Муниципальное общеобразовательное учреждение
средняя школа №30

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Выполнила:
ученица 11 «Д» класса
Воронина Наталья
Руководители: Крагель Т.П., Гремяченская Т.В.

2006 г.
г. Старый Оскол

Содержание:

1. Функция $y = ax^2$, её график и свойства
2. Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$
3. Построение графика квадратичной функции

ФУНКЦИЯ $y = ax^2$ ЕЕ ГРАФИК И СВОЙСТВА

- **Определение.** Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x - независимая переменная, a, b и c - некоторые числа, причем $a \neq 0$

Примером квадратичной функции является зависимость пути от времени при равноускоренном движении. Если тело движется с ускорением a м/с^2 и к началу отсчета времени t прошло путь s_0 м, имея в этот момент скорость v_0 м/с, то зависимость пройденного пути s (в метрах) от времени t (в секундах) выражается формулой:

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 + s_0.$$

Если, например, a= 6, $v_0 = 5,\ s_0 = 20,$ то формула примет вид:

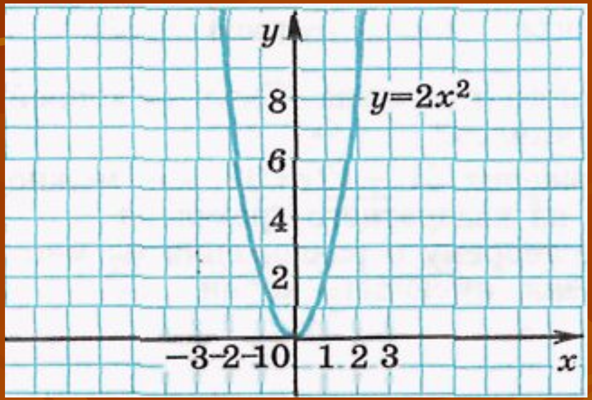
$$s = 3t^2 + 5t + 20.$$

Изучение квадратичной функции мы начнем с частного случая - функции $y = ax^2$. При $a = 1$ формула $y = ax^2$ принимает вид $y = x^2$. С этой функцией мы уже встречались. Графиком этой функции является парабола.

Построим график функции $y = 2x^2$. Составим таблицу значений этой функции:

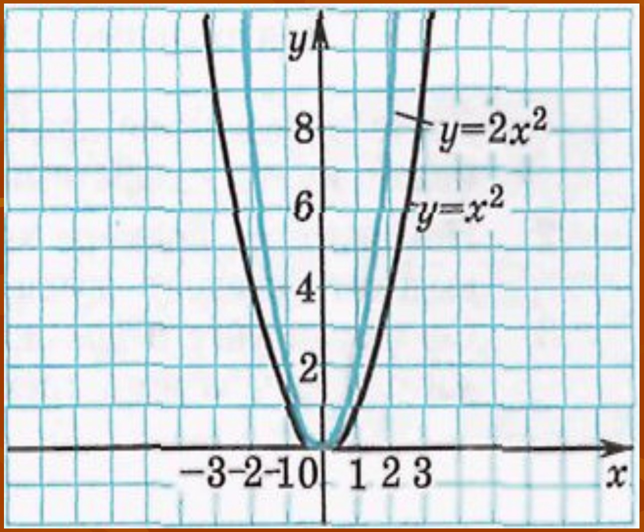
x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

Построим точки, координаты которых указаны в таблице. Соединив их плавной линией, получим график функции $y = 2x^2$.



При любом $x \neq 0$ значение функции $y = 2x^2$ больше соответствующего значения функции $y = x^2$ в 2 раза. Если переместить каждую точку графика функции $y = x^2$ вверх так, чтобы расстояние от этой точки до оси x увеличилось в 2 раза, то она перейдет в точку графика функции $y = 2x^2$, при этом каждая точка этого графика может быть получена из некоторой точки графика функции $y = x^2$

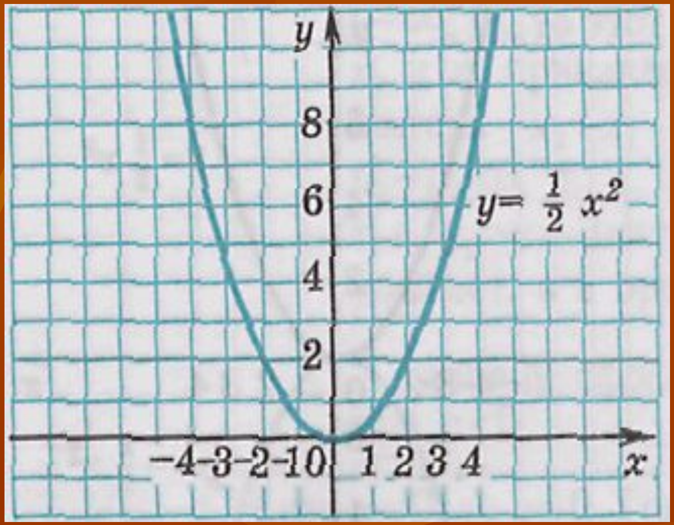
Иными словами, график функции $y = 2x^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ растяжением от оси x в 2 раза.



Построим теперь график функции $y = \frac{1}{2}x^2$. Для этого составим таблицу ее значений:

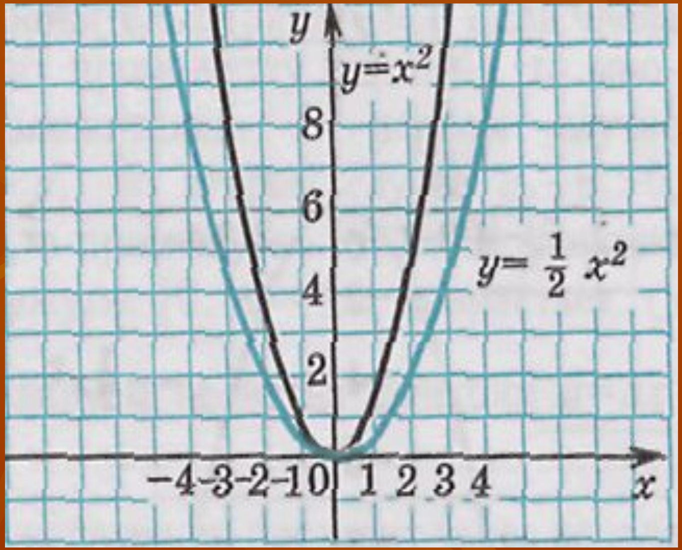
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$:



При любом $x \neq 0$ значение функции $y = \frac{1}{2}x^2$ меньше соответствующего значения функции $y = x^2$ в 2 раза. Если переместить каждую точку графика функции $y = x^2$ вниз так, чтобы расстояние от этой точки до оси *x* уменьшилось в 2 раза, то она перейдет в точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ причем каждая точка этого графика может быть получена из некоторой точки графика функции $y = x^2$.

Таким образом, график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ сжатием к оси *x* в 2 раза.



Вообще график функции $y = ax^2$ **можно получить из параболы** $y = x^2$ **растяжением от оси** ***x*** **в** ***a*** **раз, если** ***a*****>1, и сжатием к оси** ***x*** **в** $\frac{1}{a}$ **раз, если 0<** ***a*****<1.**

Рассмотрим теперь функцию $y = ax^2$ **при** ***a<0.***

Построим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$, для чего составим таблицу значений этой функции:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	-8

Воспользовавшись этой таблицей, построим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$.

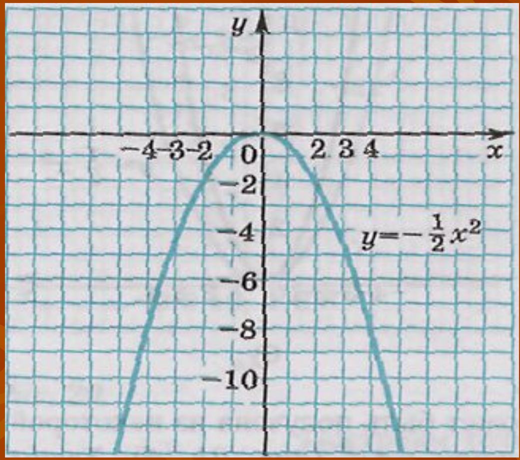
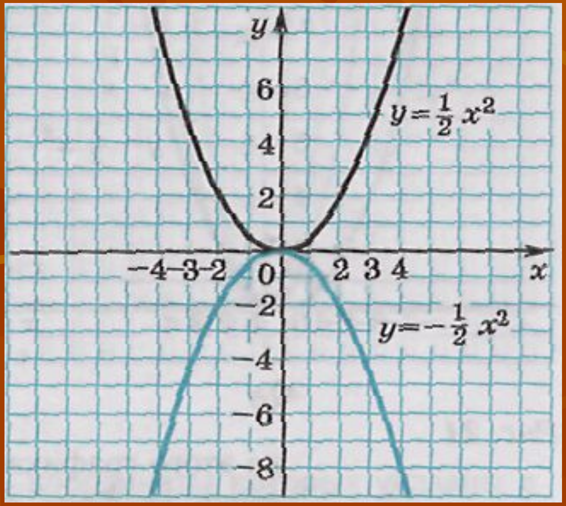


График функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ **может быть**

получен из графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$

с помощью симметрии относительно оси ***x*****.**



Свойства функции $y = ax^2$ при a>0.

1. Если x=0, то y=0. График функции проходит через начало координат.
2. Если $x \neq 0$, то y>0. График функции расположен в верхней полуплоскости.
3. Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции. График функции симметричен относительно оси y.
4. Функция убывает в промежутке $(-\infty;0]$ и возрастает в промежутке $[0;+\infty)$.
5. Наименьшее значение, равное нулю, функция принимает при x=0, наибольшего значения функция не имеет. Областью значений функции является промежуток $[0;+\infty)$.

Свойства функции $y = ax^2$ **при a<0.**

1. *Если x=0, то y=0. График функции проходит через начало координат.*
2. *Если* $x \neq 0$, *то y<0. График функции расположен в нижней полуплоскости.*
3. *Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции. График функции симметричен относительно оси y.*
4. *Функция возрастает в промежутке* $(-\infty;0]$ *и убывает в промежутке* $[0;+\infty)$.
5. *Наибольшее значение, равное нулю, функция принимает при x=0, наименьшего значения функция не имеет. Областью значений функции является промежуток* $(-\infty;0]$.

ГРАФИКИ ФУНКЦИИ $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$

График функции *y=f (x)+n* можно получить из графика функции *y=f (x)* с помощью параллельного переноса вдоль оси *y на n* единиц вверх, если *n>0*, или на - *n* единиц вниз, если *n<0.*

График функции *y=f (x-m)* можно получить из графика функции *y =f (x)* с помощью параллельного переноса вдоль оси *x* на *m* единиц вправо, если *m>0*, или на - *m* единиц влево, если *m<0.*

График функции *y=f (x-m)+n* можно получить из графика функции *y=f (x)* с помощью двух соответствующих параллельных переносов.

Пример 1. Выясним, что представляет собой график функции $y=\frac{1}{2}x^2+3$.

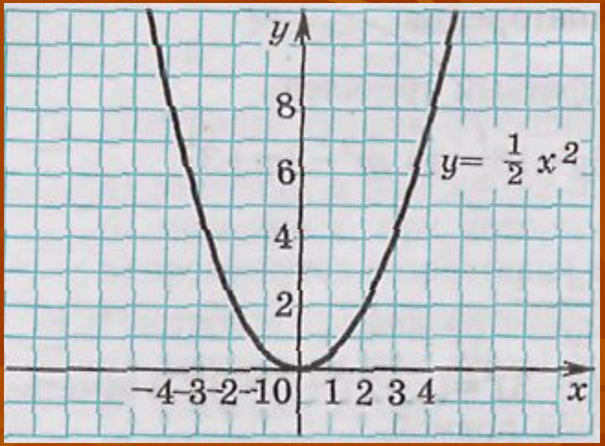
С этой целью в одной системе координат построим графики функций $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=\frac{1}{2}x^2+3$.

Составим таблицу значений функции $y=\frac{1}{2}x^2$:

(1)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

График функции $y=\frac{1}{2}x^2$ изображен на рисунке:



Чтобы получить таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ для тех же значений аргумента, достаточно к найденным значениям функции $y = \frac{1}{2}x^2$ прибавить 3:

(2)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	11	7.5	5	3.5	3	3.5	5	7.5	11

Получим график функции

$y = \frac{1}{2}x^2 + 3$, который изображен на рисунке:

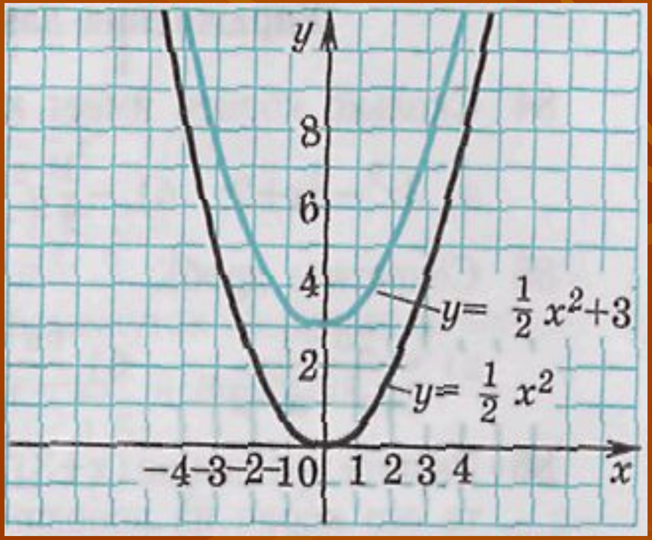


График функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ - парабола, полученная в результате сдвига вверх графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

Вообще график функции $y = ax^2 + n$ **является параболой, которую можно получить из графика функции** $y = ax^2$ **с помощью параллельного переноса вдоль оси *y* на *n* единиц вверх, если *n>0*, или на - *n* единиц вниз, если *n<0*.**

Пример 2. Рассмотрим теперь функцию $y = \frac{1}{2}x(x-5)^2$ и выясним, что представляет собой ее график.

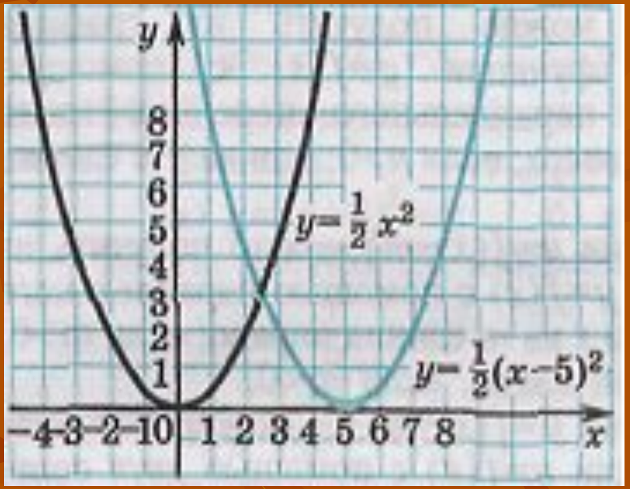
Для этого в одной системе координат построим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x(x-5)^2$.

Для построения графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ воспользуемся таблицей (1). Составим теперь таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x(x-5)^2$. При этом в качестве значений аргумента выберем те, которые на 5 больше соответствующих значений аргумента в таблице (1). Тогда соответствующие им значения функции $y = \frac{1}{2}x(x-5)^2$ будут те же, которые записаны во второй строке таблицы (1):

(3)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

График функции $y = \frac{1}{2}x(x-5)^2$ - парабола, полученная в результате сдвига вправо графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

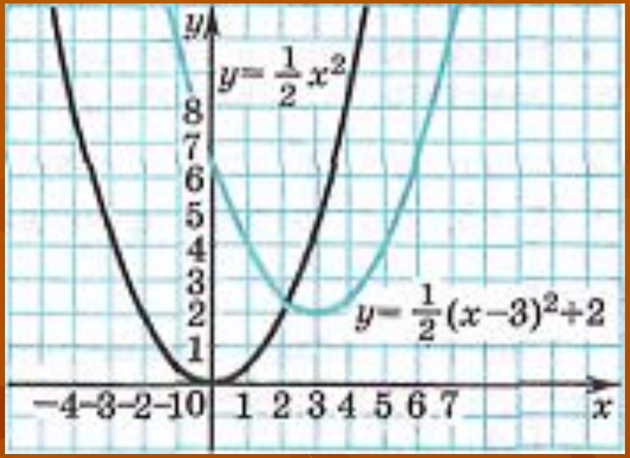


Вообще график функции $y = a(x-m)^2$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси *x* на *m* единиц вправо, если *m>0*, или на - *m* единиц влево, если *m<0*.

Полученные выводы позволяют понять, что представляет собой график Функции $y = a(x-m)^2 + n$.

Рассмотрим, например, функцию $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$. Ее график можно получить из графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ с помощью двух параллельных переносов - сдвига параболы на 3 единицы вправо и на 2 единицы вверх.

Вообще график функции $y = a(x - m)^2 + n$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси *x* на *m* единиц вправо, если *m>0*, или на - *m* единиц влево, если *m<0* , и сдвига вдоль оси *y* на *n* единиц вверх - если *n>0*, или на - *n* единиц вниз, если *n<0.*



Заметим, что производить параллельные переносы можно в любом порядке: сначала выполнить параллельный перенос вдоль оси *x,* а затем вдоль оси *y* или наоборот.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$. Выделим из трехчлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двучлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \times \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Отсюда $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Мы получили формулу вида $y = a(x - m)^2 + n$,

где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Значит, график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов – сдвига вдоль оси *x* и сдвига вдоль оси *y*.

Отсюда следует, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ **есть парабола, вершиной которой является точка *(m;n)*, где** $m = -\frac{b}{2a}, \quad n = -\frac{b^2 - 4ac}{a}.$ **Осью симметрии параболы служит прямая *x=m* параллельная оси *y*. При *a>0* ветви параболы направлены вверх, при *a<0* - вниз.**

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:

1) **найти координаты вершины параболы и отметить ее в координатной плоскости;**
2) **построить еще несколько точек, принадлежащих параболе;**
3) **соединить отмеченные точки плавной линией.**

Пример 1. Построим график функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$.

Графиком функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты m и n вершины этой параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \times 0{,}5} = -3; \qquad n = 0{,}5 \times (-3)^2 + 3 \times (-3) + 0{,}5 = -4.$$

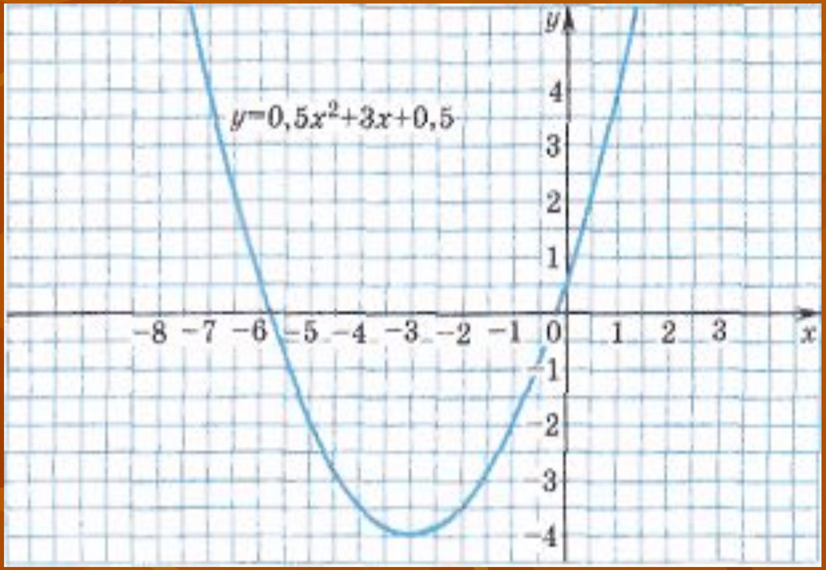
Значит, вершиной параболы является точка (-3; -4).

Составим таблицу значений функции:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	4	0.5	-2	-3.5	-4	-3.5	-2	0.5	4

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$.

При составлении таблицы и построении графика учитывалось, что прямая является осью симметрии параболы. Поэтому мы брали точки с абсциссами - 4 и -2, -5 и -1, -6 и 0, симметричные относительно прямой (эти точки имеют одинаковые ординаты).



Пример 2. Построим график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$.

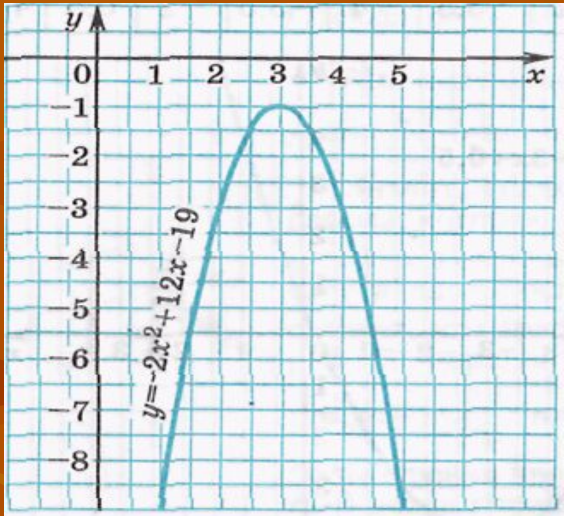
Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдем координаты ее вершины:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \times (-2)} = 3; \qquad n = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

Вычислив координаты еще нескольких точек, получим таблицу:

x	1	2	3	4	5
y	-9	-3	-1	-3	-9

Соединив плавной линией точки, координаты которых указаны в таблице, получим график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$.



Пример 3. Построим график функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

Графиком функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты ее вершины:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \times \frac{1}{4}} = -2; \qquad n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - 2 + 1 = 0.$$

Вычислив координаты еще нескольких точек, получим таблицу:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$

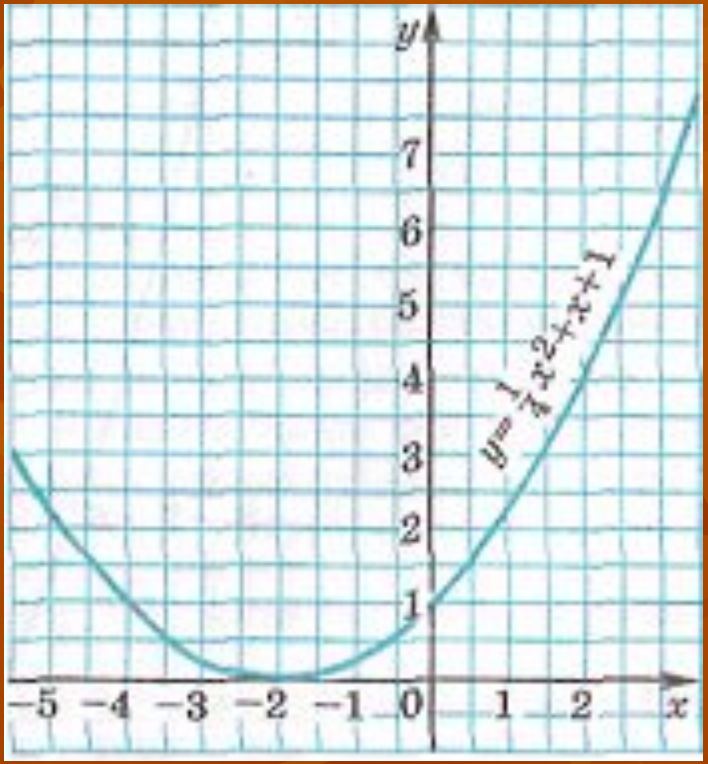


График функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ изображен на рисунке: