Томский политехнический университет

Ст. преп., к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

2010

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной ***x***, неизвестной функции ***y = f(x)*** и её производных (или дифференциалов**):**

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Порядком уравнения называется максимальный порядок ***n*** входящей в него производной (или дифференциала).

Функция ***y*(*x*)** называется **решением (или интегралом)** дифференциального уравнения если при подстановке ее в уравнение обращает его в **тождество**.

Пример: $y^{(4)} - y + x = 0$ **-** уравнение четвёртого порядка.

ОДУ первого порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

где x - независимая переменная, y(x) - неизвестная функция

Общее решение: $y = \varphi(x, C)$

Пример: $y'(x) - 3 \cdot x = 0$ общее решение: $y(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + c$

Разделяют несколько типов (видов) обыкновенных дифференциальных уравнений:

-**Уравнения с разделяющимися переменными,**

-**Однородные уравнения,**

-**Линейные уравнения,**

-**Уравнение в полных дифференциалах,**

-и т.д.

Остановимся подробнее на каждом из этих типов уравнений.

Уравнения с разделёнными переменными.

Так называются уравнения вида удовлетворяющее начальному условию

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

Интегрируя, получим

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$$

- общий интеграл (общее решение) этого уравнения.

Пример:

$$e^y\,dy - (x^3 + 7x)\,dx = 0; \quad \int e^y\,dy - \int (x^3 + 7x)\,dx = 0;$$

$$e^y - \frac{x^4}{4} + \frac{7}{2}x^2 + c = 0$$ - общее решение

Уравнения с разделяющимися переменными.

Так называются уравнения вида

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Эти уравнения легко сводятся к уравнению с разделёнными переменными:

Записываем уравнение в форме:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

затем делим на ***g(y)*** и умножаем на ***d*** $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.

Это уравнение - с разделёнными переменными. Интегрируя, получим общий интеграл:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

Пример: $y' = x \cdot (y-1);$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y-1); \qquad \frac{dy}{(y-1)} = x \cdot dx;$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)} = \int x \cdot dx; \qquad \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C$$

Выразим у из последнего выражения как функцию х, получим общее решение:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

Уравнения с **однородной** правой частью. Так называются уравнения со специальным видом зависимости функции $f(x, y)$ от своих аргументов:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной функции ***u*(*x*)** **заменой**:

$$\frac{y(x)}{x} = u(x)$$

Подставляя в уравнение $y = x \cdot u$, $y' = u + x \cdot u'$, получим

$$u + xu' = f(u),\ x\frac{du}{dx} = f(u) - u,$$

(это - уравнение с разделяющимися переменными),

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},\ \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

- это общий интеграл уравнения относительно переменных x, u

Пример:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{x^2},$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \qquad u = \frac{y}{x},\ y = ux, \qquad y' = u + u'x,$$

$$u + u'x = u + \frac{1}{u}, \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}, \qquad udu = \frac{dx}{x},$$

$$\int udu = \int\frac{dx}{x}, \quad \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \frac{C}{2}, \quad u^2 = 2\ln|x| + C, \quad \frac{y^2}{x^2} = \ln x^2 + C,$$

$$y^2 = x^2\left(C + \ln x^2\right)$$

- общее решение уравнения

Пример:

$$xy' = y\cos(\ln y - \ln x)$$

$$y' = \frac{y}{x}\cos\ln\frac{y}{x}$$

$$u = \frac{y}{x},\ y = ux,$$

$$y' = u + u'x,\ u + u'x = u\cos\ln u,\ x\frac{du}{dx} = u\cos\ln u - u,\ \frac{du}{u(\cos\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},\ \int\frac{du}{u(\cos\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{u(\cos\ln u - 1)} = |s = \ln u| = \int\frac{ds}{\cos s - 1} = \left|p = \operatorname{tg}\frac{s}{2}\right| = \int\frac{2dp/(1+p^2)}{\frac{1-p^2}{1+p^2} - 1} = \int\frac{2dp}{-2p^2} = \frac{1}{p} = \operatorname{ctg}\frac{s}{2} + C = \operatorname{ctg}\frac{\ln u}{2} + C,$$

$$C \neq 0$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\ln u}{2} = \ln|x| + \ln|C|$$

$$Cx = e^{\operatorname{ctg}\frac{\ln u}{2}}$$

$$Cx = e^{\operatorname{ctg}\frac{\ln(y/x)}{2}}$$

Окончательно, получим общее решение:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

Линейные уравнения. ДУ первого порядка называется линейным, если неизвестная функция *y*(*x*) и её производная входят в уравнение в первой степени:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

здесь ***p*(*x*)**, ***q*(*x*)** - непрерывные функции**.**

Пример:

$$\frac{dy}{dx} - \sin(x)y = ctg(x); \qquad y' + (1 + x^2)y = 37 \cdot x + 5.$$

Для решения уравнения представим $y(x)$ в виде произведения двух новых неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$: $y(x) = u(x)v(x)$.
Тогда

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

и уравнение приводится к виду:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

или

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$$

Это уравнение решаем в два этапа: сначала находим функцию $v(x)$ как частное решение уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' + p(x)v = 0$$

затем находим $u(x)$ из уравнения:

$$u'v = q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx}$$

$$e^{-\int p(x)dx} \cdot u'(x) = q(x) \Rightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

Отметим, решая уравнение на ***v(x)*** мы не вводим в это решение произвольную постоянную *C*, нам достаточно найти одну функцию ***v(x)***, обнуляющую слагаемое со скобками. Запоминать эту формулу не надо, лучше усвоить порядок действий и воспроизводить его при решении каждой задачи.

Пример: $$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x},\ y(0) = 1$$

Решение:

$$y = uv,\ y' = u'v + uv', \qquad u'v + uv' - \operatorname{tg} x \cdot uv = \frac{1}{\cos x},$$

$$u'v + u\left(v' - v \operatorname{tg} x\right) = \frac{1}{\cos x}, \qquad \frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot v, \qquad v' - v \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}, \qquad \ln|v| = -\ln|\cos x|,$$

$$v = \frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{u'}{\cos x} = \frac{1}{\cos x},\ u(x) = x + C$$

и общее решение уравнения .

$$y(x) = \frac{x + C}{\cos x}$$

Для нахождения частного решения, соответствующего начальным условиям (задача Коши), подставим в общее решение

$$y(x) = \frac{x + C}{\cos x} \qquad x = 0,\ y = 1:\ 1 = \frac{0 + C}{\cos 0} \Rightarrow C = 1$$

Решение задачи:

$$y(x) = \frac{x + 1}{\cos x}$$

Уравнение в полных дифференциалах. Так называется уравнение вида

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

($P(x, y)$, $Q(x, y)$ - непрерывно дифференцируемы) в случае, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т.е. если существует такая функция $u(x, y)$, что

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial y}dy$$

Необходимым и достаточным условием существования такой функции является условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Если - уравнение в полных дифференциалах, то его правая часть равна 0, т.е. принимает вид $du(x, y) = 0$. На решении $y(x)$ получим $du(x, y(x)) = 0$, следовательно, $u(x,y(x)) = C$, где C - произвольная постоянная. Соотношение $u(x, y) = C$ и есть общее решение уравнения в полных дифференциалах.

Для нахождения функции *u*(*x*, *y*) решается система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы находим:

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$$

с точностью до произвольной дифференцируемой по *y* функции (эта фун$\varphi(y)$ играет роль постоянной интегрирования; так как интегрирование ведётся по переменной *x*.

Дифференцируем эту функцию по *y* и приравниваем выражению, стоящему во втором уравнении системы (т.е. $Q(x, y)$), получим дифференциальное уравнение из которого можно найти $\varphi(y)$.

Пример: найти общее решение уравнения $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$

Убедимся, что это - уравнение в полных дифференциалах.

$$P(x,y)=\frac{\sin 2x}{y}+x;\ Q(x,y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\sin 2x}{y^2};\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2\sin x\cos x}{y^2}=-\frac{\sin 2x}{y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\sin 2x}{y}+x,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}.\end{cases}$$

$$u(x,y)=\int\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\varphi(y)=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\cos 2x}{2y^2}+\varphi'(y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y)=y-\frac{1}{2y^2}\Rightarrow \qquad \varphi(y)=\int\left(y-\frac{1}{2y^2}\right)dy=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}$$

$$u(x,y)=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y} \qquad -\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}=C$$

Задание: К какому типу относятся дифференциальные уравнения:

1) $(x^2+2xy)dx+xydy=0;$

2) $x(y^2-4)dx+ydy=0;$

3) $ye^x dx+(y+e^x)dy=0.$

$$1)\quad (x^2 + 2xy)dx + xydy = 0;$$

$$\frac{1}{xy}\times \qquad (x^2 + 2xy)dx + xydy = 0; \qquad (\frac{x}{y} + 2)\,dx + dy = 0; \qquad \frac{dy}{dx} = -(\frac{x}{y} + 2)$$

$$2)\quad x(y^2 - 4)dx + ydy = 0;$$

$$xdx = -y\frac{dy}{(y^2 - 4)}; \qquad \int xdx = -\int y\frac{dy}{(y^2 - 4)};$$

$$3)\quad ye^x dx + (y + e^x)dy = 0.$$

$$P(x, y) = ye^x; \quad Q(x, y) = (y + e^x); \qquad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = e^x; \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} = e^x$$

ОДУ высших порядков

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной x, неизвестной функции y = f(x) и её производных (или дифференциалов):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Общим решением (общим интегралом) уравнения называется соотношение вида:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Некоторые типы уравнений, допускающие понижение порядка.

Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

решается последовательным *n*-кратным интегрированием.

Пример:

$$y^{(4)} = \sin x \Rightarrow y''' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1 \Rightarrow y'' = -\int (\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \Rightarrow y = \cos x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Переобозначив постояные, общее решение запишем в виде :

$y = \cos x + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

Уравнение, не содержащее в явном виде неизвестную функцию и её младшие производные.

Порядок уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, не содержащего функции $y(x)$ и $(k - 1)$ младшую производную этой функции в явном виде, может быть понижен ровно на k единиц введением новой неизвестной функции $z(x) = y^{(k)}(x)$. Тогда уравнение примет вид

$$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$$

т.е. будет уравнением $(n - k)$-го порядка.

После нахождения $z(x)$ последовательным интегрированием решается уравнение $y^{(k)}(x) = z(x)$.

Пример: Понизить порядок уравнения:

$$x^6 y''' - 2x^5 y'' = \frac{(y'')^3}{2}$$

Младшая производная, входящая в явной форме в уравнения, - вторая, поэтому делаем замену искомой функции:

$$z(x) = y''(x)$$

Тогда

$$y''' = z'$$

и уравнение примет вид

$$x^6 z' - 2x^5 z = \frac{z^3}{2}$$

Уравнение, не содержащее в явном виде независимую переменную ***x***.

Порядок уравнения

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

не содержащего явно *x*, может быть понижен на 1 с помощью приёма, который заключается в том, что вводится новая функциональная зависимость y' от y:

$$y' = p(y)$$

Пример: Понизить порядок уравнения:

$$yy'' = y'^2 - y';$$

Переменная ***x*** явно в уравнение не входит, поэтому полага $y' = p(y)$ $y'' = p'p$

тогда $ypp' = p^2 - p$.

Просто сократить на ***p*** это уравнение нельзя, так как можно потерять семейство $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$

поэтому рассматриваем два случая:

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$$

$$p \neq 0 \Rightarrow yp' = p - 1.$$

Спасибо за внимание