

Муниципальное общеобразовательное учреждение
средняя школа №30

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Выполнила:

ученица 11 «Д» класса

Воронина Наталья

Руководители: Крагель Т.П., Гремяченская Т.В.

2006 г.
г. Старый Оскол

Содержание:

1. Функция $y = ax^2$, её график и свойства
2. Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$
3. Построение графика квадратичной функции

ФУНКЦИЯ $y = ax^2$ ЕЕ ГРАФИК И СВОЙСТВА

- **Определение.** Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x - независимая переменная, a , b и c - некоторые числа, причем $a \neq 0$

Примером квадратичной функции является зависимость пути от времени при равноускоренном движении. Если тело движется с ускорением a м/с² и к началу отсчета времени t прошло путь s_0 м, имея в этот момент скорость v_0 м/с, то зависимость пройденного пути s (в метрах) от времени t (в секундах) выражается формулой:

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0.$$

Если, например, $a = 6$, $v_0 = 5$, $s_0 = 20$, то формула примет вид:

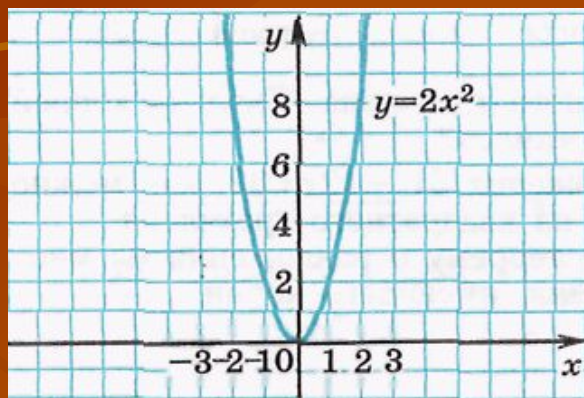
$$s = 3t^2 + 5t + 20.$$

Изучение квадратичной функции мы начнем с частного случая - функции $y = ax^2$. При $a = 1$ формула $y = ax^2$ принимает вид $y = x^2$. С этой функцией мы уже встречались. Графиком этой функции является парабола.

Построим график функции $y = 2x^2$. Составим таблицу значений этой функции:

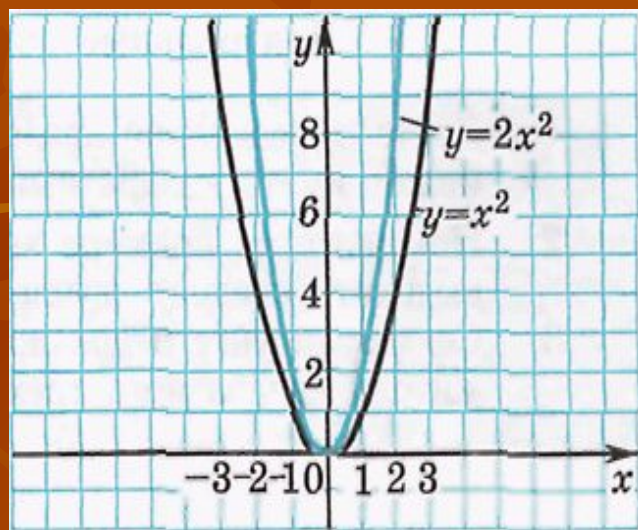
x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

Построим точки, координаты которых указаны в таблице. Соединив их плавной линией, получим график функции $y = 2x^2$.



При любом $x \neq 0$ значение функции $y = 2x^2$ больше соответствующего значения функции $y = x^2$ в 2 раза. Если переместить каждую точку графика функции $y = x^2$ вверх так, чтобы расстояние от этой точки до оси x увеличилось в 2 раза, то она перейдет в точку графика функции $y = 2x^2$, при этом каждая точка этого графика может быть получена из некоторой точки графика функции $y = x^2$

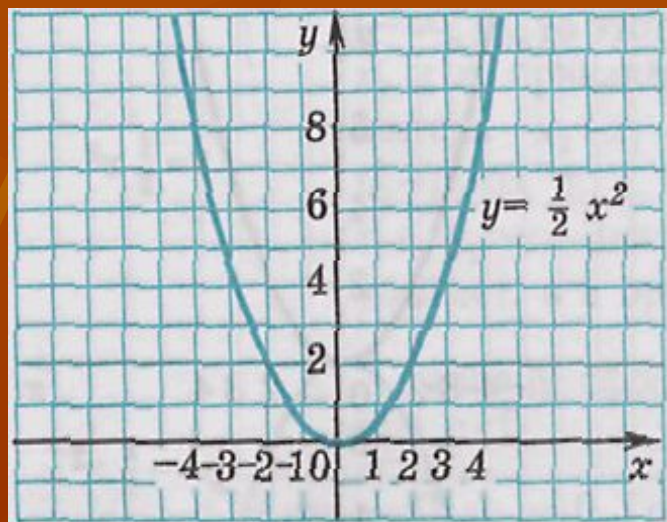
Иными словами, график функции $y = 2x^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ растяжением от оси x в 2 раза.



Построим теперь график функции $y = \frac{1}{2}x^2$. Для этого составим таблицу ее значений:

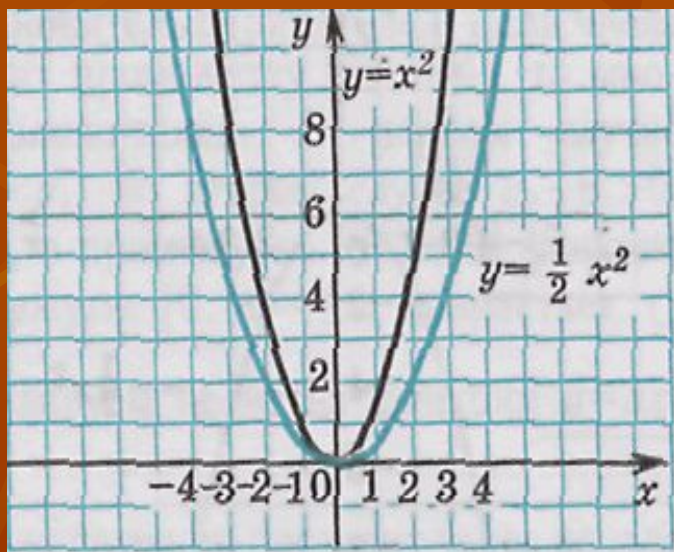
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$:



При любом $x \neq 0$ значение функции $y = \frac{1}{2} x^2$ меньше соответствующего значения функции $y = x^2$ в 2 раза. Если переместить каждую точку графика функции $y = x^2$ вниз так, чтобы расстояние от этой точки до оси x уменьшилось в 2 раза, то она перейдет в точку графика функции $y = \frac{1}{2} x^2$ причем каждая точка этого графика может быть получена из некоторой точки графика функции $y = x^2$.

Таким образом, график функции $y = \frac{1}{2} x^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ сжатием к оси x в 2 раза.



Вообще график функции $y = ax^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ растяжением от оси x в a раз, если $a > 1$, и сжатием к оси x в $\frac{1}{a}$ раз, если $0 < a < 1$.

Рассмотрим теперь функцию $y = ax^2$ при $a < 0$.

Построим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$, для чего составим таблицу значений этой функции:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	-8

Воспользовавшись этой таблицей, построим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$.

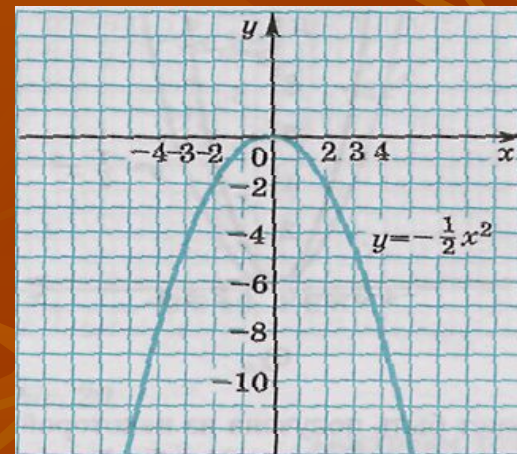
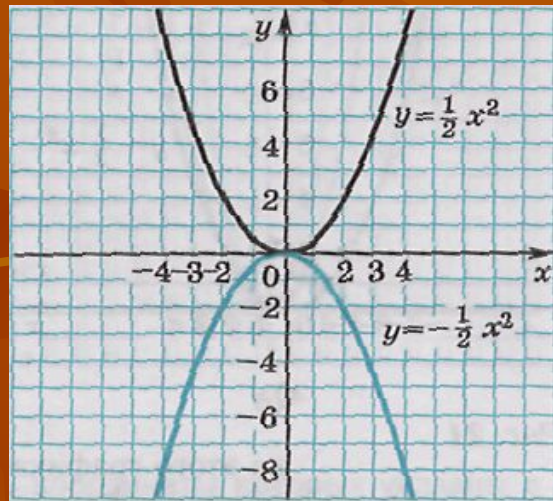


График функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ может быть

получен из графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$

с помощью симметрии относительно оси x .



Свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

- 1. Если $x=0$, то $y=0$. График функции проходит через начало координат.*
- 2. Если $x \neq 0$, то $y > 0$. График функции расположен в верхней полуплоскости.*
- 3. Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции. График функции симметричен относительно оси y .*
- 4. Функция убывает в промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает в промежутке $[0; +\infty)$.*
- 5. Наименьшее значение, равное нулю, функция принимает при $x=0$, наибольшего значения функция не имеет. Областью значений функции является промежуток $[0; +\infty)$.*

Свойства функции $y = ax^2$ при $a < 0$.

- 1. Если $x=0$, то $y=0$. График функции проходит через начало координат.**
- 2. Если $x \neq 0$, то $y < 0$. График функции расположен в нижней полуплоскости.**
- 3. Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции. График функции симметричен относительно оси y .**
- 4. Функция возрастает в промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает в промежутке $[0; +\infty)$.**
- 5. Наибольшее значение, равное нулю, функция принимает при $x=0$, наименьшего значения функция не имеет. Областью значений функции является промежуток $(-\infty; 0]$.**

ГРАФИКИ ФУНКЦИИ $y = ax^2 + n$ И $y = a(x - m)^2$

График функции $y=f(x)+n$ можно получить из графика функции $y=f(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси y на n единиц вверх, если $n>0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n<0$.

График функции $y=f(x-m)$ можно получить из графика функции $y=f(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси x на m единиц вправо, если $m>0$, или на $-m$ единиц влево, если $m<0$.

График функции $y=f(x-m)+n$ можно получить из графика функции $y=f(x)$ с помощью двух соответствующих параллельных переносов.

Пример 1. Выясним, что представляет собой график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

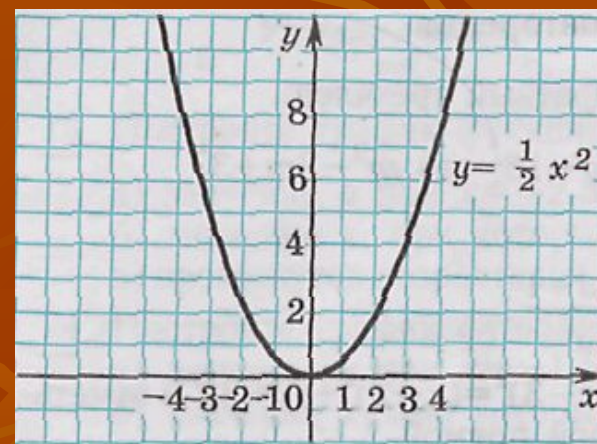
С этой целью в одной системе координат построим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2$:

(1)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

График функции $y = \frac{1}{2}x^2$ изображен на рисунке:



Чтобы получить таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ для тех же значений аргумента, достаточно к найденным значениям функции $y = \frac{1}{2}x^2$ прибавить 3:

(2)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	11	7.5	5	3.5	3	3.5	5	7.5	11

Получим график функции

$y = \frac{1}{2}x^2 + 3$, который изображен на рисунке:

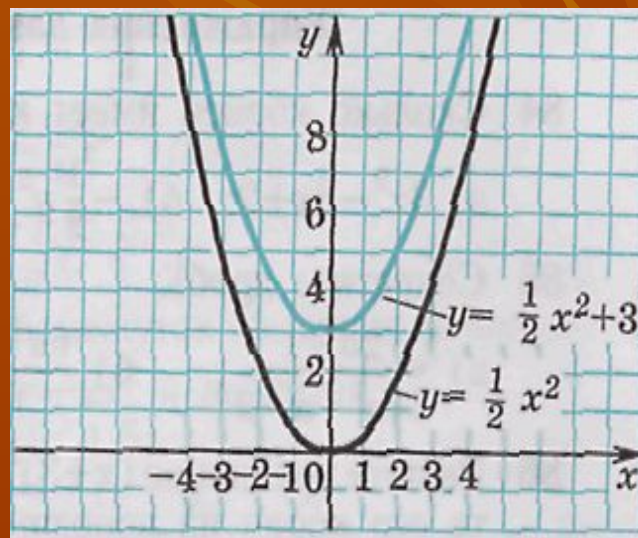


График функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ - парабола, полученная в результате сдвига
вверх графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

**Вообще график функции $y = ax^2 + n$
является параболой, которую можно
получить из графика функции $y = ax^2$
с помощью параллельного переноса
вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$,
или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$.**

Пример 2. Рассмотрим теперь функцию $y = \frac{1}{2}x(x - 5)^2$ и выясним, что представляет собой ее график.

Для этого в одной системе координат построим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x(x - 5)^2$.

Для построения графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ воспользуемся таблицей

(1). Составим теперь таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x(x - 5)^2$.

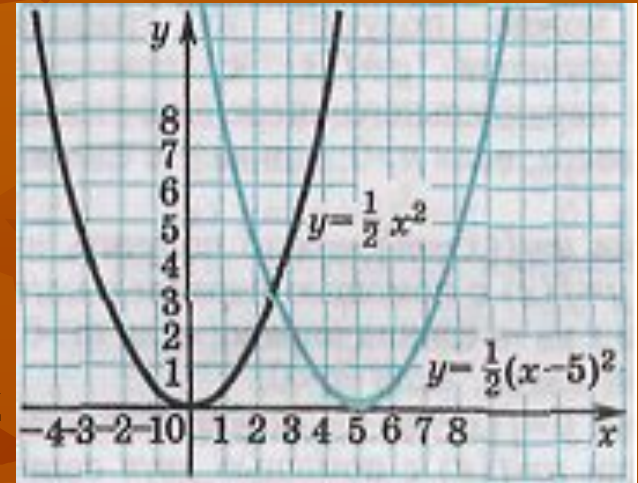
При этом в качестве значений аргумента выберем те, которые на 5 больше соответствующих значений аргумента в таблице (1). Тогда соответствующие им значения функции $y = \frac{1}{2}x(x - 5)^2$ будут те же, которые записаны во второй строке таблицы (1):

(3)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

График функции $y = \frac{1}{2}x(x - 5)^2$ - парабола, полученная в результате сдвига вправо графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

Вообще график функции $y = a(x - t)^2$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси x на t единиц вправо, если $t > 0$, или на $-t$ единиц влево, если $t < 0$.

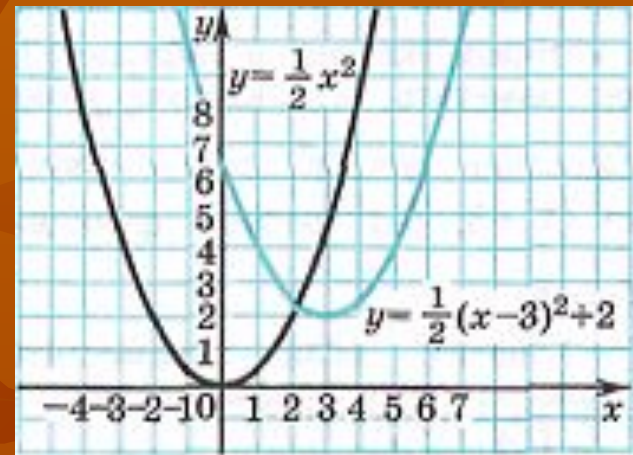


Полученные выводы позволяют понять, что представляет собой график функции $y = a(x - t)^2 + n$.

Рассмотрим, например, функцию $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$. Ее график можно

получить из графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ с помощью двух параллельных переносов - сдвига параболы на 3 единицы вправо и на 2 единицы вверх.

Вообще график функции $y = a(x - m)^2 + n$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$, и сдвига вдоль оси y на n единиц вверх - если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$.



Заметим, что производить параллельные переносы можно в любом порядке: сначала выполнить параллельный перенос вдоль оси x , а затем вдоль оси y или наоборот.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$. Выделим из трехчлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двучлена:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2x \times \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Отсюда $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Мы получили формулу вида $y = a(x - m)^2 + n$,

где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Значит, график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, которую можно получить из графика функций $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов – сдвига вдоль оси x и сдвига вдоль оси y .

Отсюда следует, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, вершиной которой является точка $(m;n)$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Осью симметрии параболы служит прямая $x=m$ параллельная оси u . При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ - вниз.

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:

- 1) найти координаты вершины параболы и отметить ее в координатной плоскости;
- 2) построить еще несколько точек, принадлежащих параболе;
- 3) соединить отмеченные точки плавной линией.

Пример 1. Построим график функции $y = 0,5x^2 + 3x + 0,5$.
Графиком функции $y = 0,5x^2 + 3x + 0,5$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты m и n вершины этой параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \times 0,5} = -3; \quad n = 0,5 \times (-3)^2 + 3 \times (-3) + 0,5 = -4.$$

Значит, вершиной параболы является точка $(-3; -4)$.

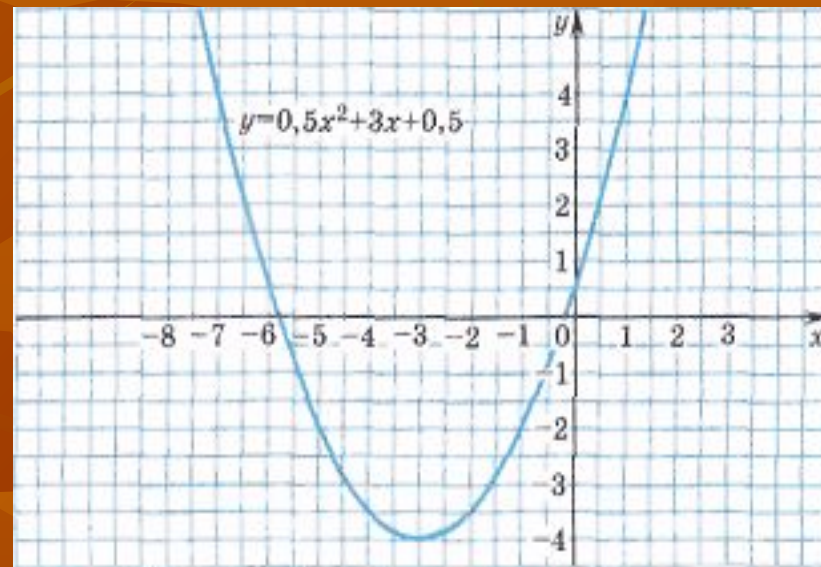
Составим таблицу значений функции:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	4	0,5	-2	-3,5	-4	-3,5	-2	0,5	4

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции

$$y = 0,5x^2 + 3x + 0,5$$

При составлении таблицы и построении графика учитывалось, что прямая является осью симметрии параболы. Поэтому мы брали точки с абсциссами -4 и -2, -5 и -1, -6 и 0, симметричные относительно прямой (эти точки имеют одинаковые ординаты).



Пример 2. Построим график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдем координаты ее вершины:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \times (-2)} = 3;$$

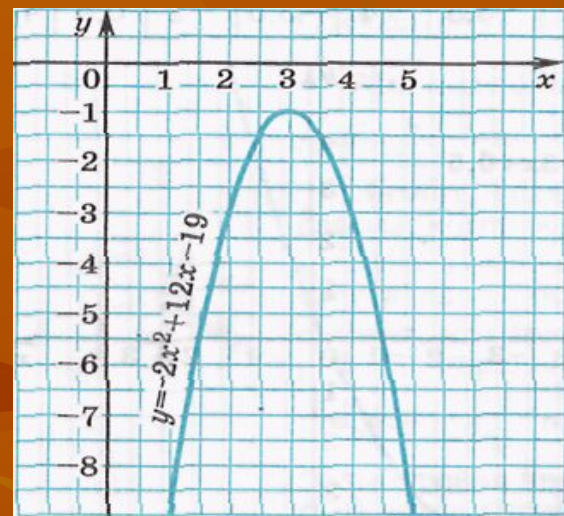
$$n = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

Вычислив координаты еще нескольких точек, получим таблицу:

x	1	2	3	4	5
y	-9	-3	-1	-3	-9

Соединив плавной линией точки, координаты которых указаны в таблице, получим график функции

$$y = -2x^2 + 12x - 19$$



Пример 3. Построим график функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$. Графиком функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты ее вершины:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \times \frac{1}{4}} = -2;$$

$$n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - 2 + 1 = 0.$$

Вычислив координаты еще нескольких точек, получим таблицу:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$

График функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$
изображен на рисунке:

