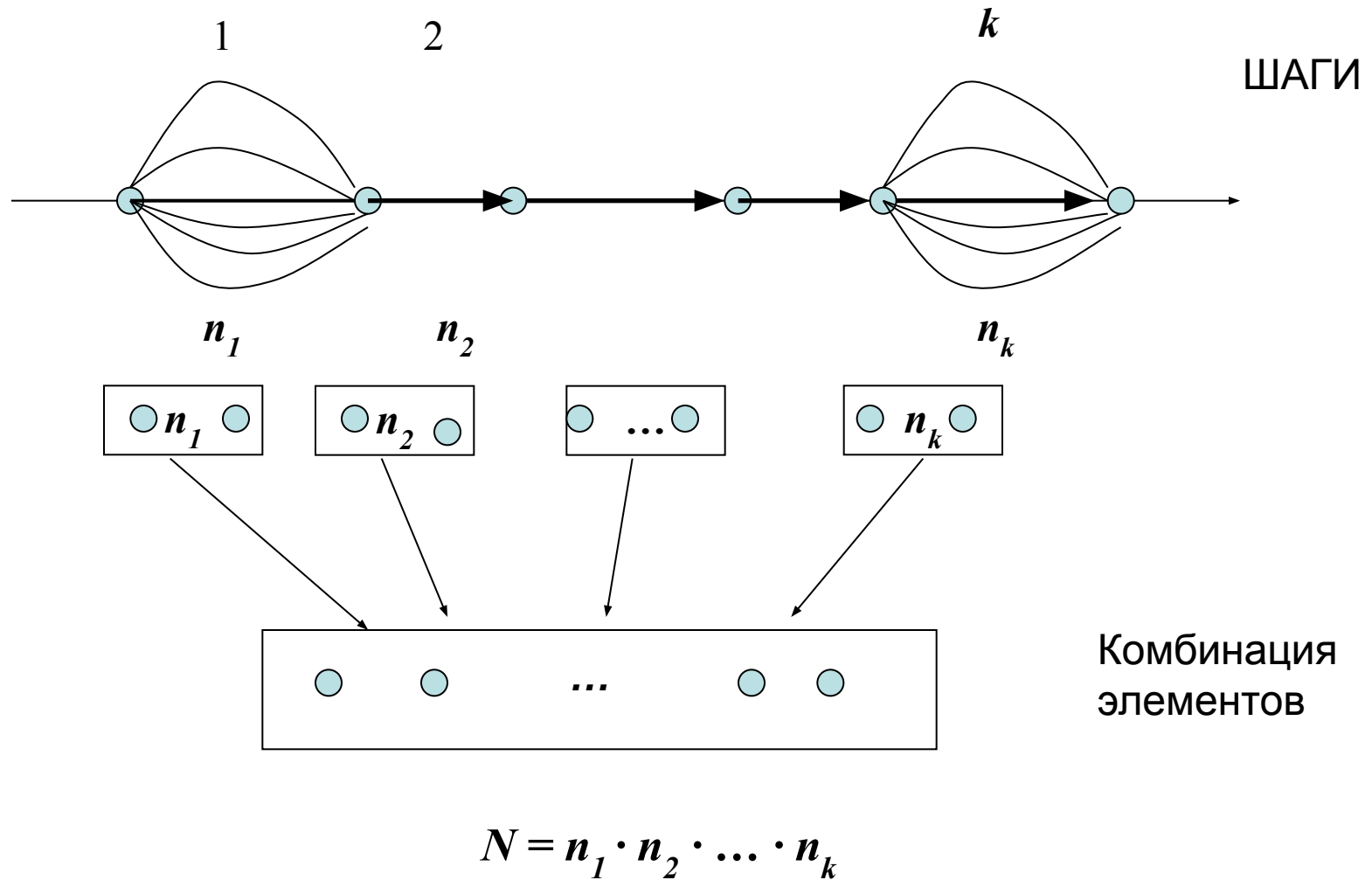


# Элементы комбинаторики

# Принцип произведения комбинаций



# Принцип произведения комбинаций

- Пусть имеется  $k$  групп элементов, причем  $i$ -я группа содержит  $n_i$  элементов,  $1 \leq i \leq k$ .
- Выберем из каждой группы по одному элементу. Тогда общее число  $N$  способов, которыми можно произвести такой выбор, равняется

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

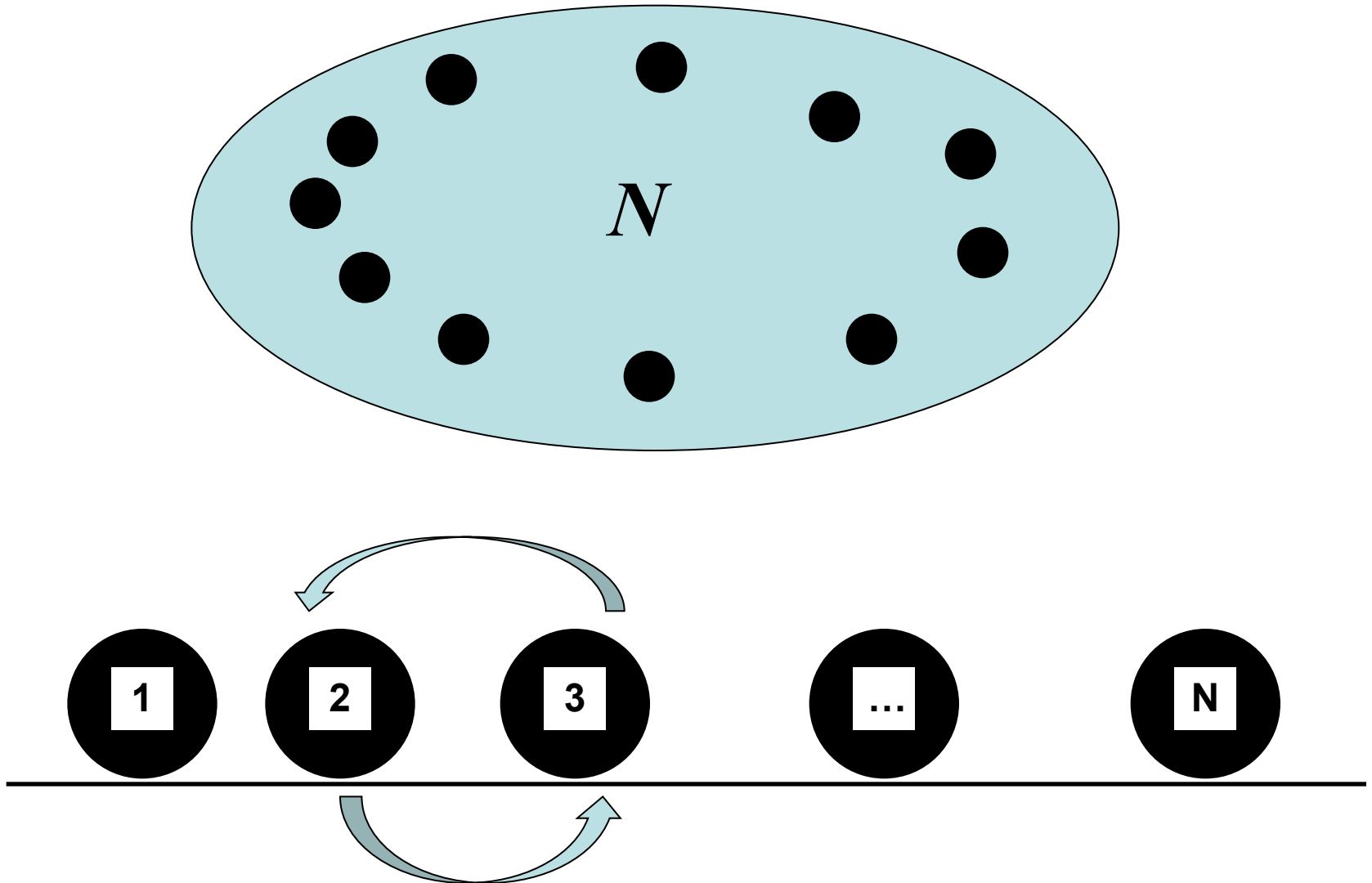
# Виды комбинаций

Перестановки

Размещения

Сочетания

Перестановки: комбинации (соединения) из одних и тех же элементов, отличающиеся порядком



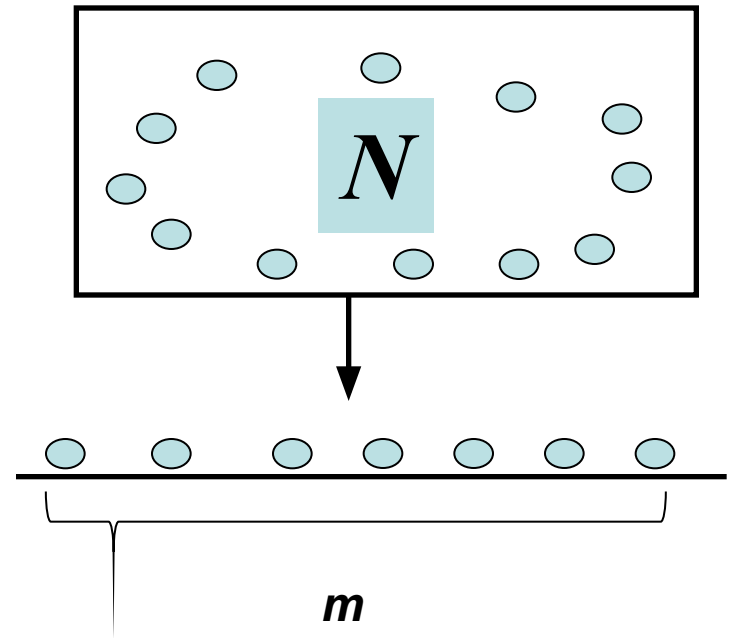
## Подсчитаем число перестановок.

Используем принцип произведения комбинаций:

$$P_N = N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \cdot (N - 3) \dots \cdot 1 = N!$$

# Размещения из $N$ элементов по $m$ элементов

- упорядоченные подмножества из  $m$  элементов, отличающиеся как составом, так и порядком следования элементов



$$A_N^m = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$$

# Сочетания из $N$ элементов по $m$ элементов

- – неупорядоченные подмножества из  $m$  элементов, отличающиеся только составом элементов.
- Если в каждом сочетании произвести все возможные  $m!$  перестановок, то мы получим все размещения.
- Число размещений  $A_N^m$  и число сочетаний  $C_N^m$

Связаны соотношением:

$$A_N^m = m! \cdot C_N^m$$

Отсюда имеем:

$$C_N^m = \frac{A_N^m}{m!} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$



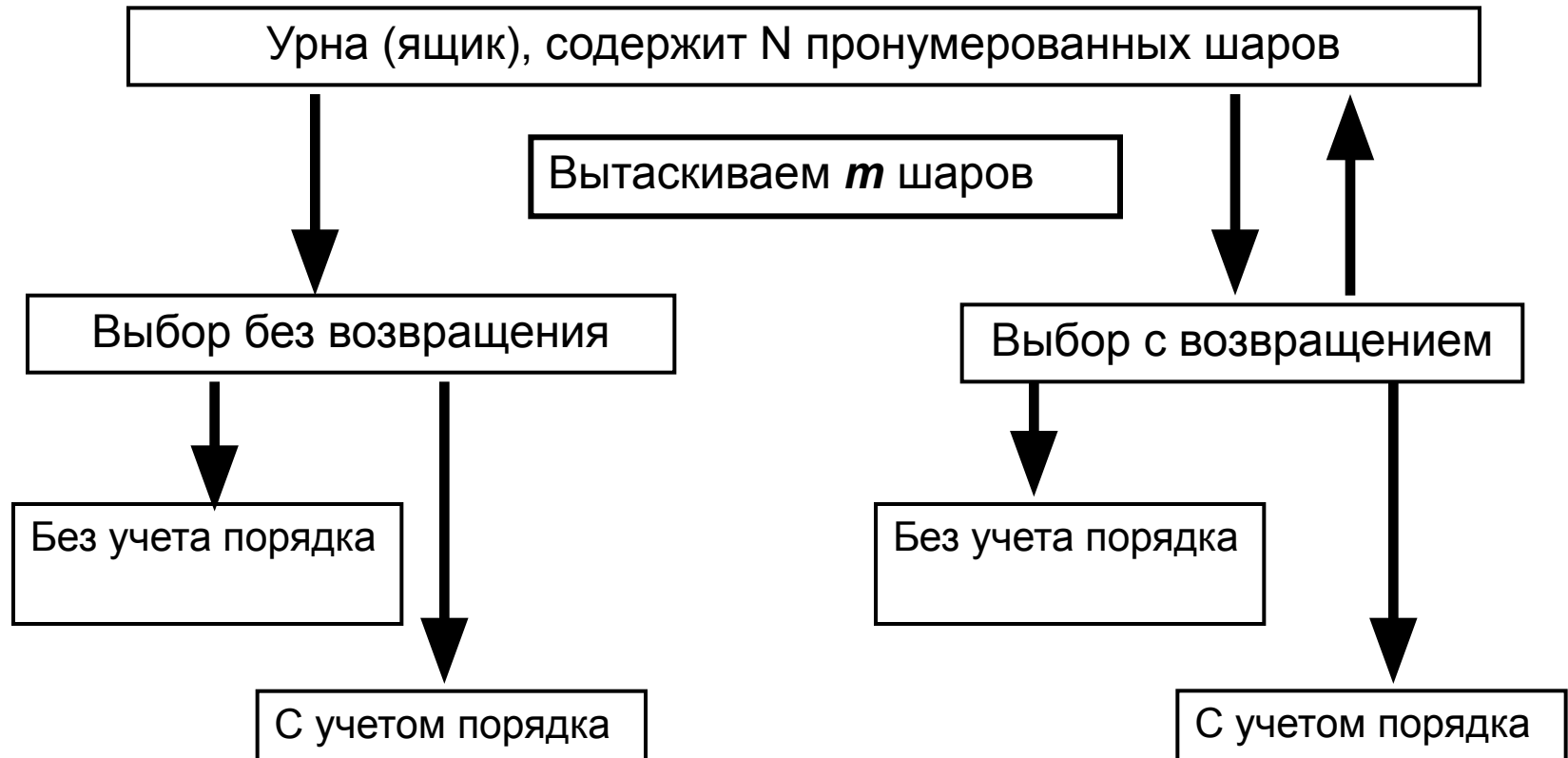
# Основное свойство сочетаний

$$C_N^m = \frac{A_N^m}{m!} = \frac{N!}{m!(N-m)!} = C_N^{N-m}$$

- Образование сочетаний связано с задачей разбиения множества  $N$  элементов на два подмножества так, что одно из них содержит  $m$  элементов, а другое – оставшиеся  $(N-m)$  элементов и является простейшим случаем более общей задачи о разбиении множества на  $k$  неупорядоченных подмножеств, содержащих  $n_1, n_2, \dots, n_k$  элементов, причем  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$ .
- Число таких комбинаций равно

$$\binom{N}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!}, n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$$

# «Урновые» схемы проведения случайных экспериментов



- Выбор без возвращения с учетом порядка

$$A_N^m = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdots (N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$$

- Выбор без возвращения без учета порядка

$$C_N^m = \frac{A_N^m}{m!} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

- Выбор с возвращением с учетом порядка

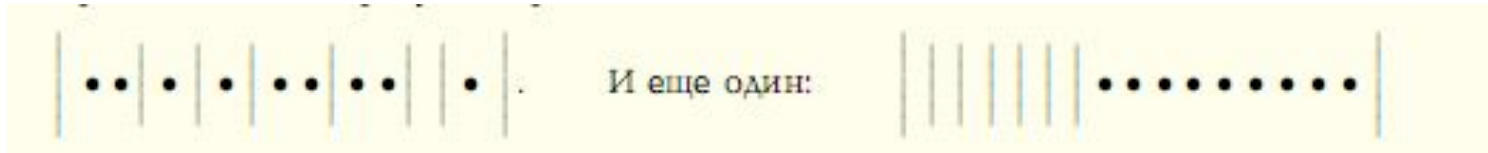
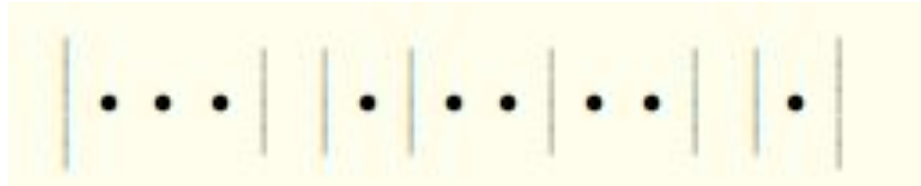
Общее количество выборок :

$$N^m = \underbrace{N \cdot N \cdot N \cdot \dots \cdot N}_{m \text{ раз}}$$

- Выбор с возвращением без учета порядка

Два  
из  
двух

с учетом порядка	без учета порядка
(1, 1)	(1, 1)
(2, 2)	(2, 2)
(1, 2)	} (1, 2)
(2, 1)	



$$C_{N+m-1}^m = C_{N+m-1}^{N-1}$$