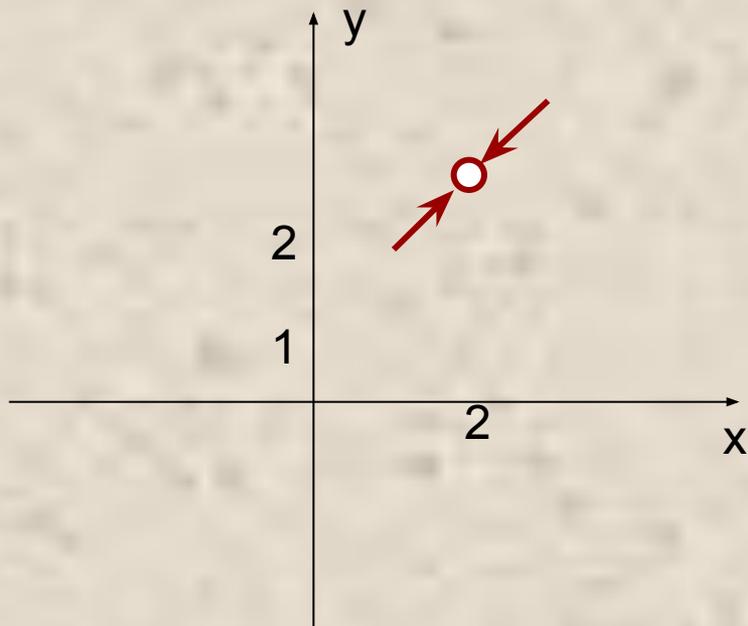


*Исследование поведения  
функций вблизи точек  
разрыва и на бесконечности.*

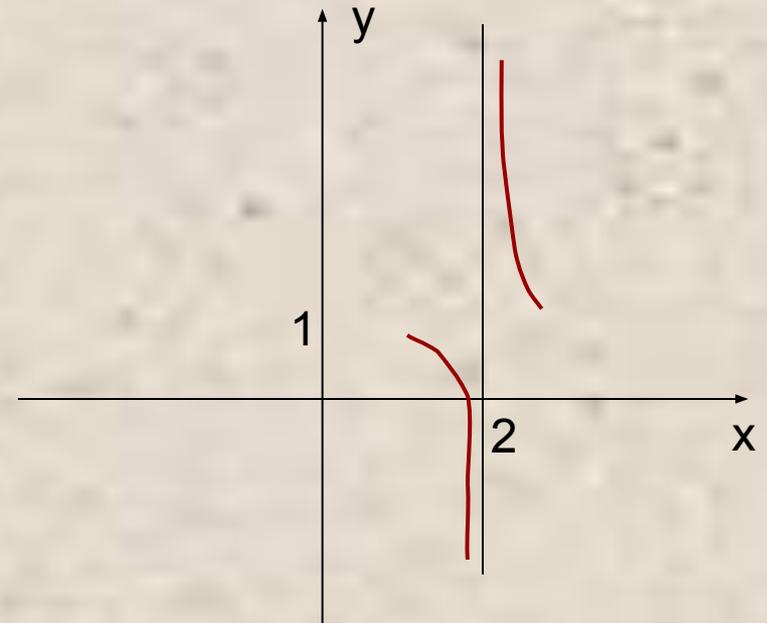
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

$x \in (1; 3)$   $f(1) = 2$ ,  $f(1,5) = 2,5$   
 $f(1,75) = 2,75$ ,  $f(1,99) = 2,99$   
 $f(2,01) = 3,01 \dots$



$$g(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$$

$x \in (1; 3)$   $g(1) = 1$ ,  $g(1,5) = 0,5$   
 $g(1,75) = -1,25$ ,  $g(1,9) = -7,1$   
 $g(1,99) = -97,01$   $g(2,01) = 103,01 \dots$



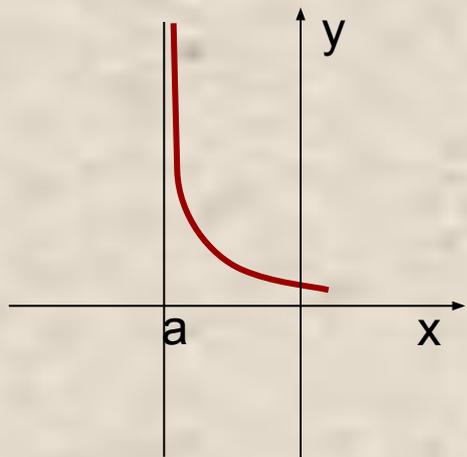
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = x+1, \quad x \neq 2$$

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = x + 1 + \frac{1}{x - 2}$$

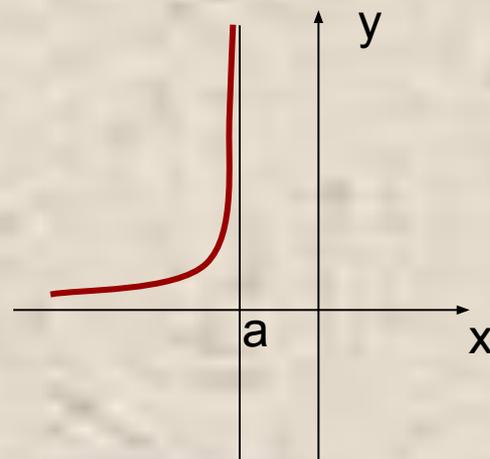
$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2} \infty$$

Если функция бесконечно возрастает (по модулю) при  $x \rightarrow a$  справа или слева (  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \infty$  ( )  $\xrightarrow{x \rightarrow a^+} \infty$  )

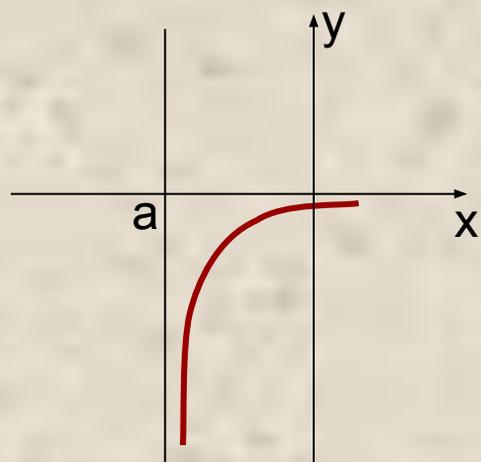
то прямая  $x = a$  называется **вертикальной асимптотой** графика функции



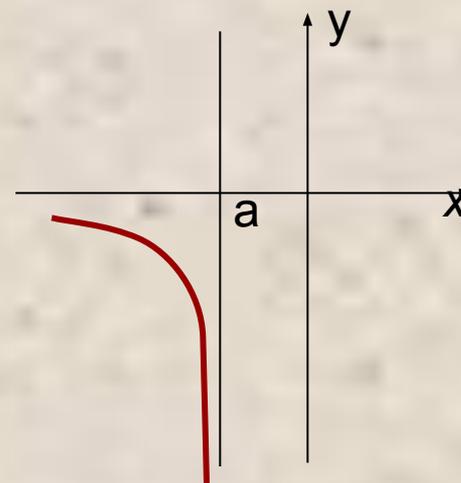
$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} +\infty$$



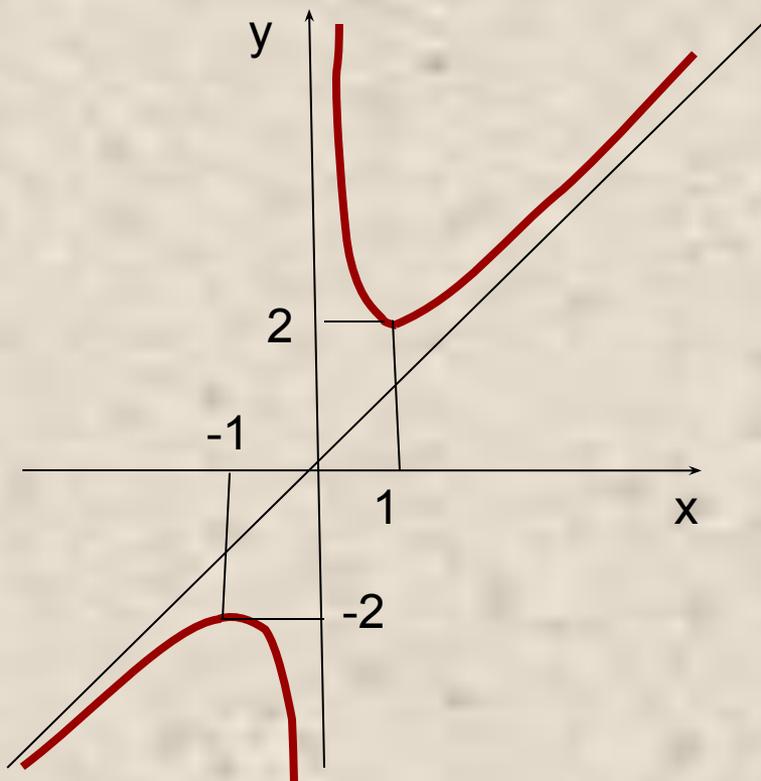
$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} +\infty$$



$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} -\infty$$



$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} -\infty$$



$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$$

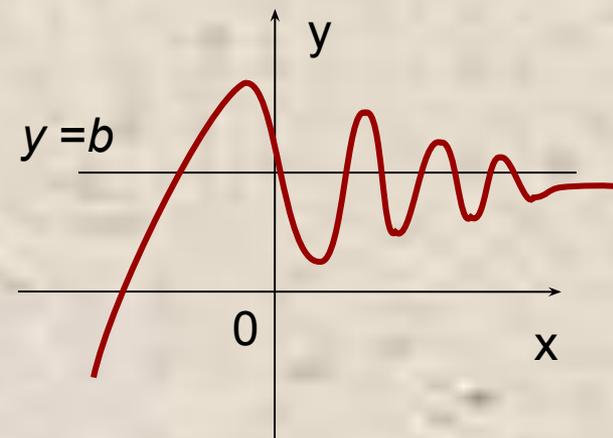
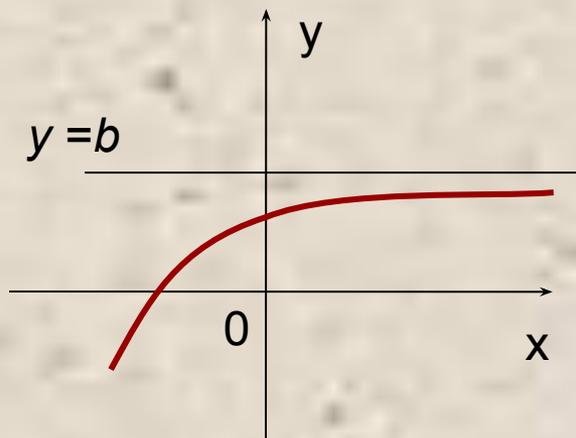
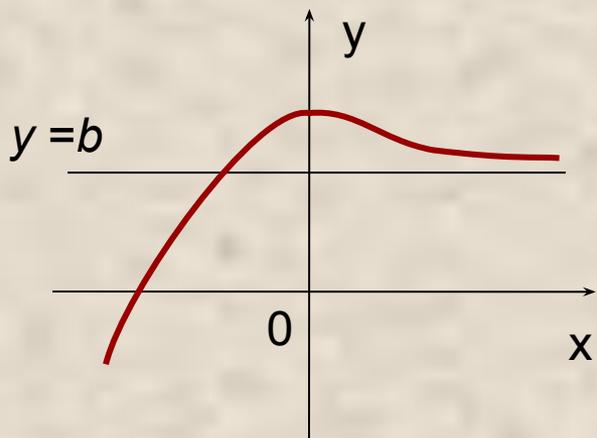
$$y = x + \frac{1}{x}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} x$$

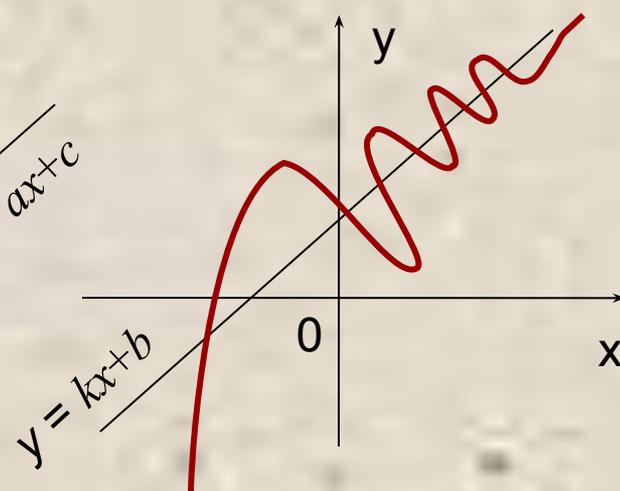
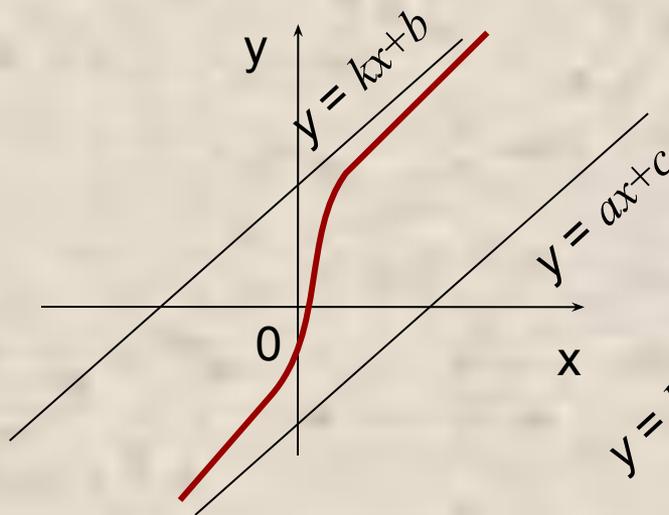
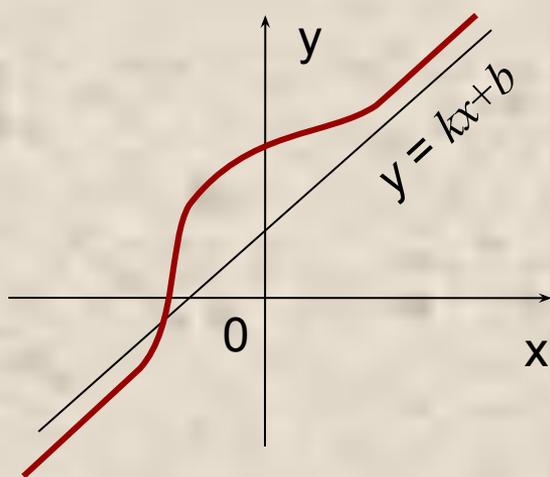
Если функция представима в виде  $f(x) = kx + b + \alpha(x)$  где  $k, b \in \mathbb{R}$   $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ , то прямая  $y = kx + b$  называется **наклонной асимптотой** графика функции  $y = f(x)$

Если  $k = 0$ , то асимптота  $y = b$  называется **горизонтальной**

## Горизонтальные асимптоты



## Наклонные асимптоты



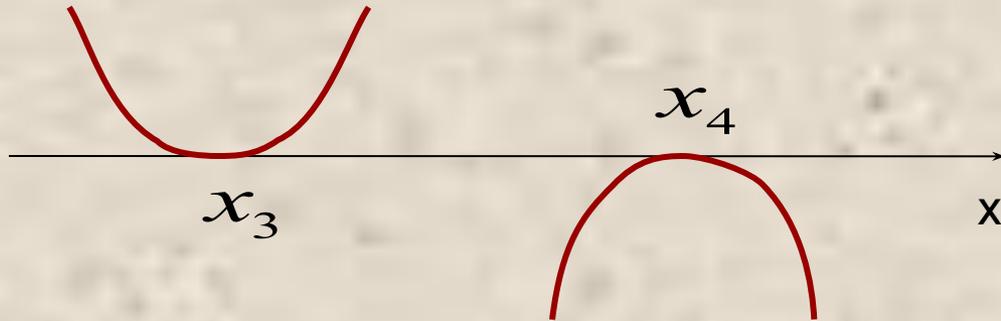
$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

1. Корни  $Q_m(x)$  - вертикальные асимптоты графика функции  $f(x)$
2. Если  $n < m$ , то график имеет горизонтальную асимптоту  $y = 0$
3. Если  $n = m$ , то график имеет горизонтальную асимптоту  $y = 0$
4. Если  $n > m$ , то график имеет наклонную асимптоту  $y = \frac{a_n}{b_m}$
5. Если  $n = m + 1$ , то график не имеет наклонных и горизонтальных асимптот

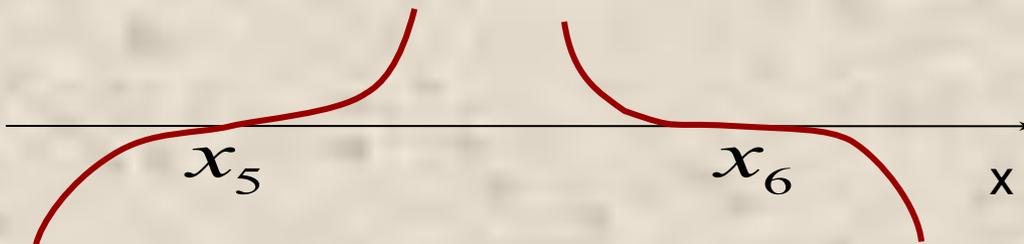
$x_1, x_2$  - корни первой кратности

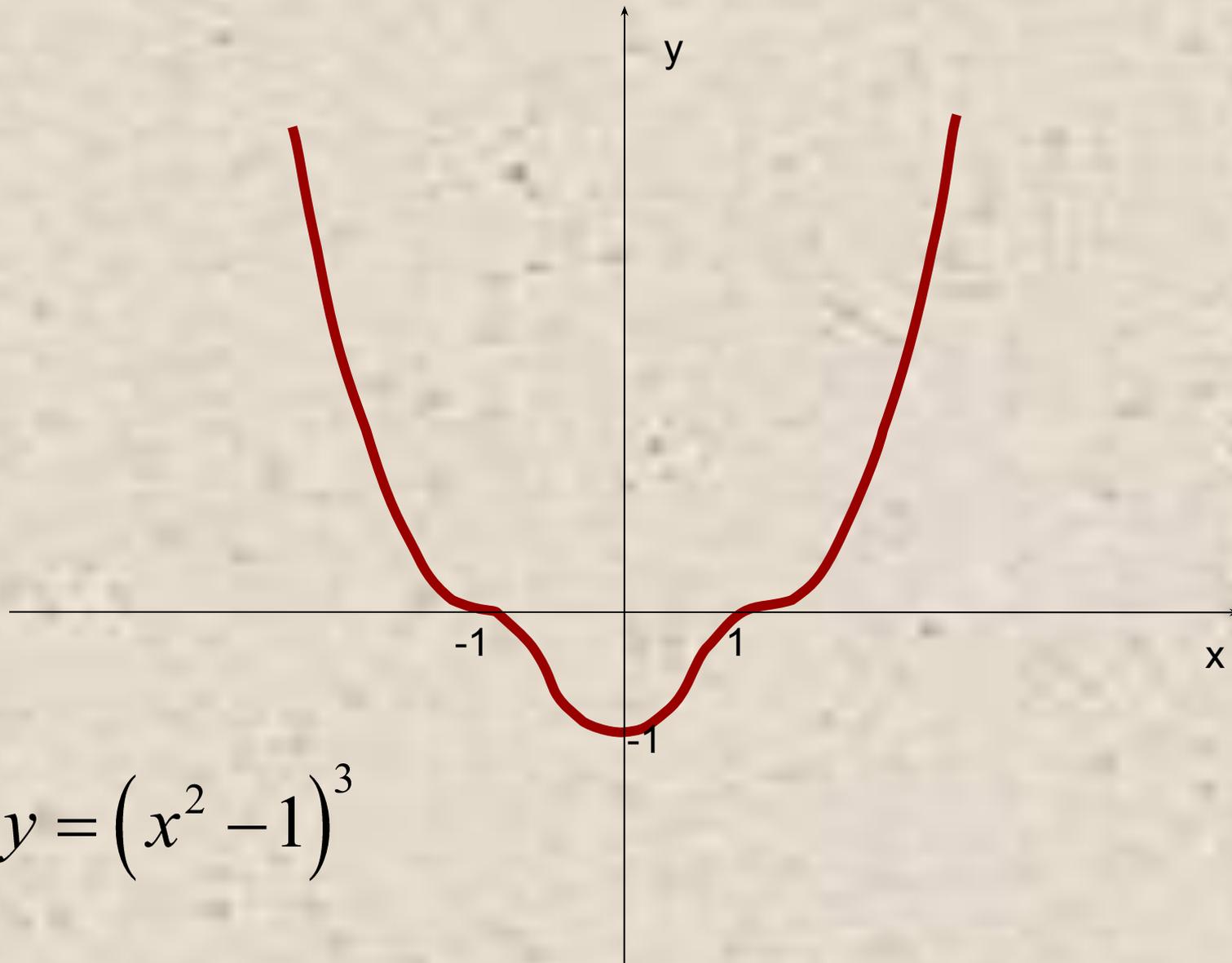


$x_3, x_4$  - корни четной кратности



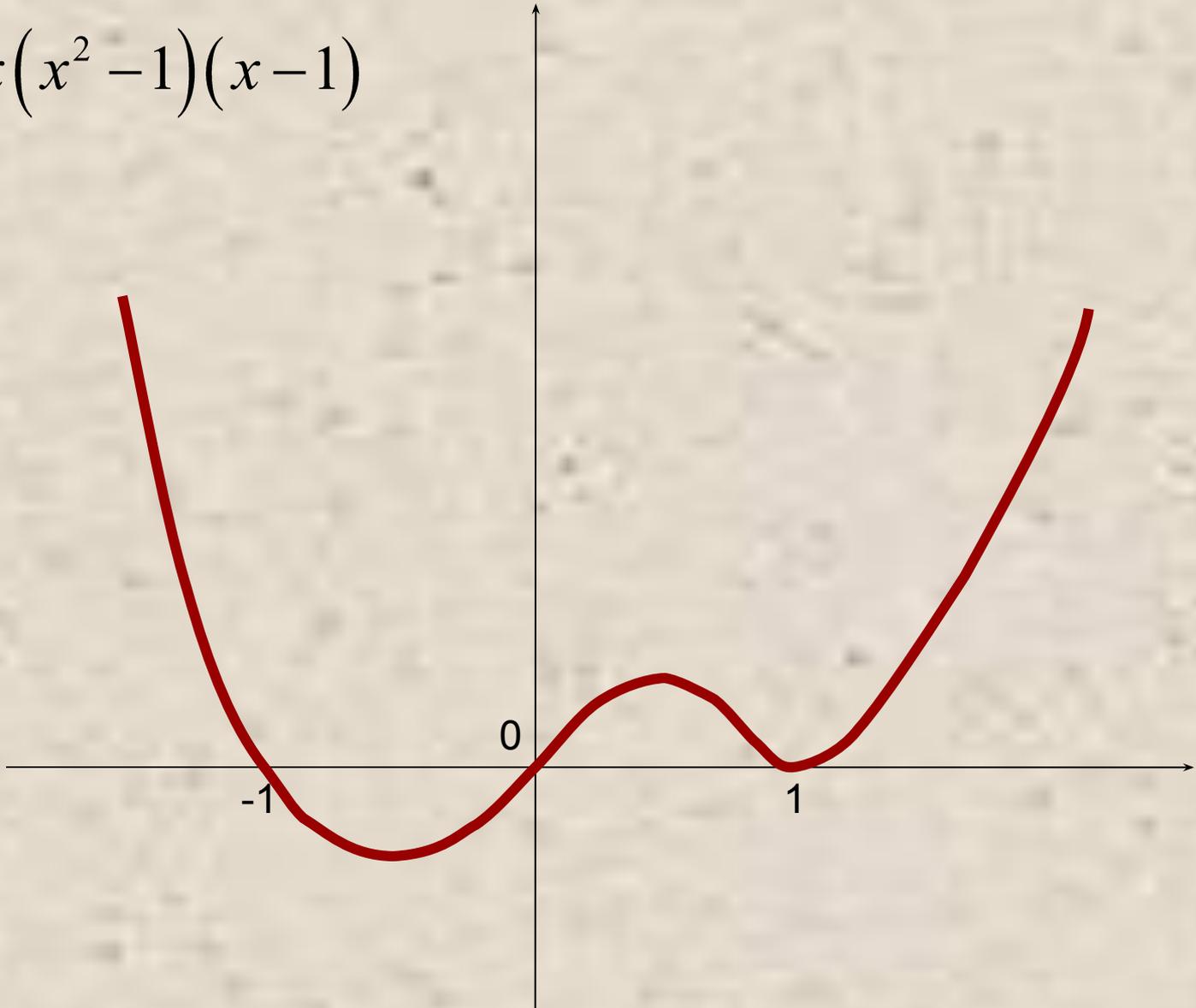
$x_5, x_6$  - корни нечетной кратности



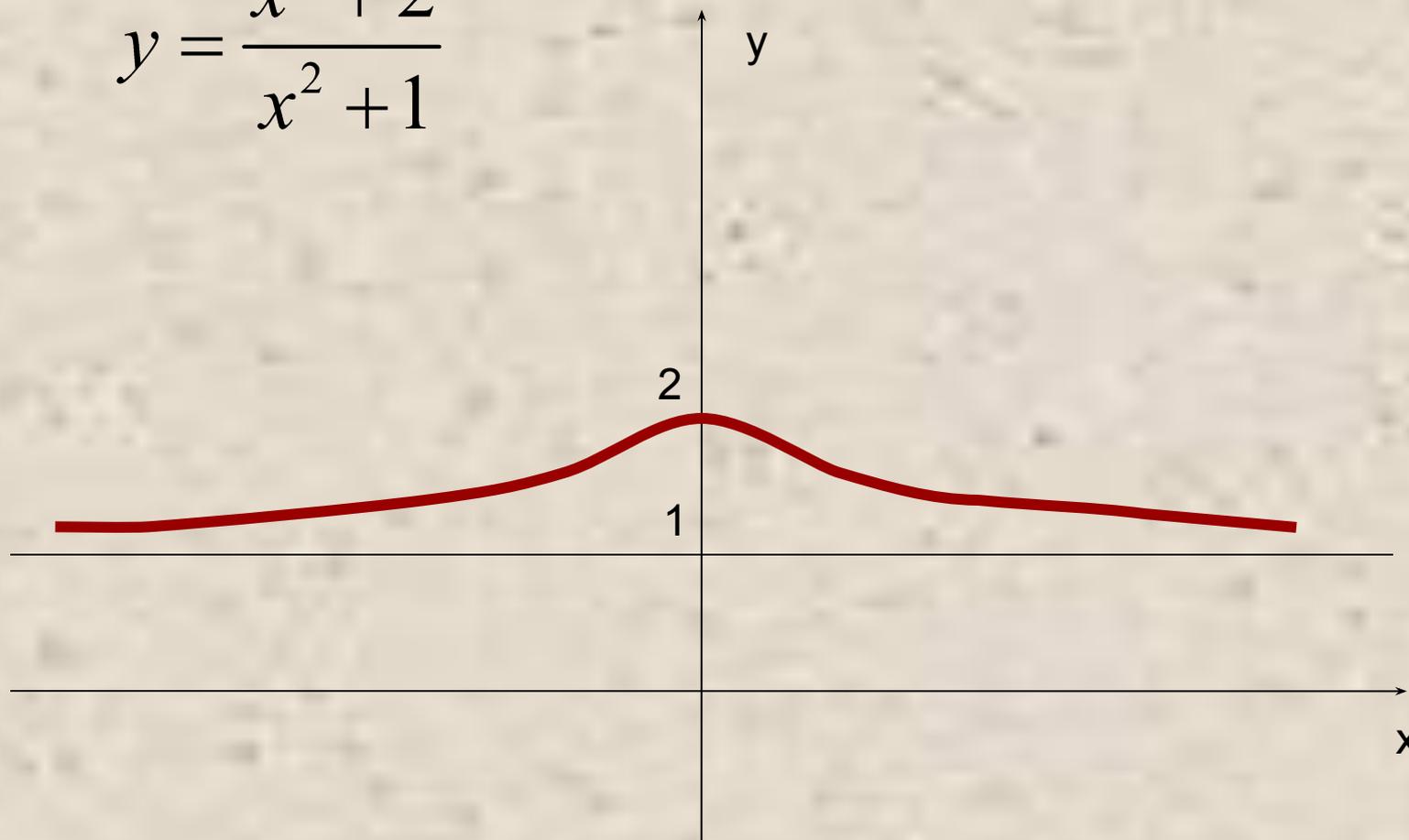


$$y = (x^2 - 1)^3$$

$$y = x(x^2 - 1)(x - 1)$$



$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$



$$y = \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

