Уравнения

Определения

- Равенство с переменной *g(x) = f(x)* называется *уравнением с одной переменной x*.
- Всякое значение переменной, при котором *f(x)* и *g(x)* принимают равные числовые значения, называется *корнем уравнения*.
- Решить уравнение - это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Равносильные уравнения

- Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются *равносильными*.
- Равносильными считаются и уравнения, у которых нет корней.
- Например, уравнения $x + 2 = 5$ и $x + 5 = 8$ равносильны;
- уравнения $x^2 + 5 = 0$ и $3x^2 + 1 = 0$ равносильны, так как корней не имеют.

Теорема 1

- Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2

- Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Линейные уравнения

- Линейным уравнением с одной переменной x называют уравнение вида $ax = b$, где $a,b \in R$; a называют коэффициентом при переменной, b - свободным членом.

Три случая для линейного уравнения *ax* = *b*

- 1) *a № 0;* в этом случае корень равен *b/a;*
- *2) a = 0, b* = *0;* в этом случае уравнение принимает вид *0Ч x = 0,* что верно при любом *x,* т. е. корнем уравнения является любое действительное число;
- *3) a = 0, b № 0;* в этом случае уравнение принимает вид *0Ч x = b,* оно не имеет корней.

Квадратное уравнение

- Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где $a, b, c \in R$ $(a \neq 0)$.

Числа a, b, c носят следующие названия: a - первый коэффициент, b - второй коэффициент, c - свободный член.

Дискриминант

- Выражение $D=b^2-4ac$ называется **дискриминантом** квадратного уравнения.
- Если $a = 1$, то квадратное уравнение вида $x^2+px+q=0$ называется **приведенным**, а его дискриминант $D=p^2-4q$.

Теорема 3: $D \geq 0$

- Если $D \geq 0$, то квадратное уравнение имеет корни $x_1, x_2 \in R$, причем если $D = 0$, то уравнение имеет два совпадающих корня, а если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня, определяемых формулой:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Теорема 3: $D < 0$

- Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Корни приведенного уравнения

- В случае приведенного квадратного уравнения и формулы корней имеют вид:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$