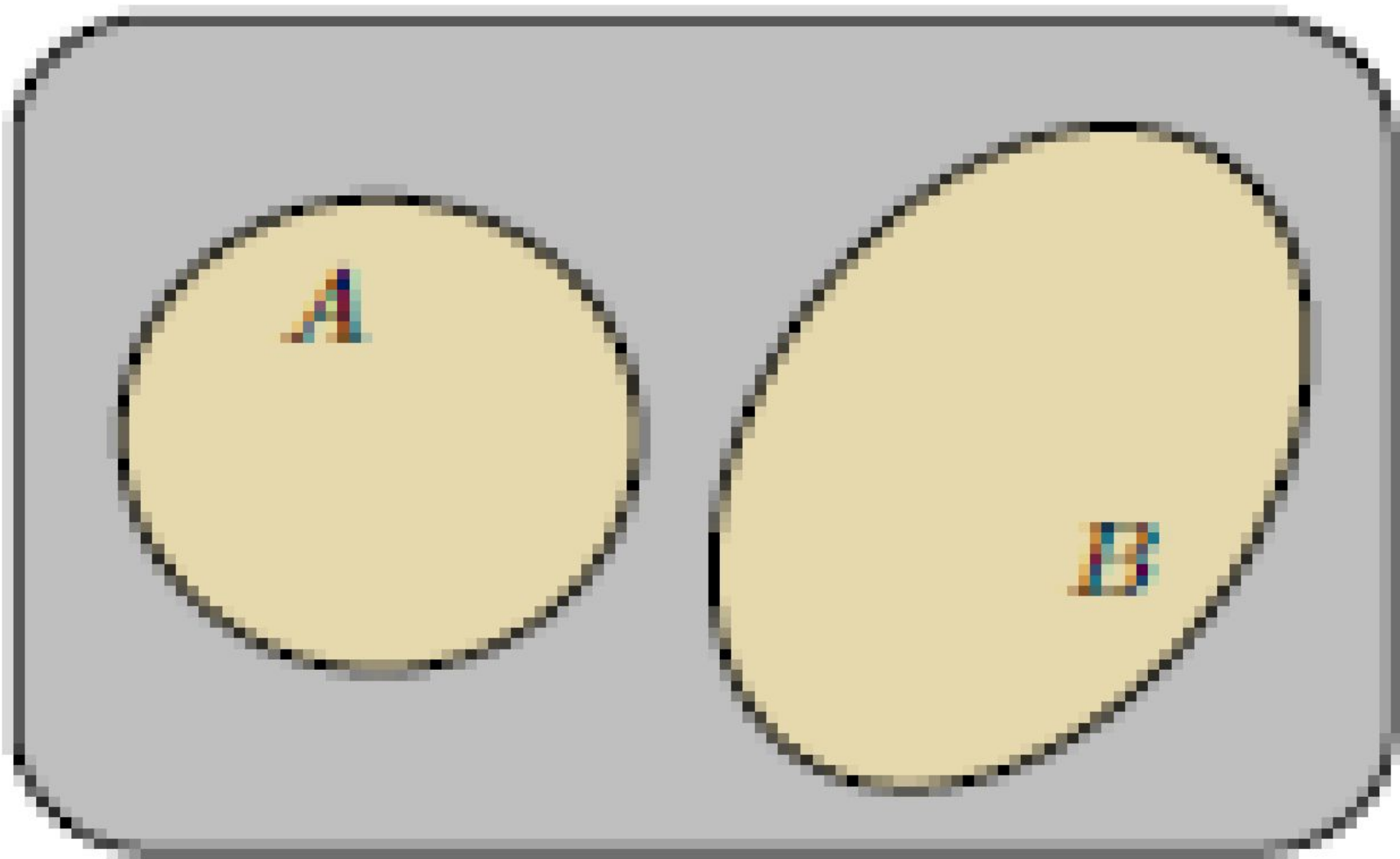
Дополнение



Несовместные события

- Определение 5.
- 1. События A и B называют несовместными, если $A \cap B = \emptyset$.
- 2. События A_1, \dots, A_n называются попарно несовместными, если для любых $i \neq j$, где $1 \leq i, j \leq n$, события A_i и A_j несовместны.

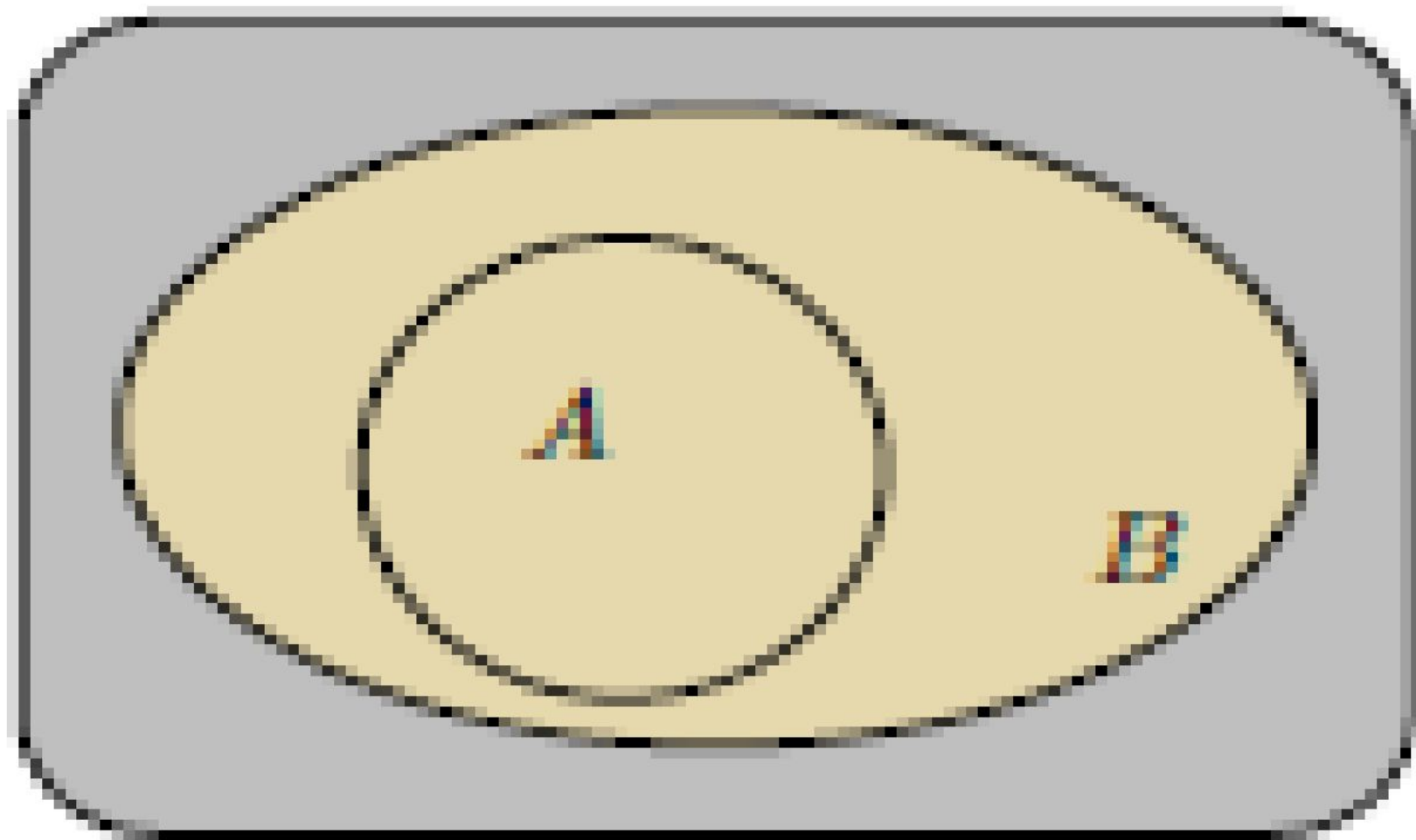
Несовместные события



Событие А влечёт событие В

- 3. Говорят, что событие А влечёт событие В, и пишут $A \subseteq B$, если всегда, как только происходит событие А, происходит и событие В. На языке теории множеств это означает, что любой элементарный исход, входящий в множество А, одновременно входит и в множество В, т. е. А содержится в В.

Событие А влечёт событие В



Вероятность на дискретном пространстве элементарных исходов

- Пространство элементарных исходов назовём **дискретным**, если оно конечно или счётно:
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}.$$
- Множество **счётно**, если существует взаимно-однозначное соответствие между этим множеством и множеством всех натуральных чисел. Счётными множествами являются множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество чётных чисел и т. д. Множество конечно, если оно состоит из конечного числа элементов.

Вероятность на дискретном пространстве элементарных исходов

- Чтобы определить вероятность любого события на дискретном пространстве элементарных исходов, достаточно присвоить вероятность каждому элементарному исходу. Тогда вероятность любого события определяется как сумма вероятностей входящих в него элементарных исходов.

Вероятность события

Определение 6. Поставим каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$ в соответствие число $p_i \in [0, 1]$ так, что

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = 1.$$

Назовём число p_i вероятностью элементарного исхода ω_i . Вероятностью события A назовём число

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i,$$

равное сумме вероятностей элементарных исходов, входящих в множество A . В случае $A = \emptyset$ положим $P(A) = 0$.

Свойства вероятности

1. $0 \leq P(A) \leq 1$; $P(\Omega) = 1$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

2. Если A и B несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

3. В общем случае $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

4. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Классическое определение вероятности

- Предположим, что мы имеем дело с пространством элементарных исходов, состоящим из конечного числа N элементов: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$.
- Предположим, что из каких-либо соображений мы можем считать элементарные исходы равновозможными. Тогда вероятность любого из них принимается равной $1 / N$.

Классическое определение вероятности

Если событие $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ состоит из k элементарных исходов, то вероятность этого события равняется отношению k / N :

$$P(A) = p_{i_1} + \dots + p_{i_k} = k \cdot \frac{1}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где символом $|A|$ обозначено число элементов конечного множества A .

Классическое определение вероятности

- Определение 7. Говорят, что эксперимент удовлетворяет «классическому определению вероятности», если пространство элементарных исходов состоит из конечного числа $|\Omega| = N$ равновозможных исходов. В этом случае вероятность любого события A вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

называемой классическим определением вероятности.

Классическое определение вероятности

- Формулу

$$P(A) = |A| / |\Omega|$$

читают так: «вероятность события A равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию A , к общему числу исходов».

Полезно сравнить это определение с классической формулировкой Якоба Бернулли : «Вероятность есть степень достоверности и отличается от неё как часть от целого»

Гипергеометрическое распределение

Определение 8. Соответствие между числом k и вероятностью

$$P(A_k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n},$$

где k таково, что $0 \leq k \leq n$, $k \leq K$ и $n - k \leq N - K$, называется гипергеометрическим распределением.

Гипергеометрическое распределение

- Здесь мы в первый, но далеко не в последний раз встретились с термином «распределение» вероятностей. Это слово всегда обозначает некий способ разделить (распределить) общую единичную вероятность между какими-то точками или множествами на вещественной прямой.

Гипергеометрическое распределение

- В гипергеометрическом распределении единичная вероятность распределена между подходящими целыми числами k неравномерно. Каждому целому числу k сопоставлена своя вероятность $P(A_k)$.
- На вещественной прямой можно единичную вероятность распределить по-разному. Этим одно распределение отличается от другого: тем, на каком множестве чисел «распределена» общая единичная вероятность, и тем, какие веса, или вероятности, присвоены отдельным точкам или частям этого множества.