Теория вероятности

Лекция 1

•

Предмет теории вероятностей.

- Теория вероятностей изучает закономерности, возникающие в случайных экспериментах.
- Случайным называют эксперимент, результат которого нельзя предсказать заранее.
- Невозможность предсказать результат отличает случайное явление от детерминированного.

Предмет теории вероятностей.

- Не все случайные явления (эксперименты) можно изучать методами теории вероятностей, а лишь те, которые могут быть воспроизведены в одних и тех же условиях.
-

Предмет теории вероятностей.

- И в случайных экспериментах наблюдаются некоторые закономерности, например свойство «статистической устойчивости»: если A — некоторое событие, могущее произойти или не произойти в результате эксперимента, то доля n(A) /n экспериментов, в которых данное событие произошло, имеет тенденцию стабилизироваться с ростом общего числа экспериментов n, приближаясь к некоторому числу P(A).

Пространство элементарных исходов.

- Определение 1. Пространством элементарных исходов («омега») называется множество, Ω содержащее все возможные результаты данного случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один. Элементы этого множества называют элементарными исходами и обозначают буквой ω («омега»).

Пространство элементарных исходов.

- Определение 2. Событиями мы будем называть подмножества множества Ω. Говорят, что в результате эксперимента произошло событие $A \subseteq \Omega$, если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, входящих в множество Ω.

Пространство элементарных исходов.

Пример 1. Один раз подбрасывается кубик — игральная кость. Рассмотрим пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$, элементарные исходы здесь соответствуют числу выпавших очков.

Примеры событий: $A = \{1, 2\} = \{⚀, ⚁\}$ — выпало одно или два очка; $B = \{1, 3, 5\} = \{⚀, ⚂, ⚄\}$ — выпало нечётное число очков.

Пространство элементарных исходов.

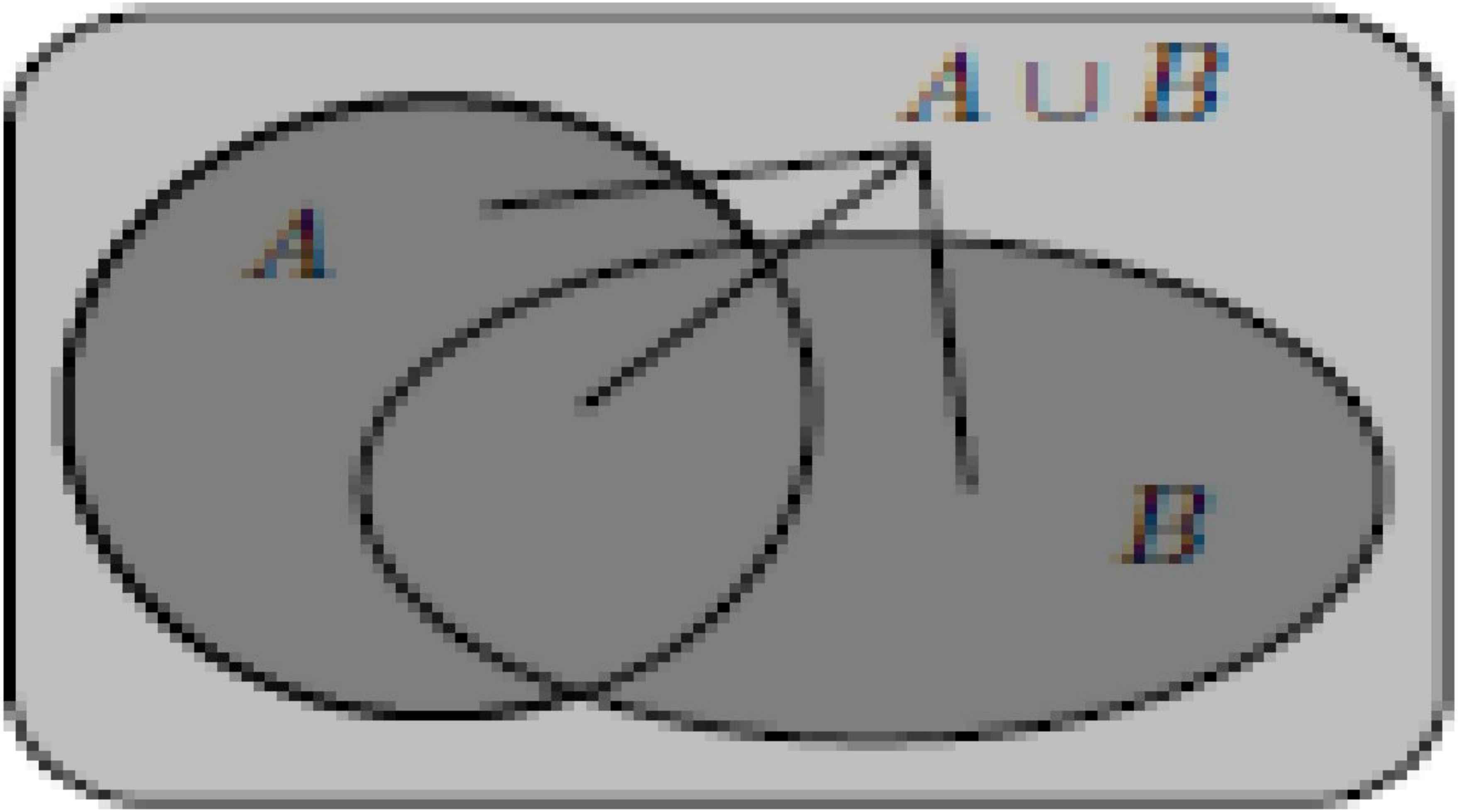
- **Определение 3.**
- 1. Достоверным называется событие, которое обязательно происходит в результате эксперимента, т. е. единственное событие, включающее все элементарные исходы — событие
- 2. Н е в о Ω о ж н ы м называется событие, которое не может произойти в результате эксперимента, т. е. событие, не содержащее ни одного элементарного исхода («пустое множество»). Заметим, что всегда

$\varnothing$ $\varnothing \subset \Omega.$

Объединение событий

- Определение 4. 1. Объединением A U B событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло либо A, либо B, либо оба события одновременно. На языке теории множеств A U B есть множество, содержащее как элементарные исходы из множества A, так и элементарные исходы из множества B

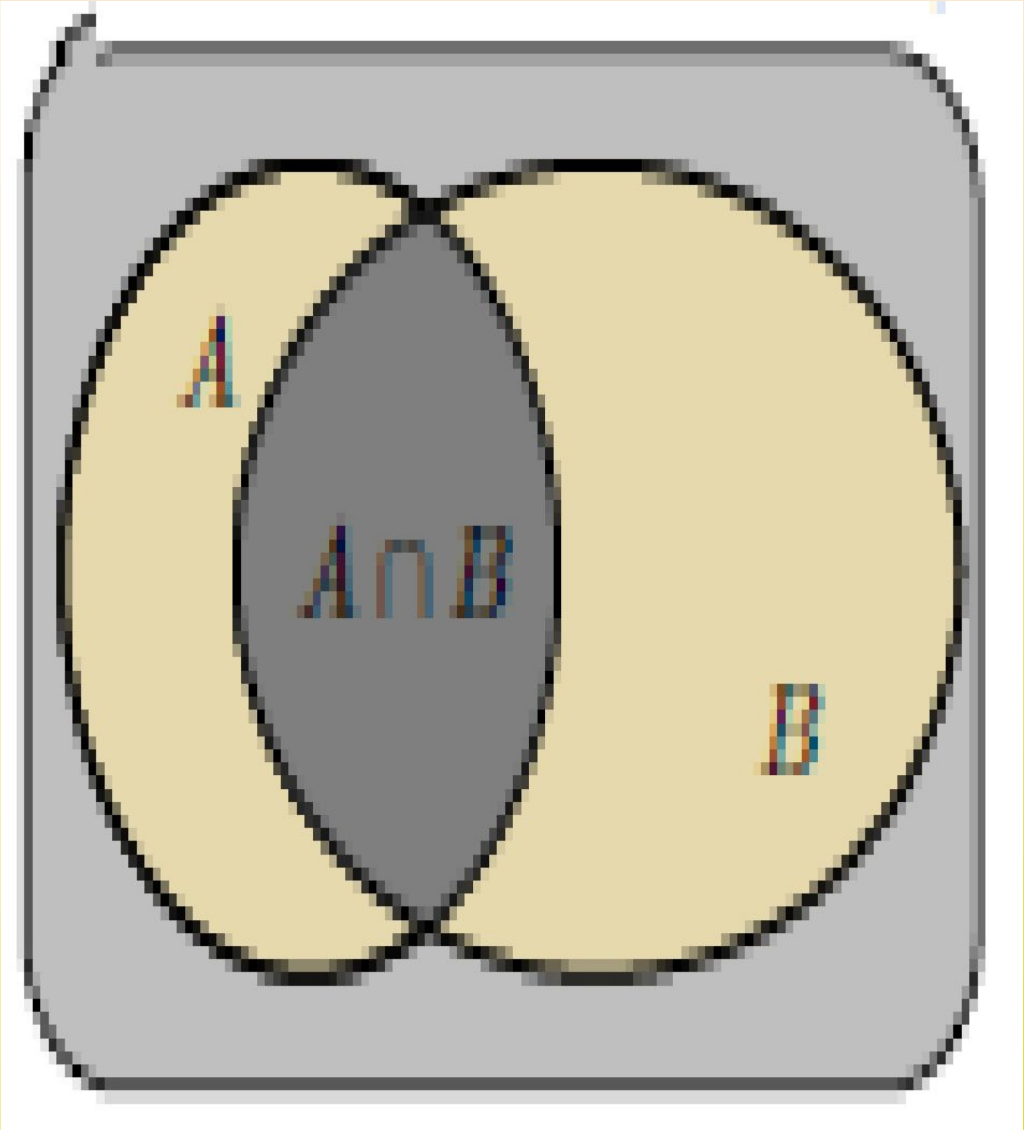
Объединение



Пересечение событий

- 2. Пересечением A $\cap$ B событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошли оба события A и B одновременно. На языке теории множеств A$\cap$ B есть множество, содержащее элементарные исходы, входящие в пересечение множеств A и B.

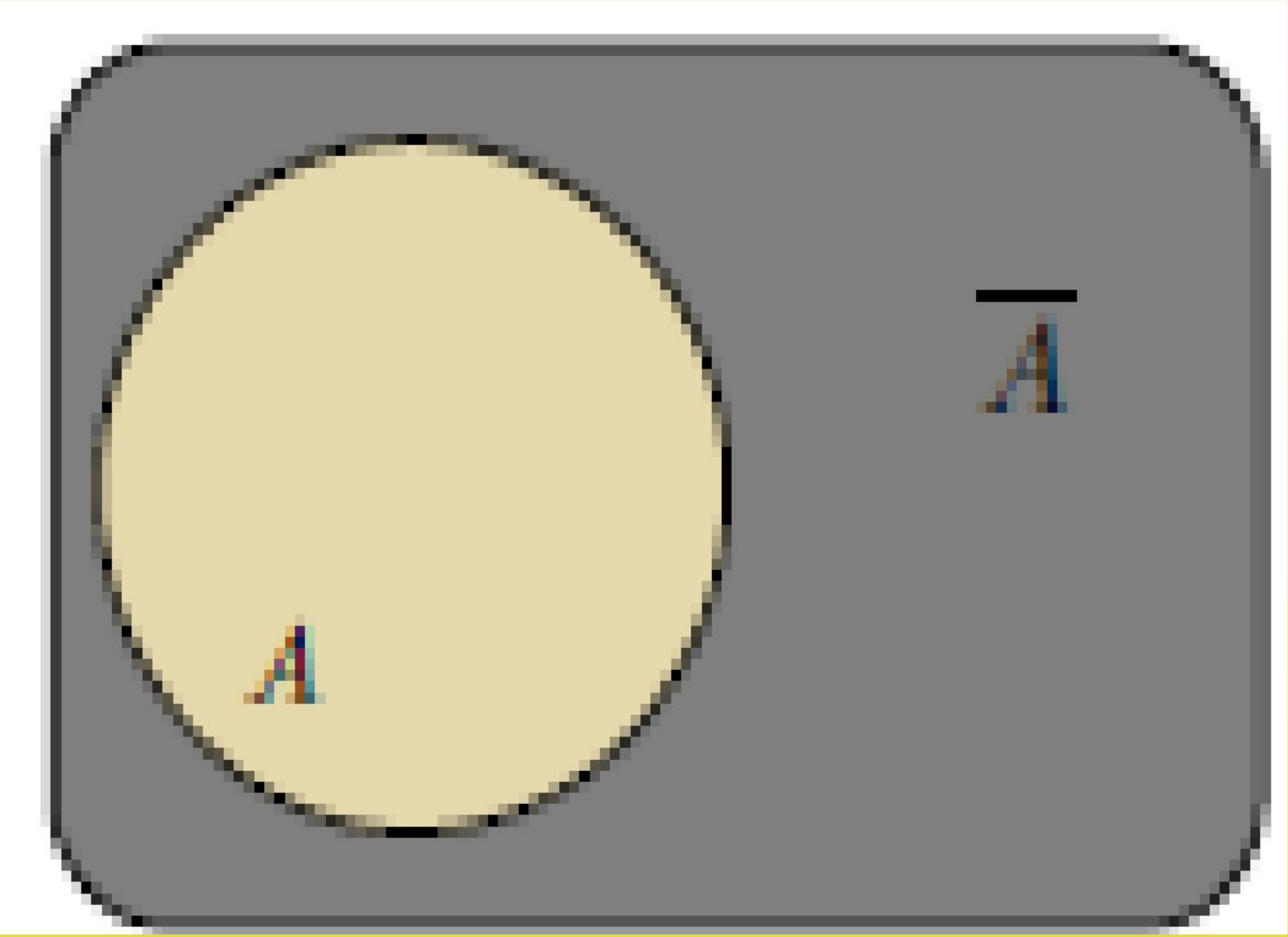
Пересечение



Противоположное событие

- 3. П р о т и в о п о л о ж н ы м (или дополнительным) к событию А называется событие $\overline{A} = \Omega \backslash A,$ состоящее в том, что событие А в результате эксперимента не произошло. Т. е. множество $\overline{A}$ состоит из элементарных исходов, не входящих в А.

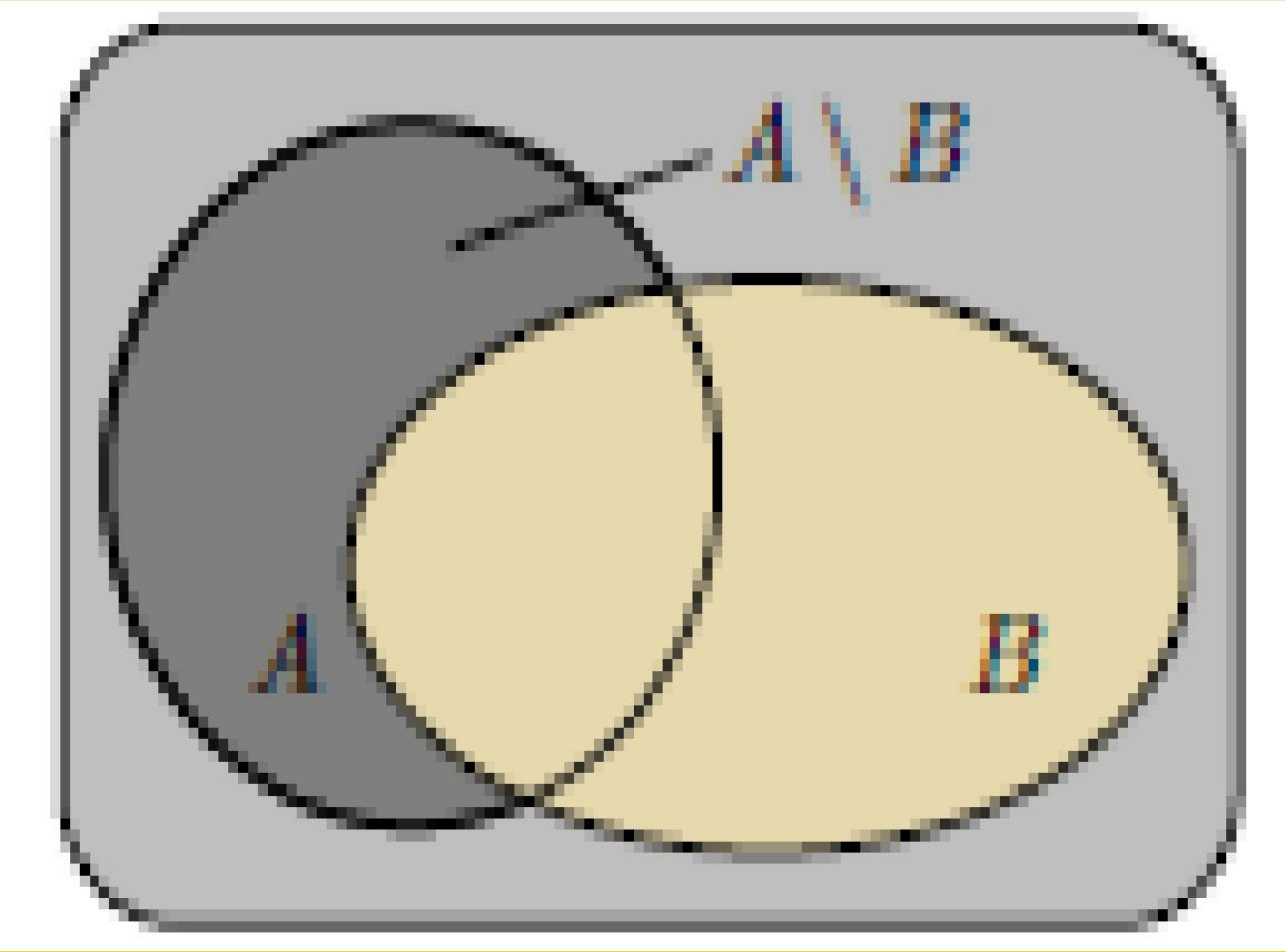
Противоположное событие



Дополнение

- 4. Дополнением A\B события B до A называется событие, состоящее в том, что произошло событие A, но не произошло B. Т. е. множество A\B содержит элементарные исходы, входящие в множество A, но не входящие в B.

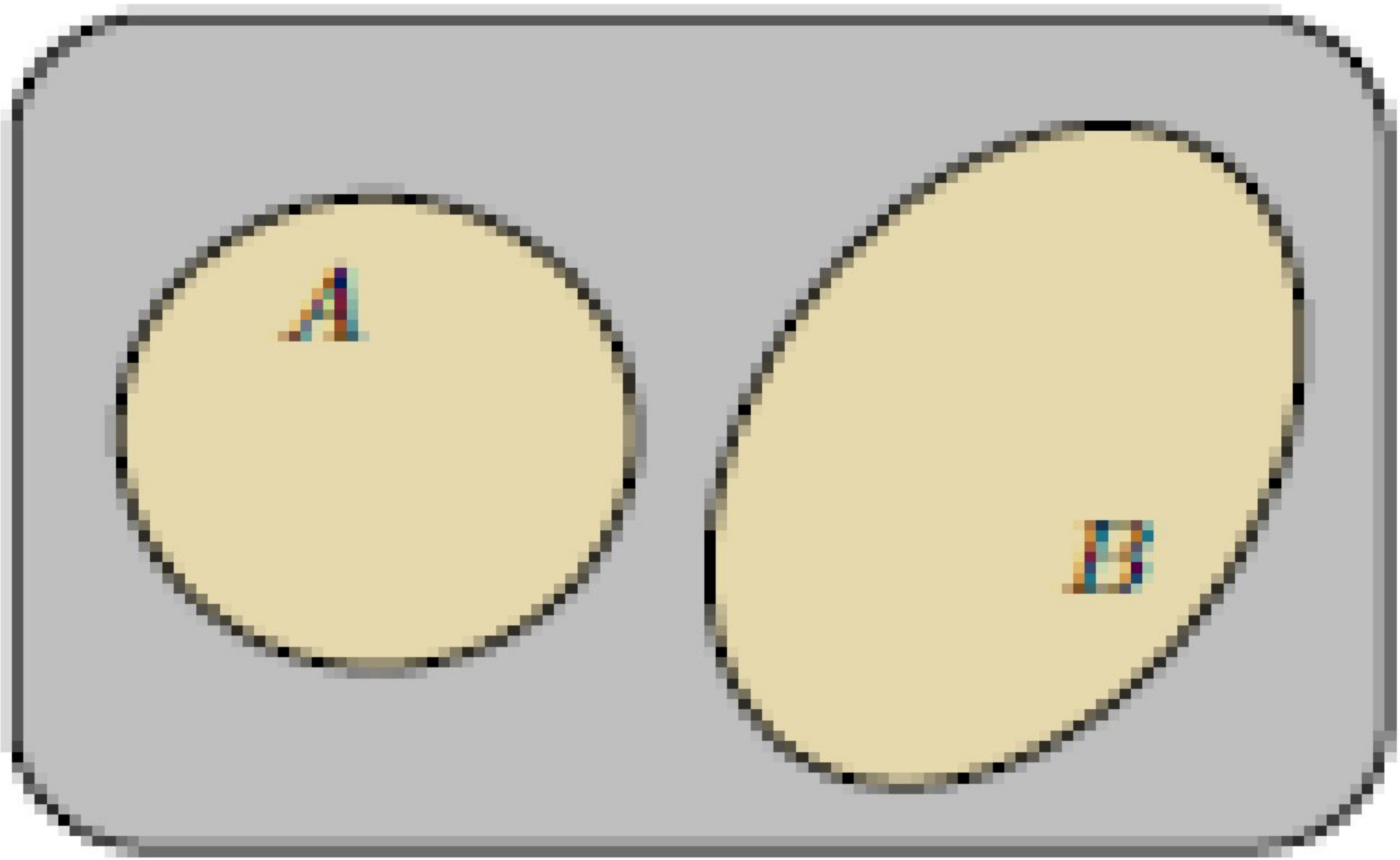
Дополнение



Несовместные события

- Определение 5.
- 1. События А и В называют несовместными, если $A \cap B = \varnothing.$
- 2. События $A_1, \ldots, A_n$ называются попарно несовместными, если для любых i = j, где $1 \leqslant i, j \leqslant n,$ события A_i и A_j несовместны.

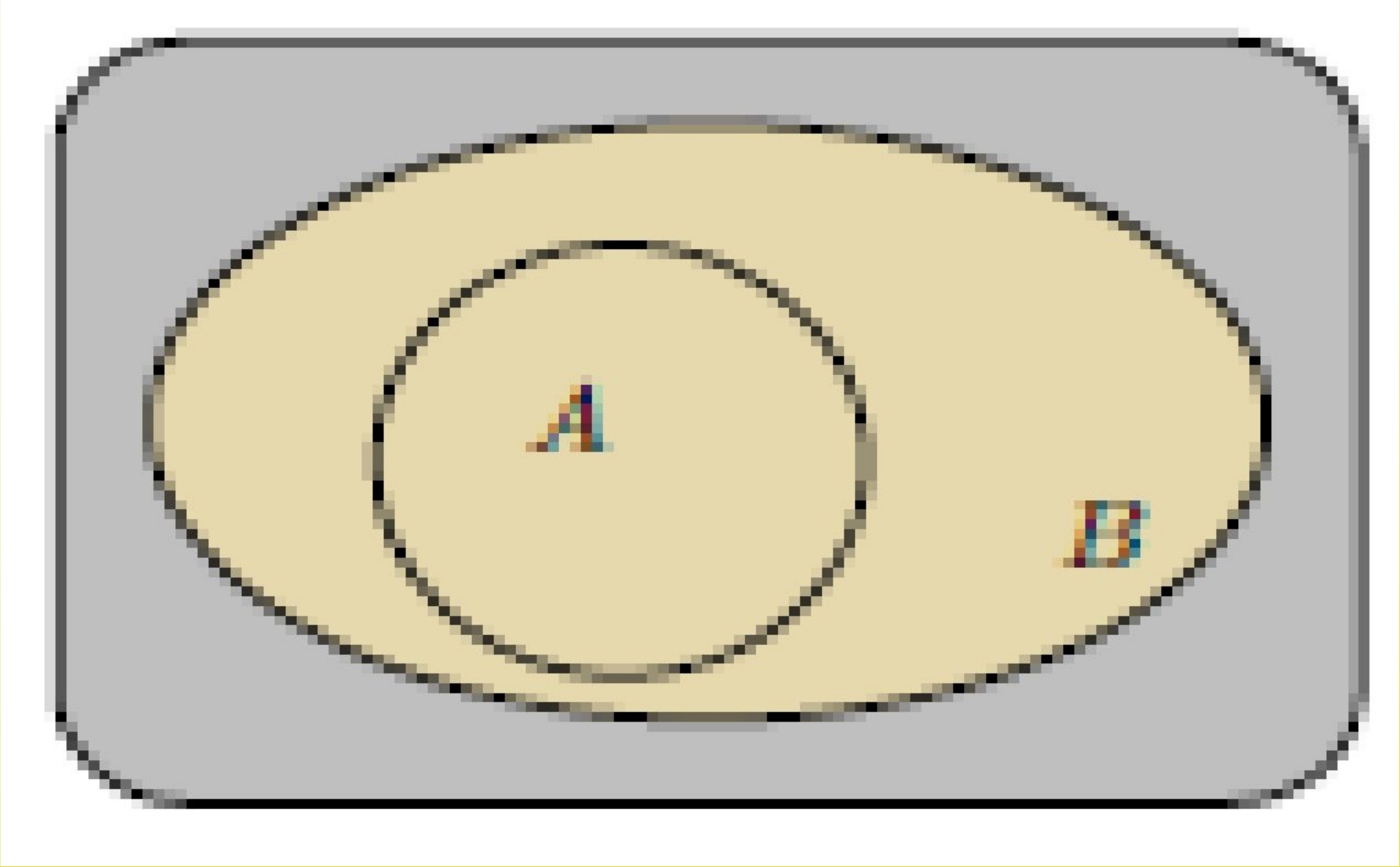
Несовместные события



Событие А влечёт событие В

- 3. Говорят, что событие А влечёт событие В, и пишут $A \subseteq B$, если всегда, как только происходит событие А, происходит и событие В. На языке теории множеств это означает, что любой элементарный исход, входящий в множество А, одновременно входит и в множество В, т. е. А содержится в В.

Событие А влечёт событие В



Вероятность на дискретном пространстве элементарных исходов

- Пространство элементарных исходов назовём **дискретным**, если оно конечно или счётно: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}.$
- Множество **счётно**, если существует взаимно-однозначное соответствие между этим множеством и множеством всех натуральных чисел. Счётными множествами являются множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество чётных чисел и т. д. Множество конечно, если оно состоит из конечного числа элементов.

Вероятность на дискретном пространстве элементарных исходов

- Чтобы определить вероятность любого события на дискретном пространстве элементарных исходов, достаточно присвоить вероятность каждому элементарному исходу. Тогда вероятность любого события определяется как сумма вероятностей входящих в него элементарных исходов.

Вероятность события

Определение 6. Поставим каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$ в соответствие число $p_i \in [0, 1]$ так, что

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = 1.$$

Назовём число p_i вероятностью элементарного исхода ω_i. Вероятностью события A назовём число

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i,$$

равное сумме вероятностей элементарных исходов, входящих в множество A. В случае $A = \varnothing$ положим $\mathsf{P}(A) = 0$.

Свойства вероятности

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1; \qquad P(\Omega) = 1; \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A);$

2. Если A и B несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B);$

3. В общем случае $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$

4. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leqslant P(B).$

Классическое определение вероятности

- Предположим, что мы имеем дело с пространством элементарных исходов, состоящим из конечного числа N элементов: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}.$
- Предположим, что из каких-либо соображений мы можем считать элементарные исходы равновозможными. Тогда вероятность любого из них принимается равной 1 / N.

Классическое определение вероятности

Если событие $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ состоит из k элементарных исходов, то вероятность этого события равняется отношению k / N:

$$\mathrm{P}(A) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_k} = k \cdot \frac{1}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где символом $|A|$ обозначено число элементов конечного множества A.

Классическое определение вероятности

- Определение 7. Говорят, что эксперимент удовлетворяет «классическому определению вероятности», если пространство элементарных исходов состоит из конечного числа $|\Omega| = N$ равновозможных исходов. В этом случае вероятность любого события A вычисляется по формуле

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

называемой классически м о п р е де л е н и е м в е р о я т н о с т и.

Классическое определение вероятности

- Формулу

$$P(A) = |A| / |\Omega|$$

читают так: «вероятность события А равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию А, к общему числу исходов».

Полезно сравнить это определение с классической формулировкой Якоба Бернулли : «Вероятность есть степень достоверности и отличается от неё как часть от целого»

Гипергеометрическое распределение

Определение 8. Соответствие между числом k и вероятностью

$$P(A_k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n},$$

где k таково, что $0 \leqslant k \leqslant n$, $k \leqslant K$ и $n-k \leqslant N-K$, называется гипергеометрическим распределением.

Гипергеометрическое распределение

- Здесь мы в первый, но далеко не в последний раз встретились с термином «распределение» вероятностей. Это слово всегда обозначает некий способ разделить (распределить) общую единичную вероятность между какими-то точками или множествами на вещественной прямой.

Гипергеометрическое распределение

- В гипергеометрическом распределении единичная вероятность распределена между подходящими целыми числами k неравномерно. Каждому целому числу k сопоставлена своя вероятность $P(A_k)$.
- На вещественной прямой можно единичную вероятность распределить по-разному. Этим одно распределение отличается от другого: тем, на каком множестве чисел «распределена» общая единичная вероятность, и тем, какие веса, или вероятности, присвоены отдельным точкам или частям этого множества.