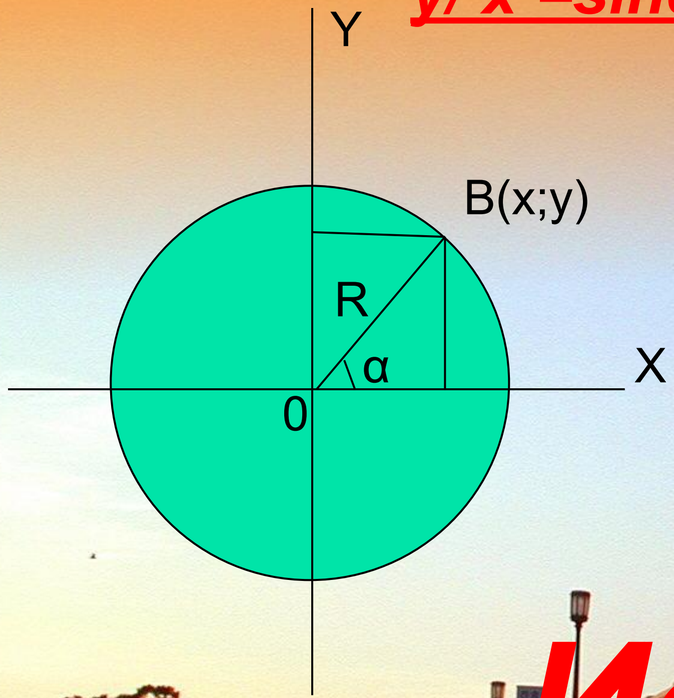
$y/\,x = \sin\alpha$



История развития тригонометрии

Вступление

- Слово тригонометрия впервые встречается в 1505 году в *заглавии книги* немецкого математика *Питискуса*.

- Тригонометрия – слово греческое и в буквальном переводе означает *измерение треугольников*.

- В данном случае измерение треугольников следует понимать как решение треугольников, т.е. определение сторон, углов и других элементов треугольника, если даны некоторые из них. Большое количество практических задач, а также задач планиметрии, стереометрии, астрономии и других приводятся к задаче решения треугольников.

- Возникновение тригонометрии связано с *землемерием*, *астрономией* и *строительным делом.*

История становления тригонометрии

- Хотя название науки возникло сравнительно недавно, многие относимые сейчас к тригонометрии понятия и факты были известны ещё две тысячи лет назад.

- Впервые способы решения треугольников, основанные на зависимостях между сторонами и углами треугольника, были найдены древнегреческими астрономами *Гиппархом* (2 в. до н. э.) и *Клавдием Птолемеем* (2 в. н. э.). Позднее зависимости между отношениями сторон треугольника и его углами начали называть тригонометрическими функциями.

- Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли арабские ученые Аль-Батани (850-929) и Абу-ль-Вафа, Мухамед-бен Мухамед (940-998), который составил таблицы синусов и тангенсов через 10’ с точностью до 1/604.

- Теорему синусов уже знали индийский ученый Бхаскара (р. 1114, год смерти неизвестен) и азербайджанский астроном и математик Насиреддин Туси Мухамед (1201-1274). Кроме того, Насиреддин Туси в своей работе «Трактат о полном четырехстороннике» изложил плоскую и *сферическую тригонометрию* как самостоятельную дисциплину.

- Долгое время тригонометрия носила чисто *геометрический* характер, т. е. факты, которые мы сейчас формулируем в терминах тригонометрических функций, формулировались и доказывались с помощью геометрических понятий и утверждений. Такою она была еще в средние века, хотя иногда в ней использовались и аналитические методы, особенно после появления логарифмов.

- Начиная с XVII в., тригонометрические функции начали применять к решению уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники, для описания колебательных процессов, распространения волн, движения различных механизмов, для изучения переменного электрического тока и т. д. Поэтому тригонометрические функции всесторонне и глубоко исследовались, и приобрели важное значение для всей математики.

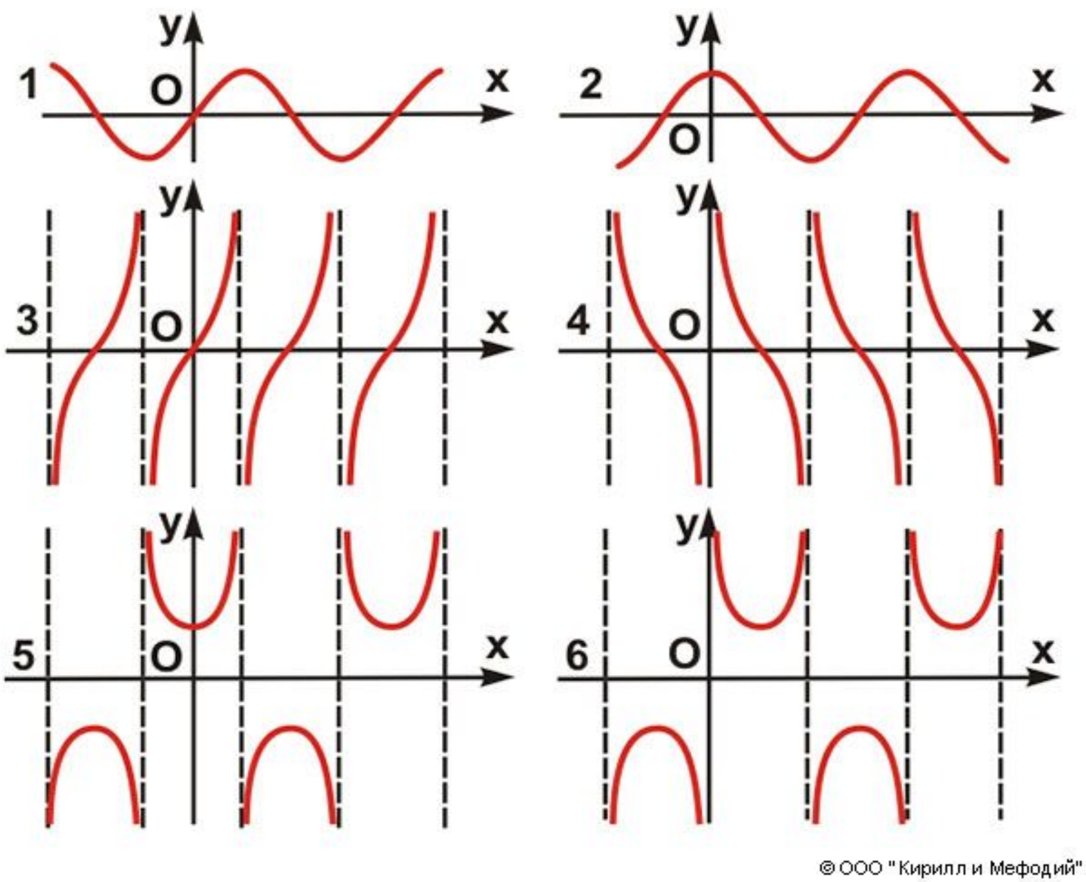
- Аналитическая теория тригонометрических функций в основном была создана выдающимся математиком XVIII веке *Леонардом Эйлером* (1707-1783) членом Петербургской Академии наук.

- Громадное научное наследие Эйлера включает блестящие результаты, относящиеся к математическому анализу, геометрии, теории чисел, механике и другим приложениям математики.

- Именно Эйлер первым ввел известные определения тригонометрических функций, стал рассматривать функции произвольного угла, получил формулы приведения.

- После Эйлера тригонометрия приобрела форму исчисления: различные факты стали доказываться путем формального применения формул тригонометрии, доказательства стали намного компактнее проще,
- Таким образом, тригонометрия, возникшая как наука о решении треугольников, со временем развилась и в науку о тригонометрических функциях.
- Позднее часть тригонометрии, которая изучает свойства тригонометрических функций и зависимости между ними, начали называть *гониометрией* .Термин гониометрия в последнее время практически не употребляется.

Графики тригонометрических функций



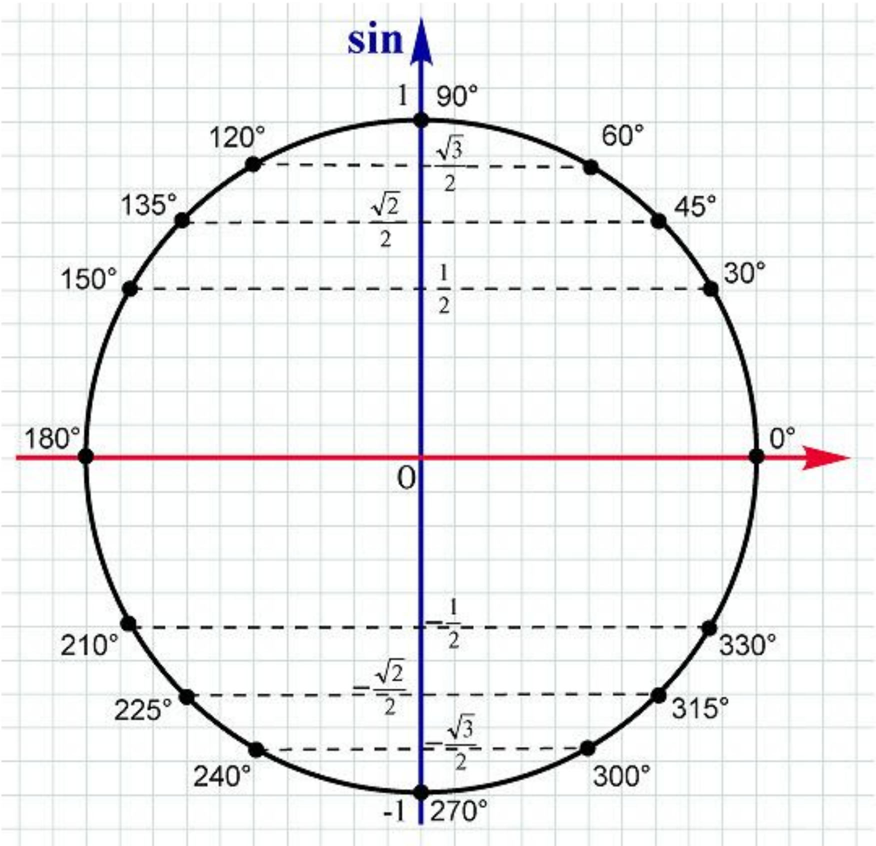
1 — синуса;
2 — косинуса;
3 — тангенса;
4 — котангенса;
5 — секанса;
6 — косеканса.

Синус sin

- Длительную историю имеет понятие синус. Фактически различные отношения отрезков треугольника и окружности (а по существу, и тригонометрические функции) встречаются уже в III веке до н.э. в работах великих математиков Древней Греции – Евклида, Архимеда, Апполония Пергского. В римский период эти отношения достаточно систематично исследовались Менелаем (I век н.э.), хотя и не приобрели специального названия. Современный синус, например, изучался как полухорда, на которую опирается центральный угол, или как хорда удвоенной дуги.

- В IV-V веках появился уже специальный термин в трудах по астрономии великого индийского учёного Ариабхаты, именем которого назван первый индийский спутник Земли. Отрезок АМ он назвал ардхаджива (ардха – половина, джива – тетива лука, которую напоминает хорда). Позднее появилось более краткое название джива. Арабскими математиками в IX веке это слово было заменено на арабское слово джайб (выпуклость). При переводе арабских математических текстов в веке оно было заменено латинским синус (sinus – изгиб, кривизна).

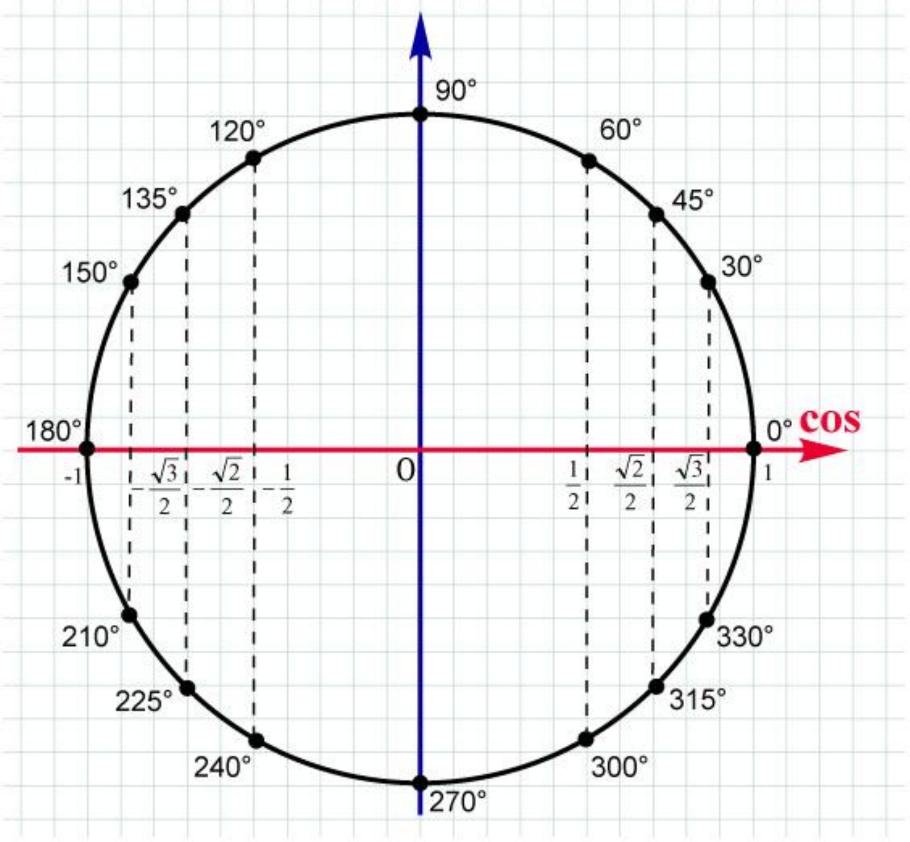
$y = \sin x$,
$D(y) = R, \quad E(y) = [-1;1]$



Косинус cos

- Слово косинус намного моложе. Косинус – это сокращение латинского выражения completely sinus, т. е. “дополнительный синус” (или иначе “синус дополнительной дуги”).

y = cos x,
D (y) = R, E(y) = [-1;1]

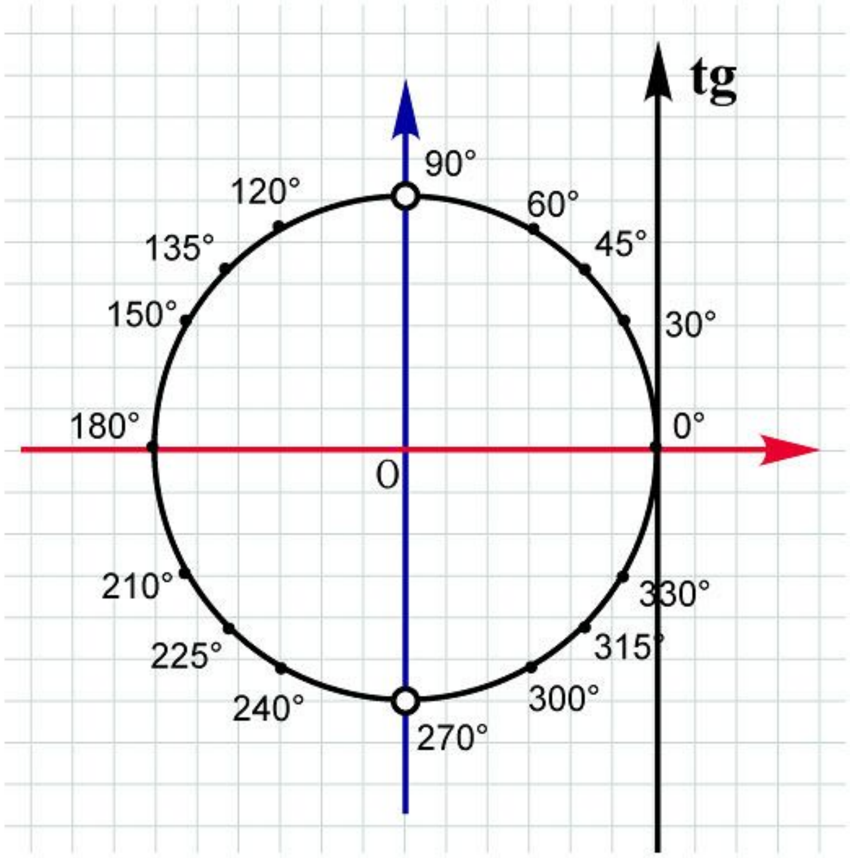


Тангенс tg

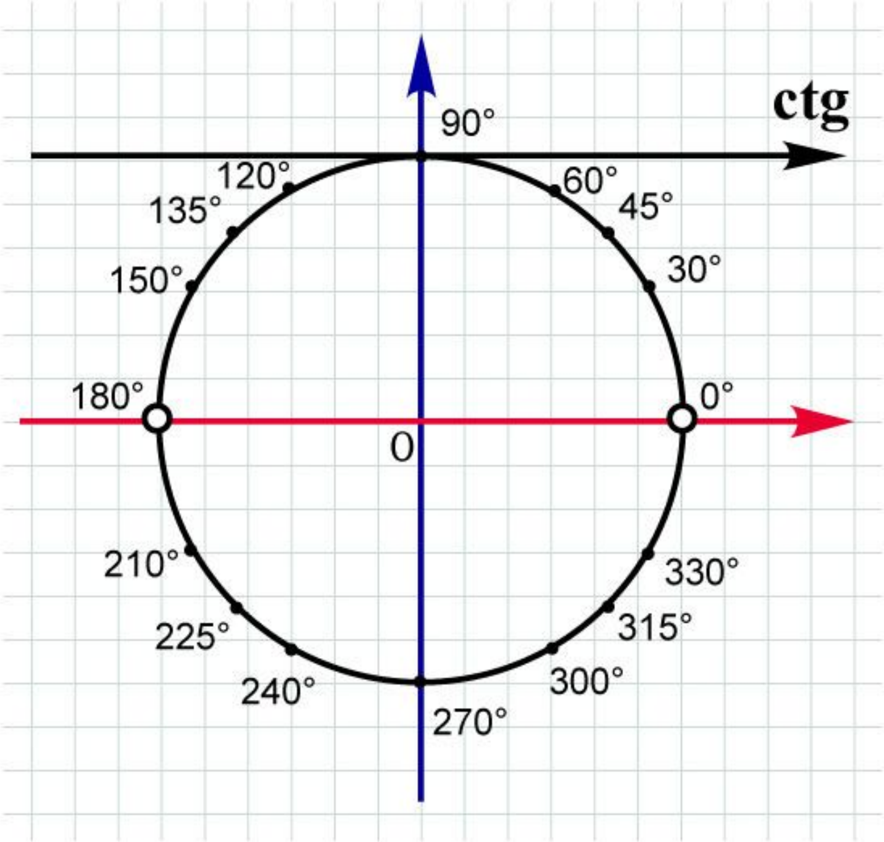
- Тангенсы возникли в связи с решением задачи об определении длины тени. Тангенс (а также котангенс) введен в X веке арабским математиком Абу-ль-Вафой, который составил и первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными европейским ученым, и тангенсы были заново открыты лишь в XIV веке немецким математиком, астрономом Регимонтаном (1467 г.). Он доказал теорему тангенсов. Региомонтан составил также подробные тригонометрические таблицы; благодаря его трудам плоская и сферическая тригонометрия стала самостоятельной дисциплиной и в Европе

- Название «тангенс», происходящее от латинского tanger (касаться), появилось в 1583 г. Tangens переводится как «касающийся» (линия тангенсов – касательная к единичной окружности).

y = tg x,
D (y) = (-п/2+пk;п/2+пk), E(y) = R



y = ctg x,
D (y) = (-пk;пk), E(y) = R



Дальнейшее развитие тригонометрия получила в трудах выдающихся астрономов Николая Коперника (1473-1543) – творца гелиоцентрической системы мира, Тихо Браге (1546-1601) и Иогана Кеплера (1571-1630), а также в работах математика Франсуа Виета (1540-1603), который полностью решил задачу об определениях всех элементов плоского или сферического треугольника по трем данным.

Соотношение между тригонометрическими функциями

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\,\sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\pm\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Формулы привидения и двойного угла

t	90-a	90+a	180-a	180+a	270-a	270+a	360-a
sin t	Cos a	Cos a	Sin a	-Sin a	-Cos a	-Cos a	-Sin a
cos t	Sin a	-Sin a	-Cos a	-Cos a	-Sin a	Sin a	Cos a
tg t	Ctg a	-Ctg a	-Tg a	Tg a	Ctg a	-Ctg a	-Tg a
ctg t	Tg a	-Tg a	-Ctg a	Ctg a	Tg a	-Tg a	-Ctg a

Работа «История развития тригонометрии»

Выполнена студенткой I курса,

группы 11БЭ

Милановой Мадиной в рамках дисциплины «Математика»

под руководством преподавателя математики

Васильевой Елены Дмитриевны